



# ADÓSSÁG KEZELÉSI TANULMÁNYOK

A MAGYAR ÁLLAMPAPÍROK HOZAMGÖRBE MODELLJEINEK  
ILLESZTÉSE GLOBÁLIS OPTIMALIZÁLÓ MÓDSZEREKKEL ÉS  
PARAMÉTEREINEK IDŐSOROS ELEMZÉSE

REGULY ÁGOSTON

2015. ÁPRILIS

Államadósság Kezelő Központ Zrt. 1027 Budapest, Csalogány u. 9-11.

# A MAGYAR ÁLLAMPAPÍROK HOZAMGÖRBE MODELLJEINEK ILLESZTÉSE GLOBÁLIS OPTIMALIZÁLÓ MÓDSZEREKKEL ÉS PARAMÉTEREINEK IDŐSOROS ELEMZÉSE

A zéró-kupon hozamgörbe előállításához, a nemzetközi szakirodalomban alapján, 22 egymással versengő, idősorosan értelmezhető hozamgörbét alkottunk meg. A különböző globális optimalizációs módszerek és polinomok, a magyar állampapírok árjegyzéseihez számított zéró-kupon hozamgörbe becslések alapján, eltérő eredményhez vezethetnek. A dolgozat során az illesztésekből származó modelleket hibametrikák felhasználásával összehasonlítjuk és értékeljük.

A hozamgörbe modellezési feladat egy nem-lineáris, alulhatározott probléma, amelynek megoldása során a kezdeti értékek befolyásolják az illesztés eredményét. Az illesztés során Spline és Nelson-Siegel-Svensson modellcsaládokba tartozó polinomokat használunk fel. A paraméterek becslésénél egy robosztus tanuló algoritmust mutatunk be, amely képes hosszmetszeti szempontokat is figyelembe venni. Az illesztési eredmények azt mutatják, hogy az Államadósság Kezelő Központ által használt köbös Spline módszertan adja a legjobb illeszkedést, míg a Nelson-Siegel-Svensson modellek minimális információ veszteség mellett - kevés paraméterrel - megfelelően írják le a hozamgörbét. Az eredmények rávilágítanak arra, hogy turbulensebb időszakokban érdemes komplikáltabb eljárásokat alkalmazni, míg a kevésbé hektikus időszakokban a Nelson-Siegel modell jól modellezi a hozamgörbét.

A tanulmány utolsó része a Nelson-Siegel polinom Genetikus Algoritmussal illesztett paraméterein végez idősoros elemzést, annak ellenőrzésére, hogy teljesül-e a kezdetben kitűzött idősoros kritérium. Az általánosított autoregresszív score modellt (GAS) segítségével nemcsak interpretálható modellt kapunk az egész hozamgörbe idősoros viselkedésére, hanem metrikát is a teljes hozamgörbe kockázatainak modellezéséhez.

JEL: C61, E43, G12

Keywords: zéró-kupon, hozamgörbe, globális optimalizáció, GAS

---

*Reguly Ágoston*, Államadósság Kezelő Központ Zrt. Elemzési Osztály, e-mail: [reguly.agoston@akk.hu](mailto:reguly.agoston@akk.hu)

A tanulmány „Kockázatmentes hozam? A magyar zéró-kupon hozamgörbe illesztése és elemzése” címen a XXXII. Országos Tudományos Diákköri Konferencián került elbírálásra és bemutatásra. Köszönettel tartozom konzulenseimnek: Mosolygó Zsuzsának és Ormos Mihálynak, munkatársaimnak: Fegyveres Györgynek, Bebes Andrásnak, Kádár Andrásnak, Farkas Richárdnak, Réz Andrásnak és Tátrai Eszternek. Az esetleges hibákért kizárólag a szerző felel.

# CONSTRUCTING AND ANALYSING HUNGARIAN ZERO-COUPON YIELD CURVE MODELS, USING GLOBAL OPTIMALIZATION METHODS

Constructing zero-coupon yield curves with various models, based on the literature and optimized for the Hungarian data, allows time series analysis on the estimated models' parameters. With these methods – optimizing to the bonds prices – 22 model estimations and their comparative analysis are done, using widely spread criterias.

The abovementioned yield estimation problem is non-linear, non-convex and under determined, therefore the solution is highly dependent on the starting values. This paper proposes a robust learning device for defining the starting values. With the help of this method, six different optimizing algorithms are used. The methods are detailed in this paper. The literature proposes several polynomials to describe the zero-coupon curve. The paper chooses 4 specific types from the Spline and Nelson-Siegel-Svensson families, which seems reasonable for the Hungarian data. The results show that the cubic spline method - currently employed by the Hungarian Government Debt Management Agency - gives the best error measurements. However, the Nelson-Siegel-Svensson models are not only more parsimonious, but provide valid reductions, therefore shall be used for analysing the term structure. Estimations underpin that in turbulent times complicated models could be preferred, otherwise the Nelson-Siegel model fits well.

The last part uses the parameters of the Nelson-Siegel model estimated by Genetic Algorithm for financial time series analysis. The estimated General Autoregressive Score (GAS) model is interpretable in the time-series sense, and not only shows the time series properties of the Hungarian yield curve, but gives an estimate for the implied risks.

JEL: C61, E43, G12

Keywords: zero-coupon, term structure, global optimization methods, GAS

# Tartalomjegyzék

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                            | <b>1</b>  |
| <b>2. Kötvény matematika</b>                                   | <b>2</b>  |
| <b>3. Hozamgörbe modellek</b>                                  | <b>4</b>  |
| 3.1. Kőbös Spline módszer                                      | 5         |
| 3.2. Nelson-Siegel-Svensson modellcsalád (NSS)                 | 7         |
| 3.2.1. Nelson-Siegel modell (NS)                               | 8         |
| 3.2.2. Svensson modell                                         | 9         |
| 3.2.3. Legendre polinom                                        | 10        |
| <b>4. Empirikus hozamgörbék illesztése</b>                     | <b>12</b> |
| 4.1. Optimalizálási alapfeladat                                | 12        |
| 4.2. Spline illesztés                                          | 13        |
| 4.3. Általános feltételek a NSS modelltípusokhoz               | 14        |
| 4.3.1. Diebold-Li módszertan – fix belső paraméter             | 15        |
| 4.3.2. Változó belső paraméterrel rendelkező NSS modellek      | 16        |
| 4.3.3. Kezdőértékek meghatározása                              | 17        |
| 4.4. Optimalizáló algoritmusok                                 | 18        |
| 4.4.1. Gradiens alapú algoritmusok                             | 20        |
| 4.4.2. Direct-Search (DS)                                      | 21        |
| 4.4.3. Globális optimalizáció                                  | 22        |
| 4.5. Optimalizálás teljesítményét mérő mutatók                 | 26        |
| <b>5. Adatok és Implementáció</b>                              | <b>27</b> |
| 5.1. A hozamgörbe illesztés eredményeinek részletes bemutatása | 29        |
| 5.2. Módszereket összehasonlító mérőszámok                     | 34        |
| <b>6. General Autoregressive Score modell</b>                  | <b>38</b> |
| <b>7. Összefoglalás</b>                                        | <b>44</b> |

## Ábrák jegyzéke

|     |                                                                                                    |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.  | Nelson-Siegel modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében . . . . .                        | 9  |
| 2.  | Svensson modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében . . . . .                             | 10 |
| 3.  | Legendre polinomok . . . . .                                                                       | 11 |
| 4.  | Legendre ortogonális bázisfüggvények . . . . .                                                     | 11 |
| 5.  | Svensson függvény optimalizálási tere különböző $\lambda$ -ra . . . . .                            | 16 |
| 6.  | Az állampapírok lejáratának szerkezete 2001-2014 között . . . . .                                  | 28 |
| 7.  | Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2002. Január 2.-án . . . . .                                | 29 |
| 8.  | Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2008. Október 20.-án . . . . .                              | 30 |
| 9.  | Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2014. Július 29.-én . . . . .                               | 30 |
| 10. | Napi hibastatisztikák értékei: Köbös Spline (OLS) és Svensson (GA) . . . .                         | 31 |
| 11. | Állampapírok RMSE értékei . . . . .                                                                | 32 |
| 12. | Teljes idősorra vizsgált árakhoz és hozamokhoz tartozó hibák eloszlásai . .                        | 33 |
| 13. | Zéró-kupon hozamgörbék idősorai . . . . .                                                          | 33 |
| 14. | Dinamikus Nelson-Siegel modell paramétereinek volatiliása (Genetikus Al-<br>goritmusból) . . . . . | 39 |
| 15. | Illesztett GAS(2,1) modell DGP elméleti és empirikus eloszlása . . . . .                           | 41 |
| 16. | Feltételes szórások alakulása az időben . . . . .                                                  | 42 |
| 17. | Paraméterek alakulásának kockázati értékei (2,5% és 97,5%) . . . . .                               | 42 |
| 18. | Nelson-Siegel hozamgörbe VaR: 2008. Október 20. . . . .                                            | 43 |

## Táblázatok jegyzéke

|    |                                                                                                                |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. | Felhasznált algoritmusok osztályzása . . . . .                                                                 | 19 |
| 2. | Az adott évben felhasznált kötvények lejáratuk szerint . . . . .                                               | 28 |
| 3. | Teljes időszorra vett hibák eloszlásának statisztikája és Jarque-Bera teszt<br>értékei . . . . .               | 32 |
| 4. | Teljes mintából az árra számított ARMSE és AMAE . . . . .                                                      | 35 |
| 5. | Teljes mintából az hozamokra visszaszámított ARMSE és AMAE . . . . .                                           | 35 |
| 6. | Kötvények illesztésénél elkövetett összes hiba leíró statisztikája . . . . .                                   | 36 |
| 7. | Egy napi illesztés átlagos számítási ideje (mp) és konvergenciák hiánya (db<br>- 3380-ból) . . . . .           | 37 |
| 8. | GAS(2,1) modellek eredményei . . . . .                                                                         | 40 |
| 9. | GAS(2,1) modellek innovációs folyamatainak leíró statisztikai és általáno-<br>sított Pearson tesztje . . . . . | 41 |

# 1. Bevezetés

Az állampapírokból számított hozamgörbe a lejáratidő hossza és a hozamok közötti direkt kapcsolatot írja le a diszkont függvény segítségével. A megfelelő függvénykapcsolat és a paraméterek identifikálása régóta foglalkoztatja a közgazdászokat. (McCulloch (1971), Vasicek (1977), Nelson és Siegel (1987), Anderson et al. (1996), Bliss (1997b), Ferstl és Hayden (2010)) Megbízható és robusztus illesztéssel, a kapott zéró-kupon hozamok alapjául szolgálhatnak a későbbi kockázatkezelési vagy monetáris politikát megalapozó döntésekhez. Bár a zéró-kupon hozamok több országban is, a kötvény kuponok és tőke külön kereskedésének köszönhetően direkt módon is számíthatóak, a magyar piacon ilyen opció a fix kamatozású forint állampapír kötvényeknél nincsen. A kuponfizetési effektus az éven túl lejáratú állampapíroknál nehézkessé teszi a hozamgörbe számítását és a nem-lineáris kapcsolatok miatt további problémákat kell megoldani az illesztések során. (Manousoopoulos és Michalopoulos (2009), Gilli et al. (2010)) Jelen tanulmány ezen nem-lineáris kapcsolatokat térképezi fel és oldja meg különböző nem-lineáris optimalizációs eljárások segítségével és saját fejlesztésű hosszmetzeti szempontokat figyelembe vevő kezdőpont kereső algoritmussal. A megfelelő módszerrel, nem csak az egy adott napra számított hozamgörbe illeszkedését lehetséges maximalizálni, hanem a napi illesztések idősorosan is értelmezhetővé válnak.

A tanulmány először áttekinti a szükséges fogalmakat, amelyek a hozamgörbe felírásához szükségesek. A második fejezet bemutatja a felhasznált empirikus hozamgörbe modellek közül, a jelenleg Államadósság Kezelő Központ által használt köbös-Spline illesztést, majd a Nelson-Siegel-Svensson model családba tartozó takarékos, exponenciális alapú polinomokat felhasználó modellek közül három típust. A harmadik fejezet ismerteti az optimalizálással kapcsolatos problémákat és megoldáshoz felhasznált algoritmusokat, amelyek kulcsfontosságúak a kívánt tulajdonságok eléréséhez (információ tömörítése, pontosság és idősoros tulajdonság). A negyedik fejezet a felhasznált adatokat, a különböző modellekkel és optimalizáló algoritmusokkal kapott eredményeket veszi számba. Az ötödik fejezet a legeredményesebb - paraméterekben takarékos - modell paramétereit elemzi az általánosított autoregresszív score modell (General Autoregressive Score - GAS) segítségével.

## 2. Kötvény matematika

A hozamgörbe és a hozzátartozó számítási módszerek mikéntje széles körben vizsgált. A jelen részben azok az alapkoncepciók mutatjuk be, amelyek elkerülhetetlenek az empirikus hozamgörbék illesztésének bemutatásához. További kiváló és részletes elemzést mutatnak be a hozamgörbékről a következő szerzők: Anderson et al. (1996), Bliss (1997b), Bliss (1997a), Csajbok (1998), Bolder és Stréliski (1999).

Egy kötvény adott aktuális ára megegyezik a jövőbeni pénzáramok jelenértékével:

$$P_t = \sum_{i=1}^m C_i \delta(\tau) \quad (1)$$

Ahol:

$P_t$ : kötvény aktuális piaci ára <sup>1</sup>

$i = 1, \dots, m$ : a papír hátralévő pénzáramai

$\delta(\tau)$  diszkont függvény, ahol  $\tau$  a lejáratok vektora (tipikusan évben)

$C_i$ :  $i$ -edik cash-flow értéke, ahol a  $C_m$  az utolsó cash-flow, amely a névértéket (és általában az aznapra eső kamatkifizetést) tartalmazza

A diszkont függvényt a következő összefüggéssel kapjuk meg:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{(1 + z(\tau))^\tau} \quad (2)$$

Ahol  $z(\tau)$  a zéró-kupon hozam, a  $\tau$  időpontban. A lejáratig számított hozam, a (*yield-to-maturity*, továbbiakban YTM) az egyszeri hozam, amely diszkontálja a jövőbeni hozamokat a jelenbeli értéknek megfelelően:

$$P = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 + y)^{\tau_i}} \quad (3)$$

$\tau_i$ : években számított lejárat a  $i$ -edik cash-flownak

A zéró-kupon kötvények olyan kuponfizetéssel nem rendelkező papírok, amelyeknél a zéró-kupon hozam és az YTM megegyezik. Ellenkező esetben, amikor az adott kötvény kuponfizetéssel rendelkezik, a két hozam nem egyenlő, de (nem-lineáris összefüggés segítségével) megfeleltethető egymásnak:

$$P = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 + z_i)^{\tau_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 + y)^{\tau_i}} \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Következőekben már nem írjuk ki, de mindig az aktuális időpontra gondolunk  $P = P_t$



A különbség, a hozamokban jelenik meg, míg a zéró-kupon hozamok csak a lejáratától függenek, addig az YTM, az adott  $T$  időpontban, egy átlagos kamatlábat határoz meg. Az egyenletnek nincsen analitikus megoldása, csak numerikus. A megfelelő összefüggés megteremtése, az egy napon meglévő papírok ugyan azon zéró-kupon hozamgörbéjével való leírásával, a tanulmány egyik központi problémája. Ez a későbbiekben bemutatásra kerülő, különböző optimalizáló algoritmusokkal oldható meg. A különböző módszerek eltérő stratégiával igyekeznek majd megoldani az egyenletet. Általában a diszkont függvény változtatásával közelítjük a zéró-kupon hozamgörbét a rendelkezésre álló árakhoz vagy YTM-hez. Az optimalizálásból előállított diszkont vagy zéró-kupon függvény segítségével előállítható a forward hozamgörbe is:

$$r_i = \frac{\delta(\tau_{i-1}) - \delta(\tau_i)}{\delta(\tau_i)} \quad (5)$$

A Nelson-Siegel modell (Nelson és Siegel, 1987), a forward hozamgörbéből kiindulva írja fel a zéró-kupon hozamgörbét (inverz gondolatmenetet alkalmazva) így bizonyos analitikus tulajdonságoknak megfelel a felírt hozamgörbe (pl.: pozitív forward hozamgörbe) A szakirodalom sokszor folytonos közelítéssel él a diszkont függvényre, így további előnyös tulajdonságokat biztosítva (folytonosság, nem-negativitás):

$$\delta(\tau) = e^{-\tau z(\tau)} \quad (6)$$

A közelítés segítségével folytonos forward- és zéró-kupon hozamgörbét is kapunk:

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{-\delta'(\tau)}{\delta(\tau)} \\ z(m) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau r(u) du \end{aligned} \quad (7)$$

Ezzel feltételezve, hogy  $\delta(0) = 1$ . A folytonos zéró-kupon hozamgörbét a következő összefüggéssel kapható meg (részletes levezetés lásd pl.: Stander (2005)):

$$P = \sum_{i=1}^m C_i e^{-\tau z(\tau)} \quad (8)$$

A hozamgörbe illesztésnél egy további fogalmat kell bevezetni: a Macaulay durációt, amelyet a kötvények pénzáramlásainak súlyozására alkalmaznak. A Macaulay duráció mindegyik papírnak a cash-flow jelenértékét és a cash-flow lejáratának (futamidő) szorzatát osztja el a papír lejáratú hozamából számított jelenértékével, majd minden egyes lejárat-hoz tartozó pénzáramra, a kiszámított értéket összeadja. A számítás feltételezi, hogy a

diszkontráta ismert:

$$MacD = \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{P_i}{P} = \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{C_i e^{-\tau_i y}}{P} \quad (9)$$

Az itt vázolt összefüggéseket egyes kötvények esetére lehet értelmezni. A következőkben az egyes napokon a meglévő összes kötvényre keressük azt az *egy* zéró-kupon hozam összefüggést, amely mellett a lehető legjobban visszakaphatóak a különböző árák vagy YTM-ek. Ennek elérésére a szakirodalomban több különböző modell létezik, amelyet a következőben tekintünk át.

### 3. Hozamgörbe modellek

Az elmúlt évtizedekben a hozamgörbe modellek látványos fejlődési szakaszokon mentek végbe. A kezdeti regressziós módszereket az 1960-2000-es évek között használták, amelyek a lejárat és az YTM között regressziós technikával igyekeztek összefüggést találni. Leghíresebb és máig áttételesen használt modell a Fama-Bliss modell (Fama és Bliss, 1987)<sup>2</sup>. Ezek a modellek túlzottan leegyszerűsítették az összefüggéseket, mert figyelmen kívül hagyták a kuponok hatását (*coupon effect*), valamint nem súlyozták kellőképpen a rövid lejáratú papírokat így asszimetria lép fel a különböző lejáratok között (Svensson, 1994). Továbbá a kezdeti módszerekkel előfordulhat, hogy az empirikusan illesztett diszkontfüggvény nem monoton csökkenő (Anderson et al., 1996). A hozamok modellezésének másik elterjedt formája az elméleti megalapozottságú affin modellek (pl.: Vasicek (1977), Cox et al. (1985), Dai és Singleton (2000)), amelyek legtöbbször arbitrázs mentes kritériumot használnak. (Hull és White (1990), Heath et al. (1992)) Az ezredforduló után ezeket a modelleket több kritika is érte elsősorban gyenge előrejelző képességük miatt (Duffee, 2002). Végül - a tanulmányban is felhasznált - a szakirodalomban „empirikus hozamgörbe modellek”-nek nevezett módszerek következnek, amelyek empirikus és elméleti megfontolásoknak is eleget tesznek. Ezen módszerek, különböző feltételeknek megfelelő függvényformulát illesztnek az adatokra. Két nagy csoportot szokás elkülöníteni, a Spline illesztéseket, amelyek csomópontokkal összeillesztett polinomok és a „takarékos exponenciális” függvényeket (*parsimonious polinoms*), amelyek a végtelenben és nullánál bizonyos feltételeknek megfelelnek. Az empirikus hozamgörbe modelleknek számos további tulajdonsága van függvényformulától függően, amelyeket a későbbiekben részletesen

---

<sup>2</sup>pl. Diebold és Li (2006) használja fel számítási inputként

áttekintünk. Az utóbbi módszereknek leginkább elterjedt változata a Nelson-Siegel és a Svensson modell, amelyeket számos központi banknál és adósság kezelő intézménynél is alkalmaznak.

A következőkben ezen empirikus hozamgörbe modelleknek különböző fajtáit mutatjuk be, ezeken belül is egy köbös-spline alapú módszert, amelyet az Államadósság Kezelő Központban (ÁKK) alkalmaznak, valamint a Nelson-Siegel-Svensson modelleszaládból három típust, melyeknek matematikai háttérét is áttekintjük. A következőkben az empirikus hozamgörbe modelleknél két dimenzió jelenik meg:

1. keresztmetszet - egy napon meglévő papírok illesztésére vonatkozó modell értékek
2. hosszmetset - az egymás után elvégzett illesztésekből származó modell értékek

A különböző modellekhez tartozó paramétereket egységesen a következőképpen írhatjuk fel: <sup>3</sup>

$$\boldsymbol{\gamma}_t = [\boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\lambda}_t] = [\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \dots, \beta_{n_\beta,t}, \lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}, \dots, \lambda_{n_\lambda,t}] \quad (10)$$

Az egyszerűség kedvéért a következőkben eltekintünk az idősoros jelöléstől ( $\boldsymbol{x}_t \rightarrow \boldsymbol{x}$ ) és a vektoros felírást a keresztmetszeti leíráshoz használjuk. (A 6. fejezetben visszatérünk az idősoros tulajdonság hangsúlyozására). Ezen jelölésrendszert felhasználva egy adott  $t$ -napon a diszkontfüggvény összefüggése:

$$\sum_{b=1}^B P_b = \sum_{b=1}^B \sum_{i=1}^m C_{b,i} \delta(\tau) = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\tau}) \quad (11)$$

Először a Spline alapú modelleszaládból az ÁKK által is használt Köbös Spline modellt mutatjuk be, majd a Nelson-Siegel-Svensson (NSS) modelleszaládot és a Hubig (2013) féle Legendre polinomot használó hozamgörbe modellt.

### 3.1. Köbös Spline módszer

A Spline modelleszalád a lejáratok függvényében több részre osztja fel a papírokat vagy a pénzáramokat és egy megadott szabályt alkalmazva polinomokat illeszt a különböző

---

<sup>3</sup>Spline illesztésnél csak  $\boldsymbol{\beta}$  paramétereket használunk, amelyek idősoros tulajdonságait nem vizsgáljuk. (A paraméterértékek a csomópontok változása miatt nem ad(hat)nak idősorosan értelmezhető adatsort. A vágási pontokat tartalmazó  $\boldsymbol{\Phi}$  vektor hasonló a  $\boldsymbol{\lambda}$ -hoz, azonban tulajdonságaiban eltérő, így külön kezeljük.) A Nelson-Siegel és Legendre polinomoknál a  $n_\lambda = 1$ , a Svenssonnál  $n_\lambda = 2$ . A  $n_\beta$  értéke modellettől függően változó.

intervallumokra. Fontos, hogy a polinomok „simán” (*smooth*) és pontosan illeszkedjenek egymáshoz a vágási pontokban, ennek köszönhetően a Spline módszertannak különböző fajtái léteznek.<sup>4</sup> A diszkont faktort bázisfüggvények állítják elő, majd a diszkontfaktorból numerikus átalakítással lehet megkapni a zéró-kupon és forward hozamgörbét. A köbös polinom függvényeket, szegmensekként illeszthetjük a diszkontfüggvényre. A köbös spline formulája biztosítja, hogy a diszkontfüggvényben ne történjenek törések és kellőképpen sima legyen (*continuity, smoothness*). A módszertan három lépésben végzi el az illesztést:

1. Vágási pontok meghatározása
2. Bázisfüggvények megadása
3. Diszkont függvény meghatározása, amelyből előállíthatóak a zéró-kupon és forward hozamgörbék

Először meghatározzuk az adott napon található összes pénzáramhoz tartozó lejáratú vektort, amelyet növekvő sorrendbe rendeztünk:  $\tau = (\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_m)$ : Ezek után a  $\tau$  vektor segítségével meghatározható a vágási pontok száma, amelyet konvenció alapján négynek veszünk. A vágási pontokat tartalmazó vektor ( $\Phi$ ) ekkor 4 elemű és a vágási pontok három hasonló nagyságú részre osztják a lejáratú struktúrát:<sup>5</sup>

$$\Phi = [0, \tau_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}, \tau_{\lfloor \frac{2m}{3} \rfloor}, \tau_m] \quad (12)$$

---

<sup>4</sup>A kritériumok között trade-off van, elsősorban ennek arányban különböznek egymástól a különböző Spline-típusok. A különbségek ellenére matematikailag bizonyíthatóan a lehető legsimábban illeszkedik (simaság definícióját lásd: Adams és Van Deventer (1994)) az adatokra a többi polinom közül (Deventer és Imai (1997)). Jelen tanulmányban egy köbös spline illesztés kerül bemutatásra, amelyet a magyar állampapírok illesztésénél alkalmaznak, így ezen modell benchmarkként is szolgál az eredmények ismeretetésénél. Más Spline modellel is elvégeztük az illesztéseket például McCulloch köbös spline (McCulloch, 1971), B-spline (Steeley (1991), Bolder és Stréliski (1999)) és a VRP (Waggoner (1997), Anderson és Sleath (2001)) modellekkel, azonban nem adtak jelentősen jobb/más eredményt. Részletesen lásd: Reguly (2014) vagy Fegyveres (2014)

<sup>5</sup>Amennyiben nem 4 vágási pontot határozunk meg, hanem  $\nu$ -t akkor akkor  $\Phi = [0, \tau_{\lfloor \frac{m}{\nu-1} \rfloor}, \tau_{\lfloor \frac{2m}{\nu-1} \rfloor}, \dots, \tau_{\lfloor \frac{(\nu-2)m}{\nu-1} \rfloor}, \tau_m]$  a vágási pontok helyei. Mindkét esetben az adott napon lévő lejáratokat olyan intervallumokba osztjuk, ahol közel azonos számmal vannak jelen pénzáramok. Nagyobb vágási pontszámnál figyelni kell, hogy „túlilleszthető” (overfitting) a hozamgörbe, vagyis szinte tökéletesen illeszkedik a megfigyelt adatokra, nincsen interpretálható közgazdasági jelentése. A megfelelő simasági feltétel teljesülésére ad egy széles körben elfogadott megoldást McCulloch (1971) módszere.

Második lépésként, a vágási helyek ismeretében, minden pénzáramlási időponthoz kiszámíthatók a bázisfüggvények ( $bf_x(\tau)$ ) értékei. A bázisfüggvények száma, 4 vágási pont esetében 6 darab ( $x = 1, \dots, 6$ ) és a következő alakban írhatók fel:

$$bf_{x=(1,2,3)}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau_i \leq \Phi_x \\ \frac{(\tau_i - \Phi_x)^3}{6(\Phi_{x+1} - \Phi_x)} & \Phi_x < \tau_i \leq \Phi_{x+1} \\ \frac{(\Phi_{x+1} - \Phi_x)^2}{6} + \frac{(\tau_i - \Phi_{x+1})(\tau_i - \Phi_x)}{2} & \tau_i > \Phi_{x+1} \end{cases} \quad (13)$$

$$bf_4(\tau) = \mathbf{1}_m$$

$$bf_5(\tau) = \tau_i$$

$$bf_6(\tau) = \tau_i^2$$

A diszkontfaktor, a bázisfüggvények lineáris kombinációjaként áll össze:

$$\delta(\tau, \beta) = \mathbf{bf} \beta' = \mathbf{1} + \mathbf{bf}^* \beta' \quad (14)$$

A diszkontfaktor értéke a 0 időpontban 1, így  $\beta_4 = 1$ . Ezzel a további feltétellel eggyel kevesebb paraméter értékeket kell kiszámítanunk, a diszkont előállításához. A hozamgörbe illesztését, egyszerű OLS-sel (legkisebb négyzetek módszerével) számolható, amely adott esetben súlyozással kiegészíthető.

### 3.2. Nelson-Siegel-Svensson model család (NSS)

A Nelson-Siegel-Svensson (NSS) model család széles körben közkedvelt, elméleti és gyakorlati megfontolások egyaránt. A Nelson és Siegel (1987) által megfogalmazott függvényformulának - és az erre alapuló polinomoknak - számos olyan tulajdonsága van, amelyek empirikusan és közgazdaságilag is jól interpretálható eredményeket adnak. Ilyen a paraméter értékek jelentése:

- $\beta_0$  a hosszú távú kamatláb amely a hozamgörbe szintjét jelenti ( $\beta_0 > 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = \beta_0$ )
- $\beta_1$  a hozamgörbe meredekségét adja meg, a rövid lejáratú hozamok megkaphatóak a  $\beta_0 + \beta_1$  összefüggésből ( $\beta_0 + \beta_1 > 0^6, \lim_{\tau \rightarrow 0} z(\tau) = \beta_0 + \beta_1$ )

---

<sup>6</sup>Tekintettel a pénzügyi lazítások (QE) hatására az elmúlt időben negatív kamatlábak is előfordultak. Ezen feltételt adott esetben lazítani lehet, a feltétel egyik előnye az optimalizálási tér szűkítése.

- $\beta_2$  a hozamgörbe púposságát adja amelyet a piaci várakozások egy proxyjaként szokás használni
- $\lambda$  a belső paraméter a púposság maximumának a helyét mutatja meg a lejárat struktúrában

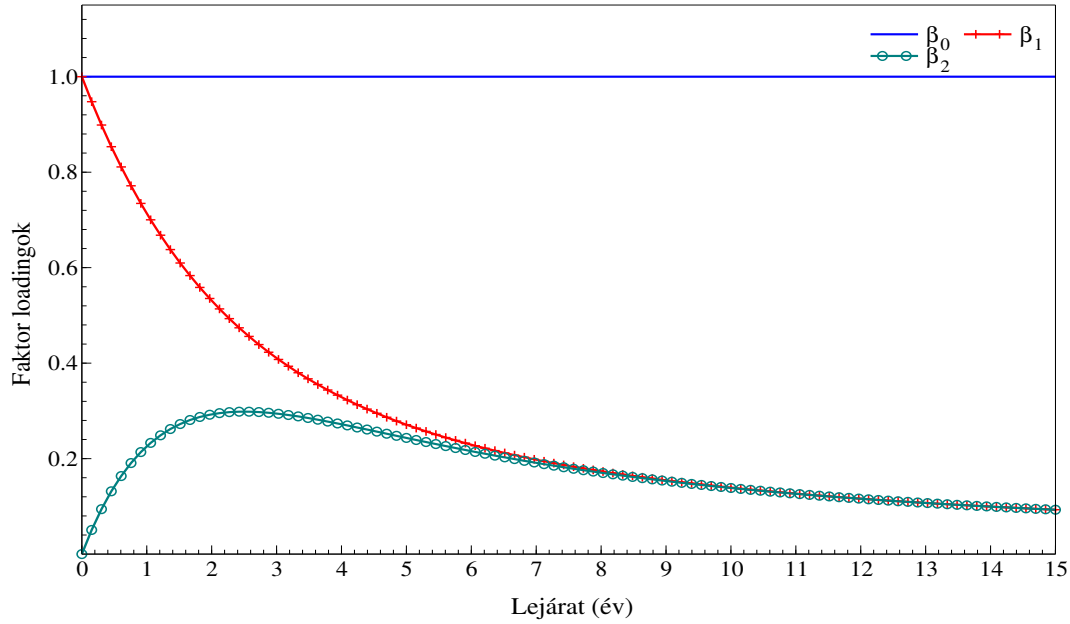
Minden napra elvégezve az illesztést - megfelelő módszerrel és feltételek mellett - idősorosan jól értelmezhető paramétereket kapunk (A kritériumokat részletesebben a 4. fejezetben). A NSS modellcsaládnál a forward hozamgörbét írták fel először, majd ebből számolták ki a zéró-kupon hozamgörbét és diszkontfüggvényt. Ennek pozitív hozadéka, hogy a spline módszertannal ellentétben a forward görbe minden esetben „jól” viselkedik.

Jelen tanulmányban három polinomot vizsgálunk meg az NSS családból: a klasszikus Nelson-Siegel alapmodellt (Nelson és Siegel, 1987), a Svensson modellt (Svensson, 1994) és a négy faktossal rendelkező Legendre polinom alapú modellt (Hubig, 2013). Az említett polinomok mindegyikénél a paramétereknek két típusa van, a koefficiensekként értelmezhető  $\beta$  paraméterek és a modellt nem-lineárisává tévő belső paraméter  $\lambda$ .

### 3.2.1. Nelson-Siegel modell (NS)

Nelson és Siegel 1987-ben publikálta tanulmányát. Az általuk bemutatott polinomot többször továbbfejlesztették, mindemellett a mai napig széles körben használják. Az eredeti polinom forward hozamgörbéje a következő alakkal rendelkezik:

$$r(\tau, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 \left( e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left( \frac{\tau_i}{\lambda_1} \right) e^{-\frac{\tau_i}{\lambda_1}} \quad (15)$$



1. ábra. Nelson-Siegel modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében

A folytonos forward görbe és a zéró kupon görbe közötti összefüggést felhasználva (7. egyenlet) megkapjuk a zéró-kupon hozamgörbét:

$$y_t = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) \quad (16)$$

A 1. ábra, a Nelson-Siegel zéró-kupon hozamokhoz tartozó  $\beta$  értéket mutatja be (sokszor faktoroknak nevezett) a lejáratok függvényében, rögzített belső paraméter érték mellett. ( $\lambda_1 = 0,7173$ , amely 2,5 évnél maximalizálja a púposságot, ezt a módszert Diebold és Li (2006) használta először.)

A Nelson-Siegel modell több esetben is rugalmatlannak bizonyul a hozamgörbe leírására. A túlzottan nagy pontatlanság miatt több továbbfejlesztett változata jelent meg az illeszkedés javításának érdekében.<sup>7</sup> A következőben az egyik legelterjedtebb változatot, a Svensson (1994) által kibővített formulát tekintjük át.

### 3.2.2. Svensson modell

Svensson (1994) kibővítette a Nelson-Siegel formulát egy második púppal - újabb koeficiens  $\beta_3$  és belső paraméter  $\lambda_2$  segítségével - így javítva az illeszkedést. A Svensson modell jóval rugalmasabb, azonban ennek ára a nehezebb optimalizálási feladat és az esetleges

<sup>7</sup>Jó összefoglalót ad Pooter (2007) a különböző típusokról.

multikollinearitás megjelenése ( $\beta_2 \approx \beta_3$ ,  $\lambda_1 \approx \lambda_2$ ), amely a túlillesztés egyik jele is lehet.<sup>8</sup>

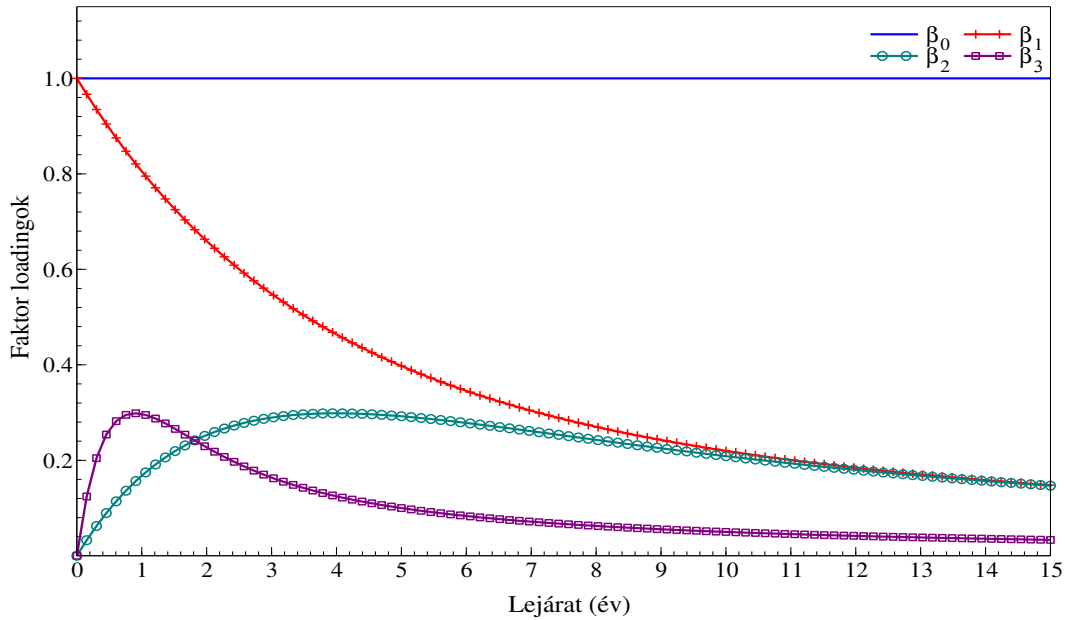
A Svensson féle négy faktoros modell a következő forward hozamgörbével rendelkezik:

$$r(\tau, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 \left( e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left( \frac{\tau}{\lambda_1} \right) e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}} + \beta_3 \left( \frac{\tau}{\lambda_2} \right) e^{-\frac{\tau}{\lambda_2}} \quad (17)$$

Hasonlóan a forward görbét átalakítva zéró-kupon hozamgörbévé:

$$y_t = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}}}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_2}}}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_2}} \right) \quad (18)$$

A Svensson modell egy további púppal rendelkezik amelynek irányát a  $\beta_3$  értéke és helyét a  $\lambda_2$  határozza meg. A faktorok tulajdonságait fix belső paraméterek mellett ( $\lambda_1 = 0.45$ ,  $\lambda_2 = 2$ ) a 2.ábra mutatja be.



2. ábra. Svensson modell loadingjainak értékei a lejárat függvényében

### 3.2.3. Legendre polinom

Hubig (2013) a német állampapírokat vizsgálva használta fel a Legendre polinomokból álló hozamgörbét, amelyet a Nelson-Siegel általánosított alakjára felírt Laguerre polinom alapú görbe (Hurn et al. (2005)) „versenytársaként” alkotott meg. Eredményeik alapján a hozamokra optimalizálva jobb eredményt kaptak mint, a Hurn et al. (2005) által felhasznált Laguerre polinomokkal.<sup>9</sup> A zéró-kupon hozamgörbét a következő összefüggéssel írták

<sup>8</sup>Erre dolgozott ki megoldási javaslatot Pooter (2007): az utolsó tag lejáratainak a kétszeresét vette, amely a szakirodalomban az "Adjusted-Svensson" néven terjedt el.

<sup>9</sup>A Nelson-Siegel polinom egy harmadfokú Laguerre polinom amit az említett szerzők általánosítottak



fel:

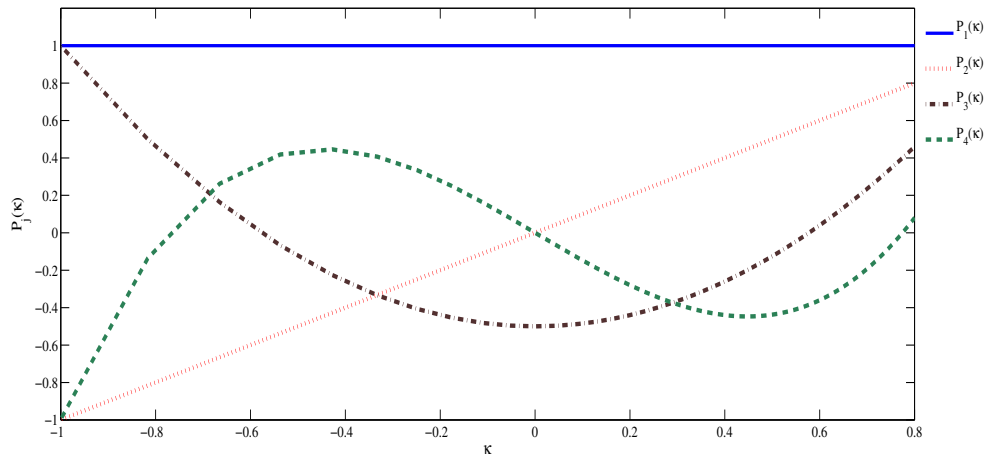
$$z(\tau, \gamma) = \sum_{j=0}^J \beta_j \sqrt{\lambda_1(2j+1)} P_j(\kappa) \quad \kappa = \frac{\lambda_1 \tau_i - 1}{\lambda_1 \tau_i + 1} \quad (19)$$

Ahol:

$P_j(\kappa)$ : a  $j$ -ed fokú Legendre polinom, (Az illesztés során  $j = 4$  feltételezünk)

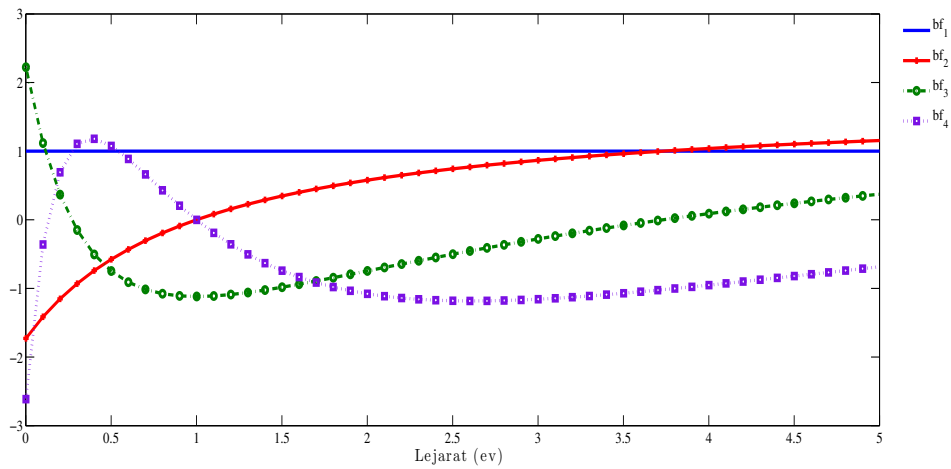
$\gamma$ : koefficienseket tartalmazó vektor  $(\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_j, \lambda_1)$

A forward hozamgörbe a 19. függvény deriválásával kapható meg:  $f(\tau, \gamma) = z(\tau, \gamma) + \lambda_1 \frac{\partial z(\tau, \gamma)}{\partial \lambda_1}$ , amelynek elvégzése nem triviális, számítása során numerikus közelítést alkalmazhatunk. A Legendre polinomok  $P_j(\kappa)$  viselkedését, a  $\kappa$  függvényében a következő ábra mutatja be:



3. ábra. Legendre polinomok

A bázisfüggvények alakját, feltéve, hogy  $\beta = 1, \lambda_1 = 1$ , a következő ábrán látható:<sup>10</sup>



4. ábra. Legendre ortogonális bázisfüggvények

<sup>10</sup>Hubig (2013, 77-78 o.) bebizonyítja, hogy az ilyen módon előállított Legendre polinomokból előállított bázisfüggvények hasonló matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a Nelson-Siegel-Svensson polinomok (3.2)

Hasonlóan a Nelson-Siegelhez (és a Laguerre polinomokhoz) ez a módszer is egy  $\lambda$ -t használ fel, így a függvény rugalmasabb, mint az említett Nelson-Siegel, a magasabb fokszám miatt, de kevésbé bonyolult optimalizálási térrel rendelkezik, mint a Svensson.

A következőkben az implementálás során felhasznált optimalizálási módszertan kerül áttekintésre.

## 4. Empirikus hozamgörbék illesztése

Először az „alap” optimalizálási problémát járjuk körül, majd a Spline és NSS modellek optimalizálási célfüggvényeit. Ezek után az optimalizálási algoritmusokat mutatjuk be röviden, amelyek a célfüggvényeket különböző módszerrel minimalizálják. Ezeknek az eltérő stratégiáknak az alapszintű megismerése lényeges lehet a hozamgörbe illesztés eredményének megértésében, hiszen az optimalizálási térben való mozgás tulajdonságai hozzájárul a hozamgörbe robosztus becsléséhez. Végül az optimalizálás teljesítményét mérő számokat ismertetjük, amelyek segítenek eldönteni, hogy mely optimalizálási algoritmusok és modellek teljesítenek jól.

### 4.1. Optimalizálási alapfeladat

Optimalizálási feladatnak tekinthetünk minden olyan problémát, amelyben két értéket közelíteni szeretnénk egymáshoz, és legalább az egyik érték (függvény) változó. A közelítési módszereknek számos metrikája létezik, viszont a hozamgörbe illesztésénél konszenzus uralkodik a négyzetes eltéréseket minimalizálásáról. (Bliss, 1997b) A minimalizálási feladatot, a következőképpen lehet felírni a súlyozott árakhoz:

$$\min_{\gamma} \varepsilon(\gamma) = \min_{\gamma} \sum_{b=1}^B \left[ \left( P_b - \hat{P}_b(\tau, \gamma) \right)^2 \omega_b \right] \quad (20)$$

Ahol:

$\varepsilon$ : minimalizálandó érték, amely függ a paraméterektől ( $\gamma$ )

$P_b$ : b-edik kötvény piaci átlagos ára

$P_b(\tau, \gamma)$ : b-edik kötvény számított átlagos ára, amely a 8. egyenlet segítségével számolható

$\omega_b$ : a b-edik kötvény súlyozása

A képletekben átlag árak szerepelnek, míg az adatoknál a legjobb ajánlati és kért árakat állnak rendelkezésre. Bliss (1997b) rámutat, hogy az átlag számítása információ veszteséssel jár és helyette a következő megoldást javasolta a hibaszámításnál:

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} P^{ask} + \text{felhalmozott kamat} - \hat{P} & \text{ha } \hat{P}_b > P^{ask} + \text{felhalmozott kamat} \\ P_b^{bid} - \hat{P}_b & \text{ha } \hat{P} < P^{bid} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (21)$$

Az implementáció során ehhez az átlagos értékhez optimalizálunk, azonban az illesztések jóságánál a Bliss féle módszer alapján számoljuk a hibákat. Ennek következtében azok a modellek és módszerek, amelyek képesek a bid-ask spread folyosóban megmaradni, hasonlóan jó illeszkedéssel bírnak.

Az optimalizáció másik fontos tényezője a súlyozás ( $\omega_b$ ). Az árak súlyozása a lejárat szerkezet függvényében széles körben elterjedt, jelen tanulmányban a két legelterjedtebbet használjuk fel, amelyeket az implementáció alkalmazunk:

1. Spline-módszertannál: Bid-Ask spread alapú súlyozás. Ez a módszer likviditási tényezőre épít, a kevésbé likvid papírok kisebb súllyal szerepelnek (tipikusan a hosszú lejáratú oldal):

$$\omega_b = \frac{1}{(P_b^{bid} - P_b^{ask})^2} \quad (22)$$

2. NSS modelleknél: Macaulay duráció (9. egyenlet) inverzét felhasználó súlyozás Bliss (1997b):

$$\omega_b = \frac{1}{MacD_b} \bigg/ \sum_{b=1}^B \frac{1}{MacD_i} \quad (23)$$

A  $b$ -edik kötvény súlya megegyezik a  $b$ -edik kötvény Macaulay durációjának arányával a teljes portfólió durációjához mérten. Ezzel az adott papír súlya kapható meg az aznap-i kötvény-portfólióban. Minél kisebb egy adott kötvénynek a durációja annál nagyobb súllyal vesszük figyelembe.

## 4.2. Spline illesztés

A spline illesztések során két paraméter csoportot kell meghatározni: a vágási pontok számát és helyét  $\Phi$ , valamint a bázisfüggvényekhez tartozó koefficienseket  $\beta$ . A vágási

pontok száma konvenció alapján a 3.1 fejezetben leírtak megfelelően 4 darab. A koefficiens meghatározása sima OLS-sel történik, ahol az árakat a 22. egyenlet alapján Bid-Ask spreaddel súlyozzuk, így a konkrét optimalizálási feladat:

$$\min \varepsilon(\gamma) = \left( \mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}}(\tau, \gamma) \right)' \text{diag}(\boldsymbol{\omega}) \left( \mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}}(\tau, \gamma) \right) \quad (24)$$

ahol, a  $\text{diag}(\boldsymbol{\omega})$ ,  $B \times B$  nagyságú mátrix átlóiban elhelyezett súlyvektor értékei található.

### 4.3. Általános feltételek a NSS modelltípusokhoz

Az NSS modelltípusoknál bemuttuk a különböző tulajdonságokat, amelyekkel az NSS modellcsaládba tartozó polinomok rendelkeznek. Ezek a tulajdonságok az optimalizálási eljárásnál korlátként jelennek meg. A megkötések az optimalizálási eljárástól függően vagy büntető értékként, vagy tiltó megkötésként értelmezendők. Ezek a megkötések a következők:

$$c_1(\beta_0) = \beta_0 > 0 - \text{a hosszú távú kamatláb nem lehet negatív}$$

$$c_2(\beta_0, \beta_1) = (\beta_0 + \beta_1) \leq 0 - \text{a rövid távú kamatláb nem lehet negatív}^{11}$$

$$c_3(\lambda_1) = \lambda_1 > 0 - \text{az első csúcs helye nem lehet negatív lejártnál}$$

$$c_4(\lambda_2) = \lambda_2 > 0 - \text{a második csúcs helye nem lehet negatív helyen}$$

További megkötések, amelyek segítenek a gyorsabb optimum megtalálásához, de szigorúan véve nem szükséges megkötések:

$$c_5(\lambda_1) = \lambda_1 \leq 30$$

$$c_6(\lambda_2) = \lambda_2 \leq 15$$

$$c_7(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 - \lambda_2| > 0$$

Saját tapasztalatunk alapján, amennyiben Legendre polinomot használunk, akkor érdemes egy további specifikus megkötés a harmadik és negyedik koefficiensre:

$$c_8(\beta_3, \beta_4) - 30 < \beta_3, \beta_4 < 30, \text{ ha Legendre polinom alapú modell}$$

Amennyiben az algoritmusnál nem lehetséges korlátokat megadni,<sup>12</sup> akkor bevezethető a büntető függvény (*penalty function*), amely a következő alakot ölti:

$$\Gamma_k(\zeta) = \begin{cases} 0 & , c_k(\zeta) \geq 0 \\ \Pi & , c_k(\zeta) < 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, 8 \quad (25)$$

<sup>11</sup>Ez elmúlt időben, a negatív hozamok megjelenésével, ezt a feltételt relaxálni kell/lehet.

<sup>12</sup>Ilyen a DS+NM és PSO-H

ahol pl.:  $\Pi = 10^6$  Ekkor a kiegészített optimalizálási feladat a következőképpen módosul:

$$\min \left[ \varepsilon(\gamma) + \sum_{k=1}^J \Gamma_k(\zeta) \right] \quad (26)$$

A következőkben az NSS modelleket két részre osztható attól függően, hogy a belső paraméter ( $\lambda$ ) az optimalizálásban részt vesznek, vagy fixálásra kerülnek. Mindkét módszertannak megvan az előnye és hátránya, amely mind a mai napig vitákra ad okot. Először a fix belső paraméterrel rendelkező módszert tekintjük át.

#### 4.3.1. Diebold-Li módszertan – fix belső paraméter

A szakirodalomban nem forrott ki egyértelmű preferencia az NSS modellekben megtalálható belső paraméterrel kapcsolatos módszertannal szemben. Amennyiben fixáljuk a belső paraméterek ( $\lambda \notin \gamma$ ), akkor idősorosan jobban értelmezhetőek a paraméterek, ellenben rosszabb az illeszkedés. Továbbá púposság helye, amely inflációs várakozások távolságát jelenítik meg, nem változik. Ez a megkötés a magyar adatokra a kétezres évek elejének ismeretében erős megszorítás.<sup>13</sup> A következőkben hasonlóan a spline módszerhez viszonyítási pontként használjuk fel a fix belső paraméterrel rendelkező illesztéseket, amelyeket a későbbiekben bemutatandó BFGS algoritmussal végtük el.<sup>14</sup> A módszer egyik alkalmazása amelyet Diebold és Li (2006) használ, hogy a  $\lambda$  értékét úgy választja meg, hogy a  $\beta_2$  faktor az adott időszakra az átlagos lejáratú értéknél legyen maximális. Ez a kiválasztás önkényes és bár a Nelson-Siegel polinomnál értelmezhető (hiszen így nő a rugalmassága az illesztésnek) a Svensson és Legendre polinomnál ilyen kitüntetett állapotnak nicsen gyakorlati háttére. További hátránya a fixált  $\lambda$  értéknek, a multikollinearitás megjelenése (Annaert et al. (2013)). Az implementáció során a különböző polinomok Genetikus Algoritmussal illesztett  $\lambda$  paraméter értékeinek idősorából számított medián értékeket használjuk fel, fixált  $\lambda$  értékeknek. (Az értékeket az eredményeket bemutató táblázatban feltüntettük.)

---

<sup>13</sup>Például Reguly (2015) kimutatja, hogy az inflációs várakozások ( $R_{k,t}^{exp} = \beta_{2,t} \times \lambda_t$ ), változó  $\lambda_t$  mellett szignifikánsnak jelenik meg a magyar pénzkeresleti és inflációs függvényében, míg fixált értékek mellett inszignifikáns.

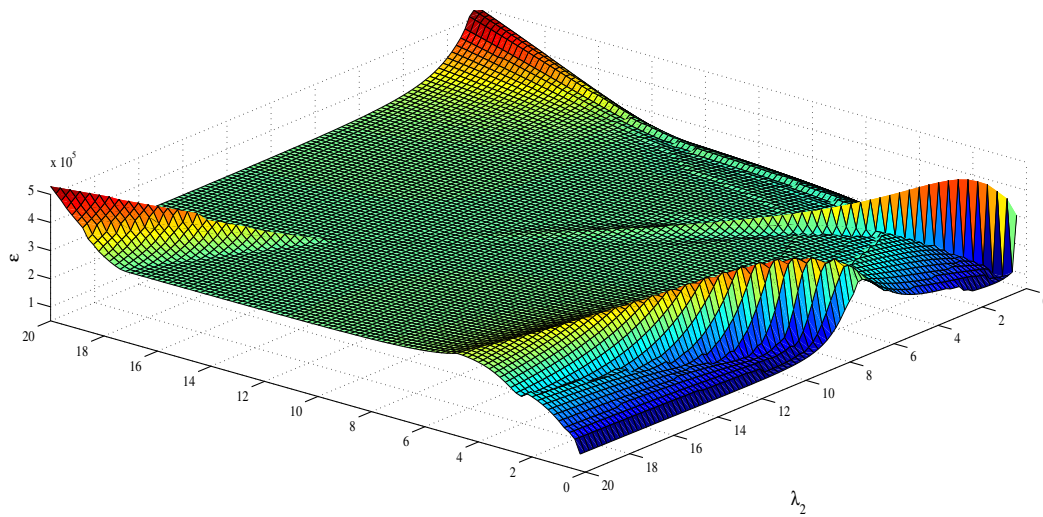
<sup>14</sup>Az eredmények rámutatnak, hogy a BFGS módszer esetében amennyiben a belső paraméter is változó akkor nem ad jó eredményt, ellenben fixált  $\lambda$  mellett az optimalizálási tér már jól viselkedő, így megfelelő eredményt kapunk.

### 4.3.2. Változó belső paraméterrel rendelkező NSS modellek

A dinamikus NSS modelltípusok esetében a  $\beta$  és a  $\lambda$  egyaránt változókként jelennek meg az optimalizálási térben. A megoldandó feladat: nem-lineáris, több lokális minimumhellyel rendelkező nem-konkáv optimalizálási tér. A magyar adatokon robosztus eredmények eléréséhez három lépést hajtottunk végre:

- Az optimális változókhoz közeli kezdőértékek megadása
- Megfelelő optimalizáló algoritmus kiválasztása
- Különböző teljesítmény/robosztussági mutatók alapján az illesztés értékelése

A következő ábra a Svensson függvénnyel kapott hibák értékeinek változását mutatja be különböző  $\lambda$  értékek esetére, optimalizált  $\beta$ -k mellett:



5. ábra. Svensson függvény optimalizálási tere különböző  $\lambda$ -ra

Az ábra rámutat arra, hogy az optimalizálási tér nem „jól viselkedő”, valóban több lokális minimumhellyel rendelkezik és nem-konkáv. Ezeknek a tulajdonságoknak következménye, hogy a megfelelő eredmények függenek:

- a kezdeti értékek megválasztásától
- a felhasznált algoritmus típusától és az optimalizálási térben való mozgástól
- az algoritmusok futási idejétől és megtalált minimumhelytől
- a megvizsgált tér kiterjedésétől

### 4.3.3. Kezdőértékek meghatározása

Eltérő kezdeti értékek eltérő eredményhez vezethetnek. Az itt bemutatott kezdetiérték meghatározás igyekszik hozzájárulni a becsült koefficiensek idősoros értelmezhetőségéhez. Bliss et al. (2011), a Diebold és Li (2006) módszerrel határozza meg a kezdeti értékeket, Wernen és Ferenczi (2006) kétrészes optimalizáción keresztül, Manousopoulos és Michalopoulos (2009) ad hoc kezdeti értékeket határoz meg. Reguly (2014) rámutat, hogy ezen kezdeti értékek meghatározása nem segíti elő az idősoros értelmezhetőséget, a katasztrófikus törések (*catastrophic jumps* - Cairns és Pritchard (2001), Virmani (2012)) továbbra is fennállnak.

A számítások során egy speciális tanuló algoritmust mutatunk be, amely jobban képes elkerülni a katasztrófális törések bekövetkezését. Az algoritmus a következő lépéseken megy keresztül:

1. Első 10 megfigyelési nap kezdeti értékének meghatározása Diebold és Li (2006) megfeleltetés alapján:
  - (a) A harmadik faktor loadingját maximalizálva az adott nap átlagos lejáratí időre meghatározzuk a  $\lambda$ -t
  - (b) A Spline illesztéssel megkapott zéró-kupon hozamokat felhasználjuk a koefficiensek kezdő értékének meghatározásához:  $\beta_0 = 10$  éves,  $\beta_1 = 10$  éves - 3 hónapos hozam,  $\beta_2(= \beta_3) = 2 \times 2$  éves - 10 éves - 3 hónapos hozam
  - (c) Svensson modell esetében ez utóbbi érték gyorsan meg fog változni a korlátok miatt ( $|\lambda_1 - \lambda_2| > 0$ )
  - (d) Svensson esetében a harmadik és negyedik faktor maximalizálása, a  $\lambda$  segítségével az adott nap lejáratának alsó és felső kvartiliséhez
2. Tanuló algoritmus AR(9)+Outlier szűrő segítségével elindítása a fentebbi módon előállított 10 megfigyelési napot tartalmazó tanulópopuláción:
  - (a) Az 1.-ban lévő módszerrel és genetikus algoritmus segítségével optimalizált értékeket (4.4.3. fejezet) tanuló populációnak vesszük
  - (b) A tizenegyedik időszaktól kezdődően a t-edik időpontban a kezdőértéket a következőképpen kapjuk meg:

- (c) Megvizsgáljuk az elmúlt 9 időszak  $(t-9, t-8, \dots, t-1)$ ,  $\gamma$  paraméter értékeit, ha azok közül találunk olyat, ahol 300 bázispontonál nagyobb törés van az átlaghoz képest, akkor azt outliernek tekintjük és kizárjuk a megfigyelésből
- (d) A korábbi 9 periódus nem outlier értékeiből átlagot számítunk, és ezt vesszük kezdőértéknek
- (e) Amennyiben az előző 9 periódusban több mint 7 outlier van, akkor megemeljük +200 bázisponttal a tűréshatárt
- (f) Amennyiben az elmúlt 9 periódusban kevesebb mint 5 outlier van, és a vágási pont nagyobb mint 300, akkor fokozatosan visszacsökkentjük 200 bázisponttal a tűréshatárt egészen 300 bázispontig

Az így elindított optimalizáció gyorsabban találja meg az optimum helyet és bár bizonyos optimalizációs eljárásoknál (pl: Levenberg-Marquardt) előfordul, hogy egy lokális optimumban megragad - ennek következtében nem a legjobb hiba mutatószámokkal rendelkezik - idősorosan jobb eredményeket ad, mint a korábban említett eljárással meghatározott kezdőérték. A következő részben az optimalizáló algoritmusokat tekintjük át. A kezdeti értéktől való indulás és optimalizációs tér feltérképezése nagyban különbözhetnek az egyes módszereknél. Jobb megértéssel válasz kapható arra, hogy bizonyos módszerek miért rendelkeznek meg egy szub-optimális megoldásnál és mások miért jutnak jobb eredményhez.

#### 4.4. Optimalizáló algoritmusok

Robosztus eredmények eléréséhez több különböző optimalizáló algoritmust használunk fel, majd a különböző eredményeket összehasonlítjuk. A következőkben bemutatott algoritmusok háromszor három nagy csoportra bonthatóak:

- Optimalizáció típusa: Globális optimalizációs algoritmusok, direkt kereső (*direct-search*) algoritmusok valamint a gradiens alapú algoritmusok. Mind három csoportnak több altípusa létezik.
- Keresés iránya: Sima függvényérték alapú algoritmusok (*single point*) - egy pályát követnek bizonyos szabály szerint az optimalizálási térben - vagy több függvényérték alapú algoritmus (*multi-point*)- populációt használó algoritmus, amely több pályát vizsgálnak meg adott szabályszerűségek mentén, majd legjobbat választja ki.



- Keresés módszere: A több függvényértékkel rendelkező algoritmusok mozgásuk alapján lehetnek determinisztikusak vagy sztochasztikusak (*deterministic or randomized*). A determinisztikus algoritmusok szabályszerűen viselkednek, random tényező nélkül, míg a sztochasztikus algoritmusokban randomitás szerepel.

Az tanulmány által felhasznált optimalizáló eljárások a következők:

1. táblázat. Felhasznált algoritmusok osztályozása

| Algoritmus Neve                  | Típusa                 | Keresés iránya     | Keresés módszere |
|----------------------------------|------------------------|--------------------|------------------|
| Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno | Gradiens alapú         | Sima függvényérték | Determinisztikus |
| Levenberg-Marquardt              | Gradiens alapú         | Sima függvényérték | Determinisztikus |
| DS+Nelder-Mead                   | Közvetlen keresés      | Több függvényérték | Determinisztikus |
| Simulated Annealing              | Globális optimalizáció | Sima függvényérték | Sztochasztikus   |
| Real-coded Genetikus             | Globális optimalizáció | Több függvényérték | Sztochasztikus   |
| Particle Swarm                   | Globális optimalizáció | Több függvényérték | Sztochasztikus   |

Forrás: Összeállítás Bliss et al. (2011), Gabrel et al. (2014) alapján

A további robusztus optimalizálási módszerekről jó összefoglalót ad Gabrel et al. (2014) cikke. Az algoritmusok kiválasztásánál több szempont alapján kellett mérlegelni. Alapvető célként a legnagyobb területeket átfogó algoritmusok, a hozamgörbe becslési szakirodalomban legelterjedtebb és leghatásosabb módszerek közül próbáltuk kiválasztani a legeredményesebbeket és ezeket összehasonlítani. Léteznek további, a bemutatottaktól eltérő algoritmusok, ezekből sorolunk fel néhányat a teljesség igénye nélkül: rács kereső módszer (*grid-search*) a  $\lambda$  paraméter(ek)re majd második körben a  $\beta$ -ra, (Annaert et al. (2013), Virmani (2012)); Sparse grid és HCP algoritmus (Wernen és Ferenczi (2006)); Differential Evolution algoritmus (Gilli et al. (2010)); Powell féle taxisofőr algoritmus (Bliss et al. (2011), Manousopoulos és Michalopoulos (2009)); Generalized Reduced Gradient Algorithm; Gauss-Newton algoritmus (Csajbok (1998)); Newton-Raphson módszer (Schich (1997)); Fuzzy regressziós módszer (de Andrés Sánchez és Terceno Gomez (2004)); Linearizált hibataggal ellátott „naiv” algoritmus (Gauthier és Simonato (2012)); Elsőrendű Taylor sor becslés alapú (Hladíková és Radová (2012)). A következőkben röviden, a teljesség igénye nélkül, bemutatjuk az optimalizáló algoritmusok vázát attól függően, típusuk alapján.

#### 4.4.1. Gradiens alapú algoritmusok

A gradiens alapú algoritmusok kiszámítják (vagy megbecsülik) a célfüggvény gradiensét, minden egyes paraméterre, minden egyes iterációban. Ez meglehetősen lassúvá és számításigényessé teszi a módszert. Továbbá ki kell számítani (vagy megbecsülni) a Hesse mátrixot. Az illesztés során két típusú, gradiens alapú algoritmust mutatunk be - amelyeket széles körben használnak - a Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)-t, az és a Levenberg-Marquard féle nemlineáris OLS módszert. A gradiens alapú módszerek előnye, hogy elméleti háttérük jól kidolgozott és amennyiben a keresési térről előzetes ismerettel rendelkezünk, akkor az egyik legjobb eredménnyel rendelkeznek. A hozamgörbe illesztésnél, változó belső paraméter mellett a keresési térről nincsen előzetes információ és a változó belső paraméternek köszönhetően, ahogyan az 5. ábrán is látható, az optimalizálási tér több helyi minimummal rendelkezik.

**Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)** A Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno algoritmus, kvázi-Newton algoritmus, amely iteratív lokális kvadratikus módon becslő függvényt használ. Becslést használ a Hesse mátrixra, és nem számolja ki egyenként az értékeket, így nagymértékben csökkenti a számolás bonyolultságát. A Newton módszer összes típusának tulajdonsága, hogy elindulnak egy kezdőérték vektortól ( $\gamma_0$ ) és egy kvadratikus polinom ( $J^0(\gamma)$ ) másodrendű Taylor sorának segítségével közelít a  $J(\gamma)$  függvényt a  $\gamma_0$  helyen:

$$J(\gamma) \approx J(\gamma_0) + \nabla J(\gamma_0)'(\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_0)' \nabla^2 J(\gamma_0)(\gamma - \gamma_0) \quad (27)$$

ahol  $\nabla$  a gradiens operátor ( $\partial J / \partial \gamma$ ) vektor és  $H = \nabla^2 J(\gamma_0)$  Hesse mátrixa a  $J(\gamma_0)$ -nak, úgy hogy a szimmetrikus mátrix tartalmazza a másodrendű deriváltjait a  $J$ -nek:  $H = \frac{\partial^2 J}{\partial \gamma \partial \gamma'(\gamma_0)}$ . Ezekből a kvázi-newton módszer, a keresés irányát a következőképpen definiálja:  $d_j = -H_j^{-1} + \nabla J(\gamma_0)^T$ . A lépés nagysága a minimalizáció során változik, mértéke legyen  $s_j$  ahol az irányt meghatározó  $H_j$  pozitív definit mátrix. Ekkor  $H_j$ -t úgy módosítja, hogy a  $d_j$  megfelelő becslést adjon a Newton irányra. Algoritmus lépései:

1. Paraméterezés: Kezdőértékek megadása  $\gamma_0$ ; kezdő Hesse mátrix megadása (általában az identitás mátrix) valamint a megállás feltételei – hibahatár ( $\varepsilon$ ), hibafüggvény értéke ( $\Theta$ )
2. Kiszámolása a  $H_j d_j = -\nabla J(\gamma_j)$  feladatnak

3. Kiszámolása az  $s_j = \operatorname{argmin} J(\gamma_j + s_j d_j)$
4. Új paraméterértékek meghatározása:  $\gamma_{j+1} = \gamma_j + s_j + j d_j$
5. Frissíteni a Hesse-t ( $H_j$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{j+1} &= \gamma_{j+1} - \gamma_j \\ h_{j+1} &= \nabla J(\gamma_{j+1}) - \nabla J(\gamma_j) \\ H_{j+1} &= H_j - \frac{g_j g_j'}{g_j' h_j} - \frac{H_j h_j h_j' H_j}{s_j' H_j h_j} \end{aligned}$$

6. Ha  $|\gamma_k - \gamma_{k+1}| < \epsilon$  akkor következő lépés, máskülönben következő iteráció
7. Ha  $\varepsilon < 10^{-8}$  algoritmus megállítása, máskülönben következő lépés
8. Ha  $|\eta(\gamma_k)| < \Theta(|\eta(\gamma_k)|)$  algoritmus megállítása, máskülönben következő iteráció

A szakirodalom széles körben alkalmazza a BFGS módszert, annak ellenére, hogy ismeret tulajdonsága, hogy több lokális minimumhely mellett nem találja meg biztosan a globális optimumot (lásd: Ioannides (2003), Fabozzi et al. (2005))

**Levenberg-Marquardt (LM) módszer** A Levenberg-Marquardt módszer a következő lineáris egyenletrendszer megoldásának irányában indul el:

$$d_j(J(\gamma_j)^T J(\gamma_j) + \varphi_j I) = -J(\gamma_j)^T F(\gamma_j) \quad (28)$$

ahol  $\varphi_j$  skalár határozza meg a nagyságát és az irányát a változásnak  $d_j$ -nek. Amikor  $\varphi_j = 0$  akkor a  $d_j$  megegyezik a Gauss-Newton módszerrel. Ahogyan  $\varphi_j$  végtelen felé halad,  $d_j$  értéke közelít a nulla felé, egyre kisebbeket lép a legmeredekebb irányba. Ez a módszer nem követeli meg a Hesse kiszámítását, csak a gradiensekét, így viszonylag gyors módszernek számít, azonban csak egy adott irányban halad így hasonlóan a BFGS-hez könnyen megrekedhet lokális minimumhelyeken. A spanyol nemzeti bank használta ezt az eljárást 1995-2005 között. (Ramos (1995) – hivatkozva: Gimeno és Nave (2009))

#### 4.4.2. Direct-Search (DS)

A közvetlen kereső algoritmusok számára nem szükséges kiszámolni a célfüggvény gradiensét. Az algoritmusok viselkedési mintát (*pattern*) keresnek, vagyis egy adott populációt helyeznek el a térben, amely azt a helyet keresi, ahol az egyik tag a lehető legkisebb

értéket veszi fel egy megadott összefüggés alapján. A direct-search algoritmusok jól használhatóak, ha a függvény nem deriválható kétszer vagy nem folytonos. Az általánosított minta keresés (*generalized pattern search - GPS*) minden lépésben a meglévő pontok halmazát vizsgálja meg (*mesh*), amely lépésről lépésre változik. A mesh változását a jelenlegi pont egy hozzáadott érték szorozva a vektorok halmazával (ez a minta). Ha az algoritmus jobb eredményt ér el a célfüggvényben egy ilyen művelettel, akkor az lesz az újabb mesh és így tovább. A GPS algoritmus fixált irányú vektorokat használ. A kereső algoritmus motorként használható fel amelyet a Nelder-Mead Simplex módszerrel egészítettem ki.

**Nelder-Mead Simplex módszer (NM)** A Nelder-Mead módszer, szimplex ötleten alapul, amely az általánosított formája a háromszögnek,  $n \geq 2$  dimenzióban. Az algoritmus  $n+1$  megoldással inicializált, amely a szimplex  $R_n$  formája. A Nelder-Mead algoritmus négy paramétert használ: reflexió (*reflection*), tágulás (*expansion*), zsugorodás (*contraction*) és összehúzódnás (*shrinkage*). Ezeket megadva létrehoz egy populációt, amelyet szimplexbe sorol és valamilyen irányba nő/csökkenti a szimplexet úgy, hogy közben súlyozza a legrosszabb tagokat a populáció célfüggvényével. Amikor új, jobb célfüggvény értéket talál, akkor áthelyezi a középpontot és megismétli a műveletet. A halmaz tágulását, reflexióját (kizárási módszerét), zsugorodását és összehúzódnását a megadott paraméterek szabályozzák. Részletes matematikai leírás lásd: Nelder és Mead (1965), Lagarias et al. (1998), hozamgörbére alkalmazva: Manousopoulos és Michalopoulos (2009), Bliss et al. (2011).

#### 4.4.3. Globális optimalizáció

A globális optimalizáló algoritmusok célja, hogy megtalálják a globális minimumhelyet több lokális minimumhely létezése mellett, úgy, hogy magáról a keresési térről kevés információnk van. Előnye, hogy kevés információ mellett nagy valószínűséggel találja meg a globális minimumot, hátránya, hogy heurisztikus, nem a bizonyítottan legjobb eredményt adja, lassú és számításigényes. Mindezen hátrányok ellenére a legígéretesebb eredményeket ezek az optimalizáló algoritmusok nyújtották.

**Simulated Annealing (SA)** A szimulált lehűlési algoritmust Kirkpatrick et al. (1983) írta le először. Ez egy valószínűségi, lokalizált kereső algoritmus, amely felhasználja a körülötte lévő pontok információját a célfüggvény értékéről és ennek ismeretében mozog

a keresési térben. A módszer alapötlete a fémmegmunkálás technikájából származik – a hőmérséklet növelése és csökkentését úgy kell alakítani, hogy a kristályok defektusát a lehető legminimálisabbra kell csökkenteni. Az SA algoritmus kicseréli az adott eredményt egy random közeli értékre, egy valószínűség szerint, amely függ a távolságtól, a körülötte lévő értékektől (az új érték környezetétől) valamint egy globális paramétertől ( $T$ ) – amelyet hőmérsékletnek neveznek, és amely a folyamat során egyre csökken. A kezdőpont környezetében lévő lokalizált keresés általában egy random kezdő értékkel indul. A környezete ennek az értéknek egy megfelelő mechanizmusként generálódik egy költségfüggvény segítségével. A szomszédok kiválasztása hálózati topológia alapján történik, ahol a helyi optimumok „sekélyek” vagy hasonló mennyiségben és „mélységben” találhatóak meg. Ha csökken a költségfüggvény az adott referenciapontokat kicserélik, a középpontot egy újabb értékkel helyettesítik és újra kezdik a keresést. A keresés addig folytatódik, ameddig el nem éri a kívánt hibahatárt. Ahhoz hogy ne rekedjen meg lokális minimumhelyen az algoritmus, a valószínűségi értékeket úgy módosítjuk, hogy az iteráció során az külsőleg változzon, ezáltal fontos szerepe legyen a globális paraméternek.

**Genetikus Algoritmus (GA)** A genetikus algoritmust először Holland (1975) ismertette. A szakirodalomban nem létezik egységesen elfogadott definíciója, azonban számos közös vonást tartalmaznak ezek a módszerek. Ezek közül három hasonlóságot emel ki Mitchell (1998): a szelekciót (*selection*), a keresztezést (*cross-over*) és a mutációt (*mutation*). Ezek a paraméterek megválasztása segíthetnek az optimalizáció gyors(abb) megoldásában. A hozamgörbe számításánál Gimeno és Nave (2009) alkalmazta sikeresen a real-coded típusú genetikus algoritmust. Az általunk felhasznált genetikus algoritmus a következő lépéseken halad végig:

1. Kezdő paraméterek meghatározása  $\gamma_0$
2. Normál eloszlásból generált kezdő populáció a kezdő értékek körül
3. A  $\gamma_j$  -ban lévő egyedek célfüggvény értékének kiszámítása
4. Szelekció (S) meghatározása a  $\gamma$ -halmazban lévőekre vonatkozóan
5. Legjobban teljesítő egyedek szerinti rendezés
6. Új paraméter populáció meghatározása S alapján

7. Az új populációhoz a szülők kiválasztása
8. A keresztezés segítségével az új egyedek létrehozása
9. A legrosszabb  $S$  értékkel rendelkezők lecserélése az újonnan létrehozott egyedekkel
10. Véletlenszerűen mutációt hajtunk végre egyedeken (kivéve a középponton)
11. Újraszámoljuk a célfüggvény értékét és akkor állunk meg, ha a legjobb  $S$  értékkel rendelkező egyed hibaértéke kisebb mint a meghatározott  $\varepsilon$ , vagy nem tudunk  $n$  generáció után lényeges javulást elérni

Az algoritmus gyorsaságát és eredményességét az határozza meg, hogy milyen szelekciós módszer kerül kiválasztásra: a szülők kiválasztása, a keresztezés, a cserélődési arány az újabb egyedeknél, valamint a mutációs eljárás milyensége. Gimeno és Nave (2009) egy speciális beállítást alkalmaz, jelen tanulmány egy általánosabb módszert alkalmaz. (Ezt a MatLabban implementált GA fejlesztésének köszönhető.)

**Particle Swarm Optimalizáció (PSO)** A hasonlóan biológiai modellezésből kifejlődött, optimalizálási eljárásra is bevált Particle Swarm módszer, a madarak rajzását írja le. Először Eberhart és Kennedy (1995) definiálta a módszert, majd egyre nagyobb népszerűségnek kezdett örvendeni az egyszerű és gyors(abb) heurisztikus optimalizáló képessége miatt. Bár a genetikus algoritmus jelenleg szélesebb körben elterjedt, jelenleg sokak által kutatott terület: Perez és Behdinan (2007), Bai (2010), Pedersen és Chipperfield (2010), Wang et al. (2013). A módszer lényege, hogy a keresési térbe  $D$  darab egyedet (particle) helyeznek el. Ezek az egyedek mozognak a keresési térben három tényezőtől függően – milyen helyen vannak jelenleg, melyik hely volt az, amelyiken eddig a legjobb célfüggvény értékét érték el és melyik az a hely, ahol az összes tag közül valamelyik a legjobb helyen van. Legyen a paraméter-populáció vektora  $\vec{\gamma}_j = (\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}, \dots, \gamma_{j,D}) \in Z$  ahol  $Z$  a keresési tér és a részek sebessége (*velocity*: mozgási irány+sebesség)  $\vec{v}_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,D}) \in Z$ . A  $j$ -edik egyed pozíciója, amelyben a személyes legjobb célfüggvényét elérte legyen  $p_b$  pont,  $Z$ -ben. Az összes egyedre ez a következőképp írható fel:  $\vec{p}_{b,j} = (p_{b,j,1}, p_{b,j,2}, \dots, p_{b,j,D}) \in Z$ . Az egész populációra tekintve a legjobb célfüggvény értékkel rendelkező egyed értéke legyen  $p_g$ , amely a következőből kapható meg  $\vec{p}_g = (p_{g,1}, p_{g,2}, \dots, p_{g,D}) \in Z$ . Ezek ismeretében a

$j$ -edik egyed paraméter értékei és mozgása a következőképp adható meg:

$$\begin{aligned}\vec{v}_j(t+1) &= w(t)\vec{v}_j(t) + c_1 r_1 (\vec{p}_{b,j}(t) - \vec{\gamma}_j(t)) + c_2 r_2 (\vec{p}_{g,j}(t) - \vec{\gamma}_j(t)) \\ \vec{\gamma}_j(t+1) &= \vec{\gamma}_j(t) + \vec{v}_j(t+1)\end{aligned}\tag{29}$$

Ahol  $w$  a tehetetlenségi súly (*inertia weight*)  $c_1$  a kognitív vonzás (*cognitive attraction*),  $c_2$  a szociális vonzás (*social attraction*),  $r_1$  és  $r_2$  egy véletlen szám – általában 0-1 intervallumú egyenletes eloszlásból generálva. A különböző paraméterekre feltételezéssel kell élni az optimalizáláshoz sikerességéhez (Shi és Eberhart (1998), Bai (2010)). Ezek a következők:

$$0 < c_1 + c_2 < 4 \qquad w(t) = w_{max} - \frac{w_{min}t}{t-1}$$

ahol  $w_{max} = 0,9$  és  $w_{min} = 0,4$ . Természetesen ezen beállításokra több lehetőség is van, elsősorban a konvergencia sebességére és pontosságra van hatással.

Az algoritmus lépései:

1. kezdő paraméterek ( $\gamma_0$ ) és a populáció (D) meghatározása
2. Részecskés mozgásának elindítása, amelyet a random paraméterek biztosításával perturbálunk
3. Az egyedek célfüggvény értékeinek meghatározása
4. Ha nincsen jelentős javulás a legjobb eredményben ( $\gamma = g_{b,j}$ ) egy adott iteráció után vagy a hibahatár kisebb mint a megadott  $\varepsilon$  akkor az algoritmus megáll.

A számítások során kevert módszert alkalmazunk, amely megfelelő trade-off-ot nyújt a hozamgörbe számítás sebesség és pontosság között:<sup>15</sup>

- Minden páros lépésben PSO-W algoritmus futása, vagyis a „klasszikus” PSO, amelyet fent mutattunk be
- Minden páratlan lépésben PSO-G algoritmus: egyszerűsített algoritmus Pedersen és Chipperfield (2010) alapján - a  $c_1$  paramétert 0-nak vesszük, így a mozgást csak a globális legjobb érték határozza meg

---

<sup>15</sup>Bliss et al. (2011) alkalmazta ezt hibrid kombináció gondolatát először, a tanulmány újraparametrizálva használja fel az alapgondolatot

## 4.5. Optimalizálás teljesítményét mérő mutatók

A különböző modellek és optimalizáló algoritmusok teljesítményének mérésére a szakirodalomban két szélesen elterjedt és elfogadott mérőszámot különböztetnek meg, amely segítségével az illesztések jóságát (*goodness-of-fit*) szokás eldönteni Bliss (1997b):

1. MAE (*Mean Absolute Error*):

$$MAE = B^{-1} \sum_{b=1}^B |P_b - \hat{P}_b| \quad (30)$$

2. RMSE (*Root Mean Squared Error*):

$$RMSE = \sqrt{B^{-1} \sum_{b=1}^B (P_b - \hat{P}_b)^2} \quad (31)$$

Az RMSE-ben nagyobb értékkel szerepelnek a kiugró hibák, ezáltal pontosabb információt ad a durva illeszkedési hibákról, míg az MAE kevésbé érzékeny a kiugró adatokra, így egy átlagos illeszkedést kapjuk meg. A két mérőszám jól kiegészíti egymást. A matematikai összefüggést leírja a következő egyenlőtlenség (Bolder és Stréliski (1999)):

$$\frac{1}{\sqrt{B}} RMSE \leq MAE \quad (32)$$

Az egész adatsor illeszkedését aggregáló mutatószámként használható a Hubig (2013) féle átlagos MAE (AMAE):

$$AMAE = T^{-1} \sum_{t=1}^T MAE_t \quad (33)$$

A hasonlóan számolható az átlagos RMSE (ARMSE) mutató:

$$ARMSE = T^{-1} \sum_{t=1}^T RMSE_t \quad (34)$$

Másik fontos aggregált mutatószáma az illesztéseknek a hibatagokból képzett eloszlás normalitása és átlaga. A normalitást a teljes hiba populációján elvégzett Jarque-Bera nem-parametrikus teszttel vizsgáljuk meg, amelyből a Jarque-Bera tesztstatisztika értékét tüntjük fel. (Ebből számolható a  $\chi^2$ -hez tartozó kritikus érték.) Az átlaggal a szisztematikus hibákra (alul vagy felülbecslés) következtethetünk. (A szórást az RMSE mutató átalakításával visszakapható, így érdemben nem ad többlet információt.) További mérőszámokat is léteznek az illesztés jóságának megítélésére (pl: hit, cheap, rich ratio: Bolder



és Stréliski (1999), kezdőértékek perturbálása, kötvények érzékenysége: Bliss et al. (2011), robusztussági mutatók: Gabrel et al. (2014), normalizált és súlyozott RMSE és MAE: Fegyveres (2014)), ezek ismertetésétől eltekintünk.

## 5. Adatok és Implementáció

A hozamgörbék illesztését a MatLab program segítségével hajtottuk végre, saját fejlesztésű programkóddal. Az illesztés során a PSO algoritmust kivéve, beépített optimalizáló algoritmusokat használtunk fel<sup>16</sup>, a PSO módszert Chen (2013) kódja alapján az 4.4.3. alfejeztben leírt módosításokkal használtam fel. A következőkben bemutatjuk a felhasznált adatokat majd az eredményeket értékelő részletes mutatószámokat a köbös Spline és a dinamikus Svensson Genetikus Algoritmust segítségével. A mutatószámok bemutatása reményeink szerint hozzájárul az aggregált mutatók jobb megértéséhez és így a megfelelő illesztés kiválasztásához.

Az illesztés során a magyar állampapírok jegyzéseit használjuk fel. Az ÁKK hivatalosan publikálja az állampapírok hivatalos árjegyzéseit, ahol a legjobb ajánlati- és vételi árat és YTM-et is feltüntetik.<sup>17</sup> Az adatsor konvenció alapján, három hónapnál hosszabb lejáratú, fix kamatozású, kétoldali árjegyzéssel rendelkező, forintban denominált papírokat tartalmaz. A felhalmozott kamat a kuponfizetés előtti két nappal már nem átruházható, így az adatokat ennek megfelelően korrigáltuk.<sup>18</sup> A papírok cash-flow táblázatait az ÁKK biztosította. A vizsgált időszak 2001.01.04 és 2014.07.30 közé esik. A kamatszámítási konvenció a diszkont kincstárjegyeknél (1 évnél rövidebb lejárat) actual/360, az államkötvények (1 évnél hosszabb lejárat) esetében actual/actual. Az ÁKK 2003. 01.01 előtt minden papírjára az actual/365 kamatperiódust használta. Ezeket változásokat az illesztés során figyelembe vesszük.

A különböző kötvények eltérő szerkezetben kerültek bele a számításba, mivel a kibocsájtott állampapírok lejárat szerkezete a megvizsgált években megváltozott. A 2. táblázatban lehet látni, hogy a figyelembe vett papírok mennyisége a 2009-2012-es időszakban elsősorban az IMF hitel miatt lecsökkent, a korábbi mennyiséget csak 2013-ban érte el. A lejárat szerkezet ebben az időben megváltozott, a rövid lejáratú papírok relatív és ab-

---

<sup>16</sup>(MatLab Global Optimizaion toolbox

<sup>17</sup>[www.akk.hu/object.98fc9e70-5bb5-4a39-804e-8e6fe708680d.ivy](http://www.akk.hu/object.98fc9e70-5bb5-4a39-804e-8e6fe708680d.ivy)

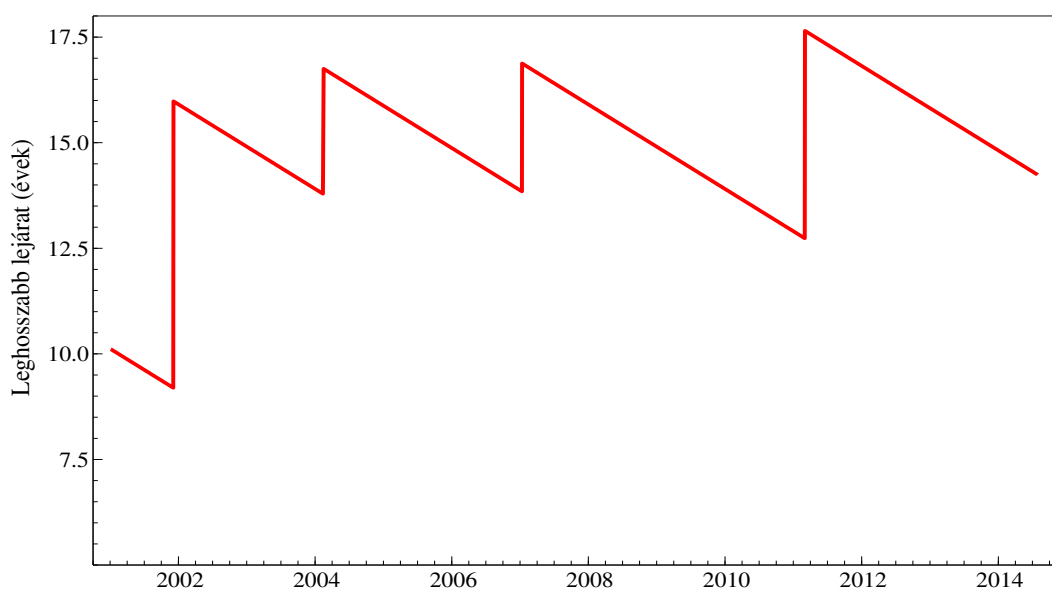
<sup>18</sup>Erre a szükséges módosításra Fegyveres György hívta fel a figyelmet.

szolút súlya is a portfólióban csökkent. Ez a hatás azonban elsősorban az IMF hitelnek és nem a piaci kilátások javulásának volt köszönhető.

2. táblázat. Az adott évben felhaszlt kötvények lejáratuk szerint

|       | $\Sigma$ | $\tau_i \leq 1$ év | $1 \text{ év} < \tau_i \leq 3$ év | $3 \text{ év} < \tau_i \leq 5$ év | $5 \text{ év} < \tau_i \leq 10$ év | $10 \text{ év} < \tau_i$ |
|-------|----------|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| 2001  | 45       | 24                 | 12                                | 5                                 | 2                                  | 2                        |
| 2002  | 44       | 26                 | 8                                 | 5                                 | 3                                  | 2                        |
| 2003  | 43       | 25                 | 7                                 | 4                                 | 4                                  | 3                        |
| 2004  | 43       | 23                 | 7                                 | 4                                 | 5                                  | 4                        |
| 2005  | 44       | 24                 | 6                                 | 6                                 | 4                                  | 4                        |
| 2006  | 45       | 23                 | 6                                 | 6                                 | 6                                  | 4                        |
| 2007  | 45       | 22                 | 8                                 | 5                                 | 6                                  | 4                        |
| 2008  | 41       | 19                 | 8                                 | 5                                 | 6                                  | 3                        |
| 2009  | 34       | 16                 | 6                                 | 4                                 | 5                                  | 3                        |
| 2010  | 29       | 14                 | 5                                 | 3                                 | 5                                  | 2                        |
| 2011  | 29       | 14                 | 4                                 | 3                                 | 5                                  | 3                        |
| 2012  | 28       | 14                 | 4                                 | 3                                 | 4                                  | 3                        |
| 2013  | 44       | 26                 | 8                                 | 5                                 | 3                                  | 2                        |
| 2014* | 24       | 10                 | 4                                 | 4                                 | 4                                  | 2                        |

\*2014.01.01-07.30 között piacon lévő papírok



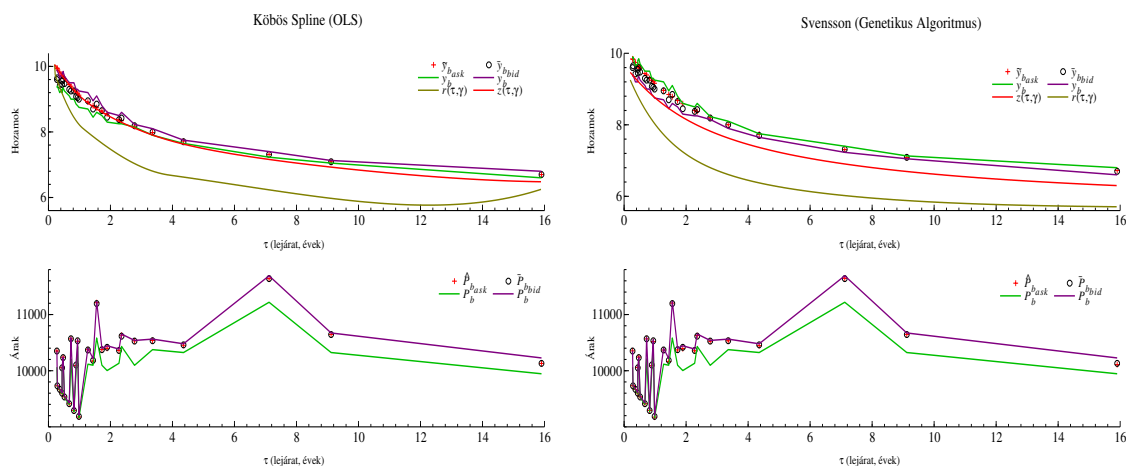
6. ábra. Az állampapírok lejáratának szerkezete 2001-2014 között

A 6. ábra az illesztésbe bevont papírok lejáratainak szerkezetét tartalmazza. Az ábrán

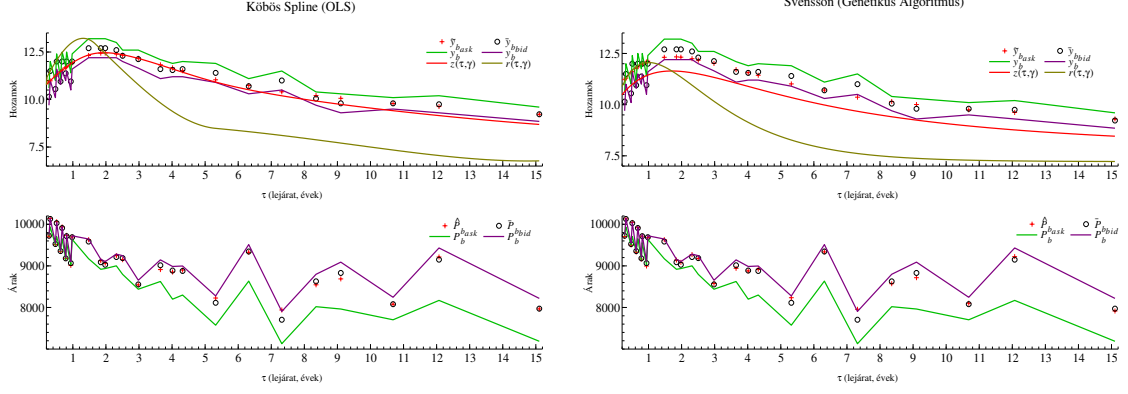
látható recék az újonnan kibocsájtott leghosszabb lejáratú papírok lejáratának csökkenéséből keletkeznek. Az ábra jól mutatja a 2011. 03. 02-án, az ÁKK kibocsájtotta az eddigi leghosszabb 17 éves lejáratú papírját (2028/A – A281022A11).

## 5.1. A hozamgörbe illesztés eredményeinek részletes bemutatása

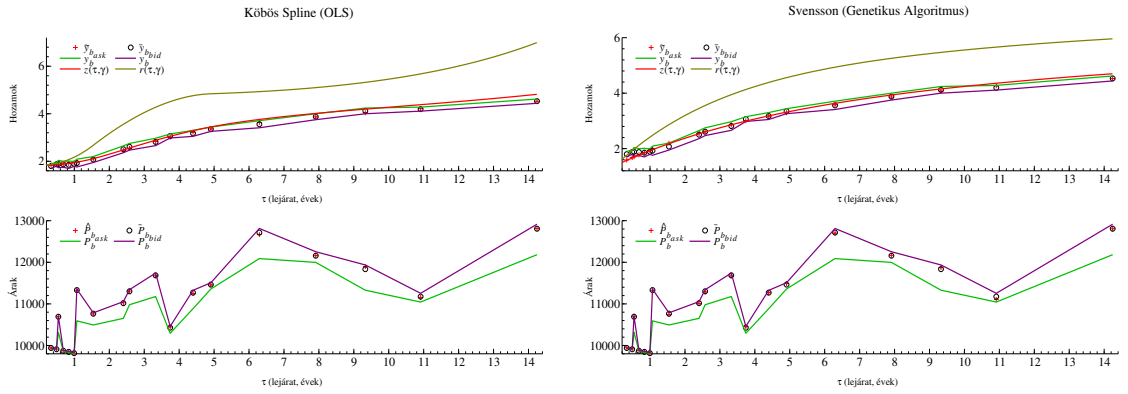
A bemutatott adatokon különböző polinomokkal és algoritmusokkal végeztük el az illesztéseket. A következőben a Spline módszert és a dinamikus Svensson genetikus algoritmussal számolt illesztéseket hasonlítjuk össze és mutatjuk be a különböző mérőszámokat. A két illesztési módszert bemutató jelleggel használjuk fel, kiválasztásuk önkényes. Segítségükkel a későbbiekben található aggregált mérőszámok mögötti jelentést szeretnénk részletesebben feltárni. A 7, 8, 9 ábrákon három kiválasztott naphoz tartozó zéró-kupon hozam ( $z(\tau, \gamma)$ ) illesztéseket mutatjuk be különböző hozamgörbe lefutási típusoknál. Az ábrák, sorrendben az inverz, púpos és sima hozamgörbére adnak 1-1 példát. A legfőbb különbség az illesztett két módszer között a hozamgörbe hosszú oldalának lefutásában található. Míg a köbös spline „túlzottan” rugalmas a hosszú oldalon - ez a forward hozamgörbében is éles visszakanyarodást okoz - addig a Svensson az illesztett polinom tulajdonságai miatt egy hipotetikus értékhez tart a hosszú oldalon.



7. ábra. Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2002. Január 2.-án



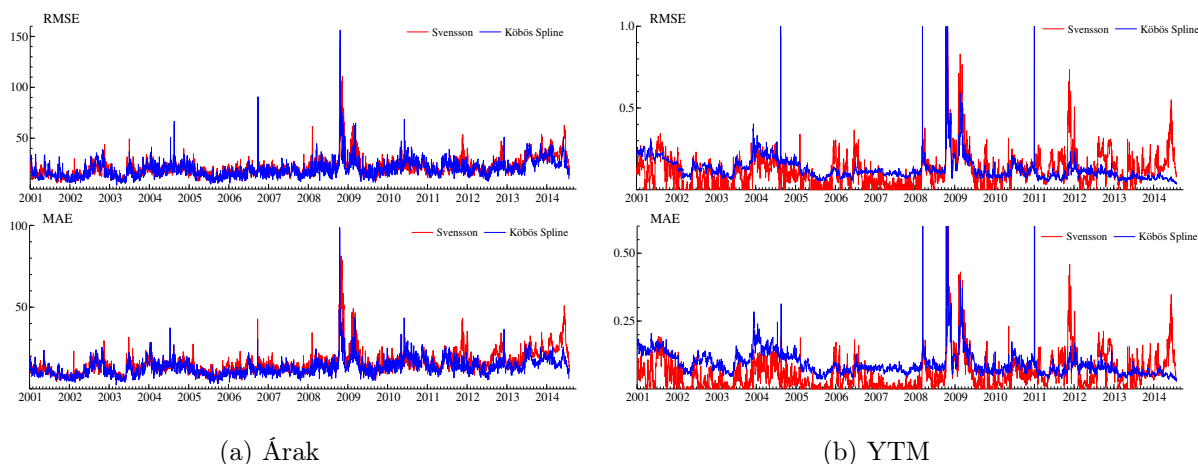
8. ábra. Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2008. Október 20.-án



9. ábra. Átlagos árhoz való illesztés eredménye 2014. Július 29.-én

A becsült árak ( $\hat{P}_b$ ) a 8. egyenlet megoldásával kapjuk. A 4. és 7. összefüggéseket felhasználva megkapjuk a vissza számolt hozamokat ( $\tilde{y}_b$ ) és a forward hozamokat ( $r(\tau, \gamma)$ ). Az ábrákon a piros és zöld vonallal a Bid-Ask spreadhez tartozó intervallumokat tüntettük fel. A Bid-Ask spreadből számolt átlagos árakat/hozamokat, amelyekhez az optimalizálást végeztük, körrel jelenítettük meg. (Az illesztés annál pontosabb minél közelebb van az empirikus átlagos ár/hozam az illesztett ár/hozamhoz.) Az eltérésekből az 21. összefüggés alapján számolhatjuk a hibastatisztikákat. Amennyiben az illesztett ár/hozam beleesik a Bid-Ask spread intervallumba úgy a hibát 0-nak tekintjük. A módosított hibák felhasználásával a 30. és 31. egyenletek alapján megkaphatjuk az RMSE és a MAE mutatókat A 10. ábrán látható RMSE statisztikák megmutatják, hogy az adott napon mennyire fordultak elő extrém hibák, amikor a számított érték jelentősen eltért az átlagos értéktől. A MAE statisztika az abszolút átlagos hibára ad proxyt. A két itt bemutatott módszer közül az

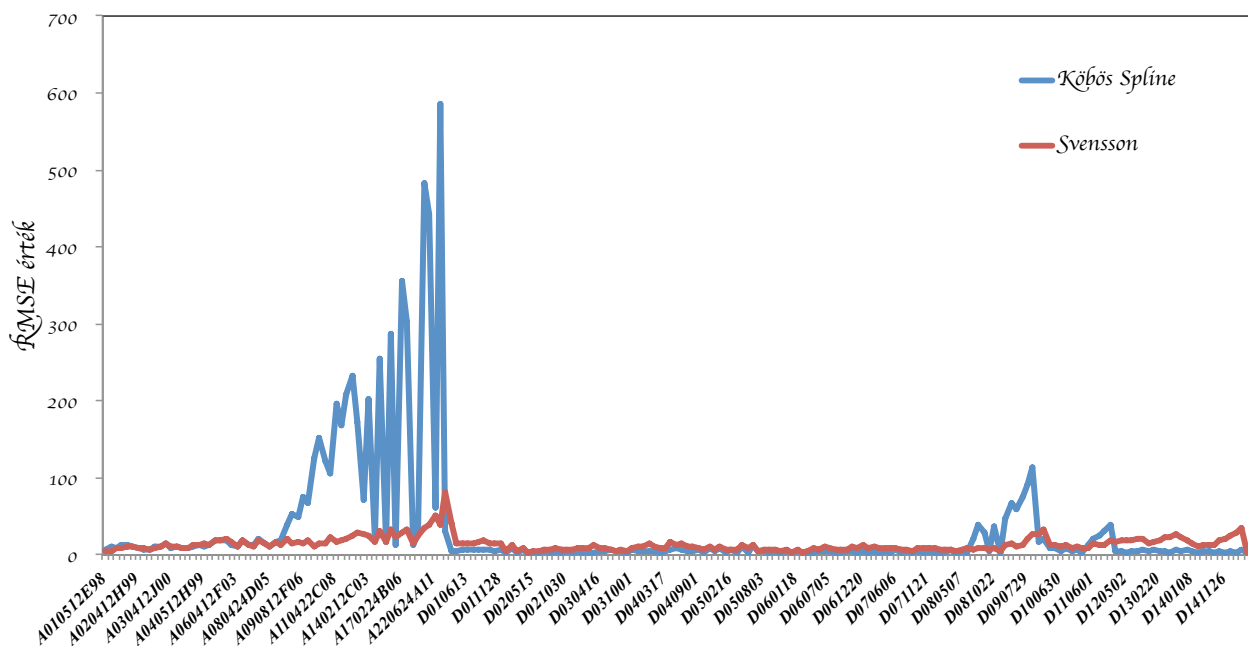
RMSE és MAE átlagolt statisztikákban az árakra a Spline által használt illesztés, míg a hozamokra (YTM) a Svensson némileg jobb illeszkedést ért el.



10. ábra. Napi hibastatisztikák értékei: Kötös Spline (OLS) és Svensson (GA)

A napi értékek MAE szórásában a Kötös Spline (129,49) jobbnak bizonyult a Svenssonnál (161,35). A két módszer közötti különbség azonban elhanyagolható, mind két esetet – a szakirodalom alapján – kiváló illeszkedésnek tekinthetjük. Az RMSE és MAE mutatószámokat nem csak az egyes napokra, hanem a különböző állampapírokra is megvizsgáltuk, így specifikus információhoz jutunk a (modell által) félreárazott kötvényekről. Ehhez a vizsgált időszakban előforduló kötvények számított és átlagos értékeinek eltérését kell elosztani a papír előfordulásának számával. A 11. ábra alapján két következtetésre jutottunk:

- A használt módszertan eltérő (kiugró) hibastatisztikát ad a különböző papírokhoz (piac viselkedésére eltérő következtetésekre juthatunk)
- A vizsgálatba bekerült kötvények mindegyike fontos, nincsen olyan kötvény amelyet „outlierként” kellene (lehetne) kezelni.
- A súlyozás miatt a hosszú lejáratú kötvények szisztematikusan rosszabb értékekkel rendelkeznek, mint a rövid lejáratúak



11. ábra. Állampapírok RMSE értékei

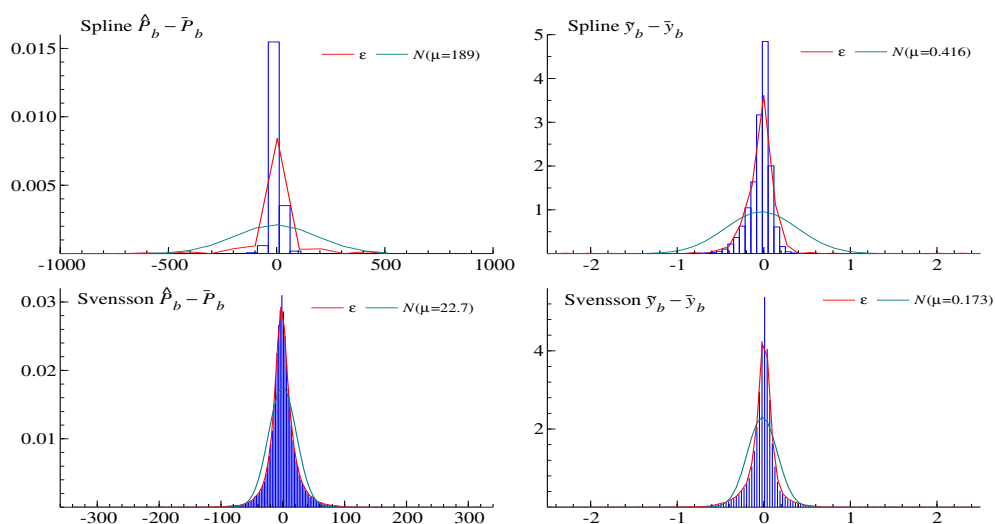
Fontos az illesztésből megmaradt hibák eloszlásának vizsgálata. Az illesztés során felmerülő szisztematikus hibákat a Jarque-Bera normalitás tesztjével lehetséges vizsgálni. (lásd pl.: Hendry (1995)) Az 3. táblázat az egész idősorra vett hibákra vizsgált teszt eredményeit mutatja be, míg a 12. ábra az illesztett eloszlásokat.

3. táblázat. Teljes idősorra vett hibák eloszlásának statisztikája és Jarque-Bera teszt értékei

|                    | <i>Köbös Splíne</i> |                    | <i>Svensson</i>    |                    |
|--------------------|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|                    | Árak                | Hozamok            | Árak               | Hozamok            |
| Átlag              | 0.57718             | -0.042179          | -0,5023            | -0,0161            |
| Szórás             | 21.2918             | 0,14016            | 22,7161            | 0,173              |
| Jarque-Bera teszt* | $1,40 \times 10^6$  | $5,39 \times 10^6$ | $3,53 \times 10^5$ | $1.59 \times 10^6$ |

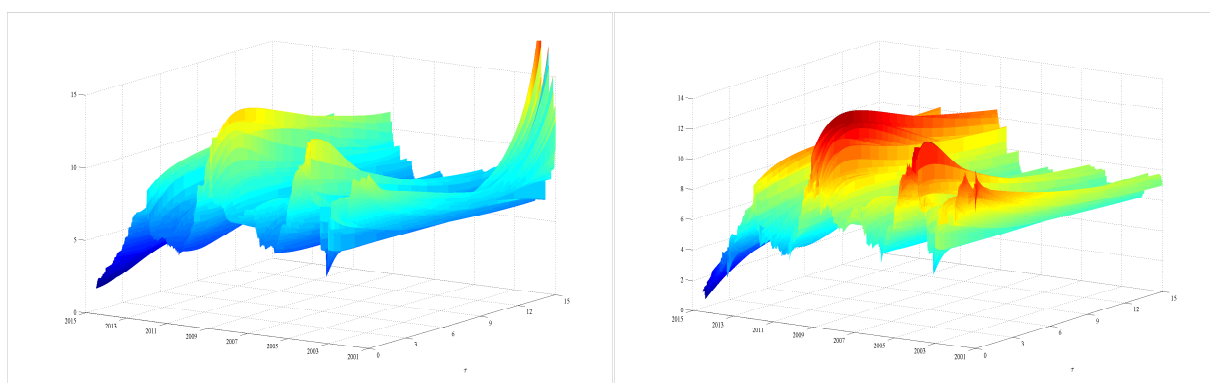
\*A Jarque-Bera teszt  $\mathcal{H}_0$  hipotézisét, minden esetben 1% mellett elvetjük.

Bár egyik illesztés esetében sem tudjuk a normalitást elfogadni (Az eloszlások inkább *Student-t* eloszlás alakúak. A hibák speciális számolása miatt ez nem meglepő, hogy nem normál eloszlást követnek.) a 3. táblázat és 12. ábra azt sugallja, hogy a Svensson polinomot felhasználó illesztés az egész idősorra 0-hoz közelebbi átlaggal de nagyobb szórással rendelkezik, míg a köbös Splíne kisebb szórással, de rosszabb átlaggal.



12. ábra. Teljes idősorra vizsgált árakhoz és hozamokhoz tartozó hibák eloszlásai

Végül az illesztések eredményét az idősoros zéró-kupon hozamokat mutatjuk be.<sup>19</sup> A 13. ábrán az illesztés során felhasznált polinomoknak több tulajdonsága is megjelenik. (pl.: rövid és hosszú oldali hozamok viselkedése.)



(a) Köbös Spline

(b) Svensson

13. ábra. Zéró-kupon hozamgörbék idősorai

A két módszer közötti illesztésembeli különbségek:

- Teljes hozamgörbe volatilitása – hirtelen változás az egyik napról a másikra
  - Köbös Spline volatilitesebb idősora, mint a Svenssoné
- Hosszú oldalon lévő hozamok „csapkodása”

<sup>19</sup>x-tengely az időt 2001-2014 között, az y-tengely a hozamokat (százalék-pont), míg a z-tengely a lejáratokat mutatja.

- Spline módszertanban „elszálló” hosszú hozamok
- Rövid oldalon lévő hozamok „csapkodása”
- Svensson módszertan hajlamosabb a volatilis rövid hozamokra

Összességében, mindkét módszerrel jó illeszkedést sikerült elérni, a részletesen bemutatott teszt statisztikák segítenek a polinomok tulajdonságai által determinált hibák feltárásánál. A köbös Spline némileg jobban illeszkedett az árakra, míg a Svensson a hozamokra.

## 5.2. Módszereket összehasonlító mérőszámok

A fenti elemzés alapján ebben a fejezetben végigtekintjük az illesztési jóságot mérő aggregált mutatókat az összes lefuttatott polinomra és algoritmusra. Az eredményeket nem szűrtük, így a teljes RMSE értékek magasak amennyiben az algoritmus konvergenciája nem volt sikeres. (Amennyiben bizonyos megfigyelési napokat kiszűrünk, ezek az értékek javulnak.) A 5. és 5. táblázatok a teljes mintából számított RMSE és MAE mérőszámokat mutatja be az árra és hozamra vetítve a 34. és 33. egyenletek alapján. A legjobb ARMSE és AMAE a benchmarkként használt Köbös Spline módszer adta, így az ÁKK jelenlegi illesztési módszerét megalapozottnak találtuk. A teljes hozamgörbe 4-6 paraméterrel rendelkező modellekbe sűrítése viszont elfogadható információvesztéssel jár, amennyiben azok idősorosan értelmezni lehet. Az eredmények azt mutatják, hogy a 6 paraméteres Svensson modell Simulated Annealing (SA) érte el közülük a legjobb értéket. Amennyiben a modell paramétereinek számát és a paraméterek idősoros jellegét is figyelembe vesszük, akkor a 4 paraméteres Nelson-Siegel modell Genetikus Algoritmussal (GA) enged a legmegfelelőbb következtetésekre.<sup>20</sup> A 5. táblázat emellett rámutat arra, hogy helytelen optimalizációs eljárás használata (pl.: BFGS) a Svensson vagy Legendre polinomok esetében rossz illeszkedésekhez vezet.

---

<sup>20</sup>A BFGS optimalizálással kapott paraméterek idősorosan nem értelmezhetőek, az idősoros értelmezhetőség kritériumaként az egyszeres integráltságot vettük, amelyet általánosított Dickey-Fuller tesztel vizsgáltunk a differenciált adatokra. (ADF tesztet konstanssal trend nélkül futtattuk, Doornik és Hendry (2013)) Amennyiben a vizsgált paraméter kétszeresen integrált folyamat akkor idősorosan nem értelmezhetőnek tekintettük.



4. táblázat. Teljes mintából az árra számított ARMSE és AMAE

|                                   | ARMSE                |         | AMAЕ                                     |         |                      |          |
|-----------------------------------|----------------------|---------|------------------------------------------|---------|----------------------|----------|
| <i>Köbös Spline</i>               | 16.6679              |         | 13.0167                                  |         |                      |          |
|                                   | <i>Nelson-Siegel</i> |         | <i>Svensson</i>                          |         | <i>Legendre</i>      |          |
|                                   | ARMSE                | AMAЕ    | ARMSE                                    | AMAЕ    | ARMSE                | AMAЕ     |
| <i>BFGS</i>                       | 22.1506              | 16.4149 | 52.4244                                  | 39.0036 | 255.6136             | 193.8553 |
| <i>LM</i>                         | 29.9457              | 21.9677 | 38.5968                                  | 29.3058 | 20.6255              | 15.2613  |
| <i>DS+NM</i>                      | 22.8818              | 17.1503 | 19.9448                                  | 14.7032 | 80.4119              | 66.3581  |
| <i>SA</i>                         | 22.9959              | 17.3876 | 20.4759                                  | 15.1485 | 23.5361              | 17.1186  |
| <i>GA</i>                         | 22.8503              | 17.0541 | 21.0202                                  | 15.4397 | 145.618              | 122.3228 |
| <i>PSO</i>                        | 27.9816              | 21.6654 | 25.5976                                  | 19.7974 | 61.42                | 48.672   |
| <i>Fix belső paraméter + BFGS</i> | 24.7106              | 18.5702 | 20.6193                                  | 15.092  | 23.1187              | 16.6791  |
|                                   | $\lambda_1 = 2.5550$ |         | $\lambda_1 = 6.4525, \lambda_2 = 1.7285$ |         | $\lambda_1 = 0.4488$ |          |

A hozamokhoz számított becslésben a genetikus algoritmussal számított Svensson adta a legjobb eredményt és hasonlóan az ár-hibastatisztikákhoz, a Nelson-Siegel modell nem ad érdemileg rosszabb illeszkedést.

5. táblázat. Teljes mintából az hozamokra visszaszámított ARMSE és AMAE

|                                   | ARMSE                |          | AMAЕ            |          |                 |          |
|-----------------------------------|----------------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| <i>Köbös Spline</i>               | 0.094012             |          | 0.040348        |          |                 |          |
|                                   | <i>Nelson-Siegel</i> |          | <i>Svensson</i> |          | <i>Legendre</i> |          |
|                                   | ARMSE                | AMAЕ     | ARMSE           | AMAЕ     | ARMSE           | AMAЕ     |
| <i>BFGS</i>                       | 0.13663              | 0.067691 | 0.27859         | 0.206    | 0.79496         | 0.72161  |
| <i>LM</i>                         | 0.20078              | 0.11454  | 0.20017         | 0.12398  | 0.1633          | 0.079797 |
| <i>DS+NM</i>                      | 0.15897              | 0.083441 | 0.12923         | 0.060898 | 1.1232          | 0.65939  |
| <i>SA</i>                         | 0.16155              | 0.084956 | 0.12076         | 0.05785  | 0.1447          | 0.071078 |
| <i>GA</i>                         | 0.13791              | 0.070088 | 0.12041         | 0.058131 | 2.3498          | 1.4657   |
| <i>PSO</i>                        | 0.22484              | 0.12907  | 0.20842         | 0.11609  | 0.59107         | 0.35107  |
| <i>Fix belső paraméter + BFGS</i> | 0.17624              | 0.093764 | 0.12535         | 0.060383 | 0.14231         | 0.06603  |

Bár a kisebb érték, jobb illeszkedést jelent, az arányok az illeszkedésbeli pontosságról

nem adnak információt. (A klasszikus magyarázhatósági módszerek (*encompassing* - pl: Hendry (1995, 14. fejezet)) nem felhasználhatók a belső  $\lambda$  paraméterek miatt.) A vizsgált időszak ár hibáinak átlaga némi viszonyíthatóságot biztosít. A táblázat az összes kötvény összes napra illesztett hibáit tartalmazó leíró statisztikákat mutatja be. Az hibák átlaga interpretálható lenne - a modell valóságot leíró feltételezése mellett - a piacon lévő arbitrázs mentesség hipotézise szerint, azonban ahogyan a táblázat is mutatja eltérő modellek eltérő illesztési módszertannal radikálisan más következtetésekre vezetne. A Jarque-Bera teszt statisztikája mindegyik esetben a teljes hiba-populáció nem-normalitására utal.

6. táblázat. Kötvények illesztésénél elkövetett összes hiba leíró statisztikája

|                                   | Átlag                |                    | Jarque-Bera        |                    |
|-----------------------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <i>Köbös Spline</i>               | 0.57718              |                    | $1.40 \times 10^6$ |                    |
|                                   | <i>Nelson-Siegel</i> |                    | <i>Svensson</i>    | <i>Legendre</i>    |
|                                   | Átlag                | Jarque-Bera        | Átlag              | Jarque-Bera        |
| <i>BFGS</i>                       | -0.68599             | $2.83 \times 10^5$ | 26.1714            | $5.77 \times 10^6$ |
| <i>LM</i>                         | 1.0958               | $9.54 \times 10^5$ | 13.3141            | $2.32 \times 10^7$ |
| <i>DS+NM</i>                      | -0.19049             | $2.32 \times 10^5$ | -0.64937           | $7.83 \times 10^5$ |
| <i>SA</i>                         | 0.16053              | $2.33 \times 10^5$ | -0.56095           | $3.65 \times 10^5$ |
| <i>GA</i>                         | -0.36939             | $2.48 \times 10^5$ | -0.5023            | $3.53 \times 10^5$ |
| <i>PSO</i>                        | 2.6815               | $2.76 \times 10^5$ | 1.9519             | $3.50 \times 10^5$ |
| <i>Fix belső paraméter + BFGS</i> | 0.19499              | $2.31 \times 10^5$ | -0.34214           | $4.98 \times 10^5$ |
|                                   |                      |                    |                    | $-0.81492$         |
|                                   |                      |                    |                    | $6.09 \times 10^7$ |

Végül a 7. táblázat a módszertan futtatásához kapcsolódó eredményeket mutatja be. Az egyes értékek a különböző polinomok és a hozzátartozó algoritmusok egy naphoz szükséges számolási igényét mutatja be másodpercben. Amennyiben ezt az értéket megszorozzuk a 3380 megfigyelési nappal, akkor megkapjuk a valóságos futtatáshoz szükséges időt. Ez több esetben is napokat vett igénybe. Az átlagos számítási idő mellett fontos mutató a konvergálások száma. Bizonyos esetben (pl. LM vagy BFGS) az algoritmus gyorsabban leállt, mint ahogy a konvergenciához kapcsolatos kritériumok teljesültek volna (hiba vagy célfüggvény értékének változása). Ilyenkor további kalibrálással lehetséges elérni, hogy az algoritmus konvergáljon, természetesen az átlagos számítási idő (exponenciális) növekedésének fejében. A kalibrálási tapasztalatok azt mutatják, hogy a konvergencia szám hiányának növekedésével nem szükségszerűen, vagy legalábbis nem egyenesen arányos mértékben

romlanak a teljesítmény mutatók értékei, főként a sztochasztikus optimalizálási módszerek esetében.

7. táblázat. Egy napi illesztés átlagos számítási ideje (mp) és konvergenciák hiánya (db - 3380-ból)

|                                       | Átlagos számítási idő       |                        | Konvergencia hiánya         |                        |                             |                        |
|---------------------------------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
| <i>Köbös Spline</i>                   | 0.039822                    |                        | 5                           |                        |                             |                        |
|                                       | <i>Nelson-Siegel</i>        |                        | <i>Svensson</i>             |                        | <i>Legendre</i>             |                        |
|                                       | Átlagos<br>számítási<br>idő | Konvergencia<br>hiánya | Átlagos<br>számítási<br>idő | Konvergencia<br>hiánya | Átlagos<br>számítási<br>idő | Konvergencia<br>hiánya |
| <i>BFGS</i>                           | 0.3325                      | 3372                   | 0.25578                     | 3387                   | 2.6683                      | 70                     |
| <i>LM</i>                             | 0.58718                     | 3284                   | 1.0343                      | 3380                   | 5.9592                      | 0                      |
| <i>DS+NM</i>                          | 1.3171                      | 132                    | 12.2258                     | 1544                   | 34.929                      | 41                     |
| <i>SA</i>                             | 14.5798                     | 14                     | 21.9186                     | 14                     | 33.9935                     | 0                      |
| <i>GA</i>                             | 24.813                      | 0                      | 28.4644                     | 2                      | 7.6735                      | 715                    |
| <i>PSO</i>                            | 9.5418                      | 12                     | 9.8697                      | 28                     | 9.364                       | 6                      |
| <i>Fix belső paraméter +<br/>BFGS</i> | 0.20559                     | 50                     | 0.27324                     | 8                      | 1.1532                      | 772                    |

Összességében az itt bemutatott táblázatok a különböző modellek és optimalizáló algoritmusok illeszkedéseinek aggregált mutatószámait ismerteti. Az itt leírt eredmények felhasználhatóak a különböző polinomok és algoritmusok közötti választásban. Az aggregált mutatók nem képesek az egyértelmű modellezési preferenciák kialakítására, a túlzottan sok lehetőség közül kizárhatóvá teszik az alkalmatlanokat. A Köbös Spline módszer a legjobban illeszkedő zéró-kupon hozamgörbét eredményezi, viszont a nagy paraméter szám igénye (8) és idősorsan értelmezhetetlensége miatt alternatívát adnak az itt bemutatott NSS modellek. Az illesztések eredményeképpen továbbá kiderül, hogy turbulensebb időszakokban érdemes lehet komplikáltabb modelleket alkalmazni, míg nyugodtabb piaci körülmények között a megfelelően egyszerű modellek preferálhatóak. A következő fejezetben a Nelson-Siegel genetikus algoritmussal illesztett paraméter értékeit elemezzük idősorosan, a hozamgörbében található idősoros kockázatok (Value-at-Risk) feltárásához.

## 6. General Autoregressive Score modell

A kapott paramétereket pénzügyi idősoros modellek elemzésénél használatos módszerekkel fogjuk vizsgálni. A pénzügyi folyamatok legtöbbször heteroszkedasztikusak, a változók varianciában tendenciák figyelhetők meg így átlételelesen a zéró-kupon hozamok kockázatainak változását tudjuk vele megvizsgálni. Engle (1982) híres papírja az ARIMA módszereket terjesztette ki a variancia modellezésére. Ennek első típusai az ARCH modellek (AutoRegressive-Conditional-Heteroskedasticity) majd az ebből kifejlődő GARCH (Bollerslev (1986)) modellek. Ezen modellek eredményei, nem az idősor szintjének előrejelzése, hanem az idősor várható kockázatának (varianciájának) előrejelzése. A következőben bemutatott általánosított autoregresszív score modell (GAS, Creal et al. (2008), Harvey és Chakravarty (2008), Laurent (2013), Harvey (2013)<sup>21</sup>) az állapotter modellek (*State Space Models* - lásd pl.: Durbin és Koopman (2012)) továbbfejlesztéséből alakultak ki, és napi adatok volatilitását hivatottak modellezni. Fontos tényező a pénzügyi modelleknél, a nem-normális, ferde és vastag farkú eloszlások, amelyeket különböző eloszlások használatával lehet kiküszöbölni. A GAS modellek ezen nem-normális eloszlásokat (tipikusan *Student-t*) egyszerűbben tudja kezelni. A modellezés során a likelihood függvény derivátáját (score) építi be a rekurzív frissülő formulába, így az esetleges sokkok lefutását gyorsan adaptálja.<sup>22</sup> A likelihood függvényt a pénzügyi modell által a NS paraméterekre ( $\xi$ ) illesztett szórások hibái segítségével számolva, Haavelmo-eloszlás (Hendry és Johansen (2014)) alapján a likelihood függvény:

$$p(\xi, \psi) = p(\xi_1, \psi) \prod_{t=2}^n p(\xi_t | \xi_1, \dots, \xi_{t-1}, \psi) \quad (35)$$

Ahol,  $\xi$  a GAS modell időtől függő paraméterei:  $\xi_t = (f_t, \rho)$ , ahol  $f_t(\sigma_t)$ , vagyis a feltételes szórás idő függvénye, míg  $\rho$  fix paraméterek. Célszerű a log-likelihood függvényt ( $\ell(\cdot)$ ) venni, a a t-edik megfigyelés hozzájárulása a log-likelihood értékhez:  $\ell_t = \log p(\xi_t | \xi_1, \dots, \xi_{t-1}, f_1, \dots, f_t, \rho)$ . Ekkor a GAS modell szerkezete a következő (Blasques

---

<sup>21</sup>Harvey a dynamic score models (DCS) nevet hangsúlyozza, szerinte a score dinamikus használata a lényeges tulajdonság.

<sup>22</sup>Harvey (2013) számos pozitív tulajdonságát írja és bizonyítja be ezen modelleknek, ezzel segítve a teszt-statisztikák robusztusságának elérését.

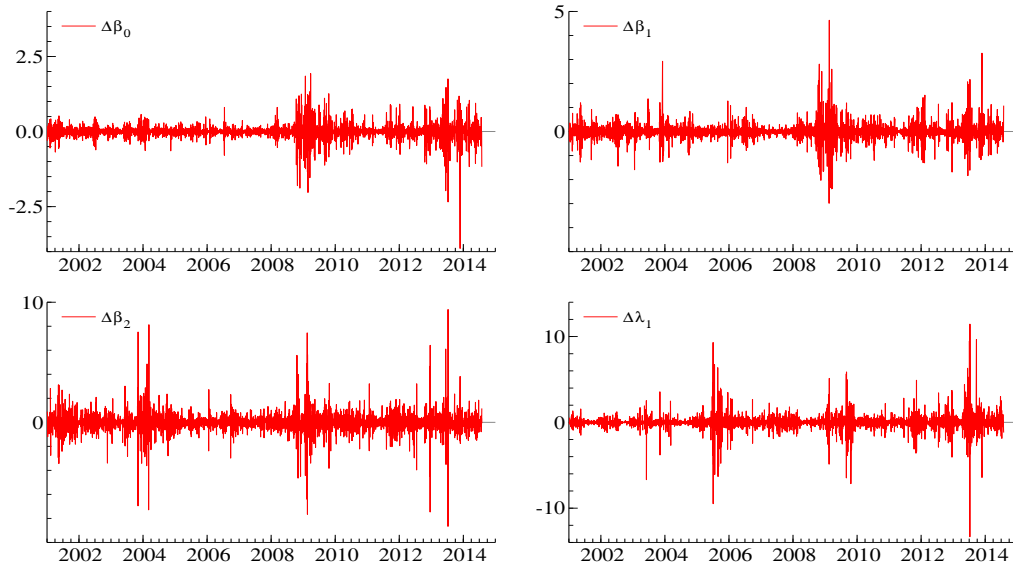
et al. (2014)):

$$\begin{aligned}
\xi_t &\sim p(\xi_t | \Xi_{t-1}, f_t, \rho), & \Xi &= \xi_1, \dots, \xi_t \\
f_{t+1} &= \vartheta + Bf_t + As_t \\
s_t &= S_t \cdot \nabla_t
\end{aligned} \tag{36}$$

Ahol  $(\nabla_t)$  a score és  $(S_t)$  az Információs mátrix inverze,  $df$  szabadságfokkal rendelkező *Student-t* eloszlást feltételezve adatgeneráló folyamatnak (Data Generating Process - DGP) a  $\nabla_t$  és  $S_t$  dinamikus egyenletei:

$$\begin{aligned}
\nabla_t &= \frac{\partial \ln p(\xi_t | \Xi_{t-1}, f_t, \rho)}{\partial f_t} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \left( \frac{\iota_t \xi_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \\
\iota_t &= \frac{df + 1}{(df - 2) + \xi_t^2 / \sigma_t^2} \\
S_t &= \mathcal{I}_{t-1}^{-1} = -E_{t-1} \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\xi_t | \Xi_{t-1}, f_t, \rho)}{\partial f_t \partial f_t'} \right]^{-1} \\
&= \left( \frac{df}{2(v + 3)\sigma_t^4} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{37}$$

A modellezéshez a GAS(2,1) összefüggést használható fel a kockázatok leírásához<sup>23</sup>



14. ábra. Dinamikus Nelson-Siegel modell paramétereinek volatiliása (Genetikus Algoritmusból)

---

<sup>23</sup>Creal et al. (2013) megmutatja, hogy a GAS modellekből visszajuthatunk a különböző jól ismert modellekhez. Az itt használatos modell a GARCH(2,1) Student-t eloszlással számoló modellhez hasonlít azonban az eltérő kezelés miatt a két modell között nincsen azonosság.

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_j &= \xi_t = \sigma_t v_t & v_t &\sim tID(0, 1, df) \\ \sigma_t^2 &= \varpi + \pi_1 \sigma_{t-1}^2 + \pi_2 \sigma_{t-2}^2 + \varrho s_t\end{aligned}\tag{38}$$

A modell interpretációja hasonló, a GARCH modellekéhez, a  $\varrho$  paraméter a hosszú távú feltételes varianciának a lefutását adja meg (hosszú távú memória), míg a  $(\pi_1, \pi_2)$  a sokkokra adott válasz (rövid távú hatások). A GAS modell ismeretes előnye, hogy gyorsabb lecsengésre képes, vagyis míg a GARCH modellek egy-egy sokk után irreálisan lassan adaptálódtak az igazi piaci környezethez, addig a GAS modell gyorsabb adaptációra képes. A modellek illesztését az *Oxmetrics 7*, *G@RCH 7.0* programcsomag (Laurent (2013)) segítségével a hajtottuk végre. Az illesztés eredményeit a 8. táblázat mutatja:

8. táblázat. GAS(2,1) modellek eredményei

| $\Delta\gamma_t$      | $\varpi$       |              |           | $\pi_1$       |              |           | $\pi_2$       |              |           | $\varrho$       |              |           | $df$       |              |           |
|-----------------------|----------------|--------------|-----------|---------------|--------------|-----------|---------------|--------------|-----------|-----------------|--------------|-----------|------------|--------------|-----------|
|                       | $\hat{\varpi}$ | std.<br>hiba | $t$ -ért. | $\hat{\pi}_1$ | std.<br>hiba | $t$ -ért. | $\hat{\pi}_2$ | std.<br>hiba | $t$ -ért. | $\hat{\varrho}$ | std.<br>hiba | $t$ -ért. | $\hat{df}$ | std.<br>hiba | $t$ -ért. |
| $\Delta\beta_{0,t}$   | 0.002          | 0.001        | 2.630     | 0.541         | 0.079        | 6.817     | 0.769         | 0.105        | 7.314     | 0.243           | 0.100        | 2.428     | 3.070      | 0.238        | 12.93     |
| $\Delta\beta_{1,t}$   | 0.004          | 0.001        | 3.822     | 0.532         | 0.050        | 10.64     | 0.824         | 0.066        | 12.57     | 0.185           | 0.061        | 3.049     | 3.429      | 0.259        | 13.26     |
| $\Delta\beta_{2,t}$   | 0.052          | 0.015        | 3.442     | 0.469         | 0.061        | 7.722     | 0.752         | 0.080        | 9.455     | 0.197           | 0.084        | 2.348     | 3.074      | 0.209        | 14.68     |
| $\Delta\lambda_{1,t}$ | 0.008          | 0.005        | 1.806     | 0.536         | 0.058        | 9.193     | 0.801         | 0.080        | 10.07     | 0.253           | 0.072        | 3.541     | 2.943      | 0.207        | 14.22     |

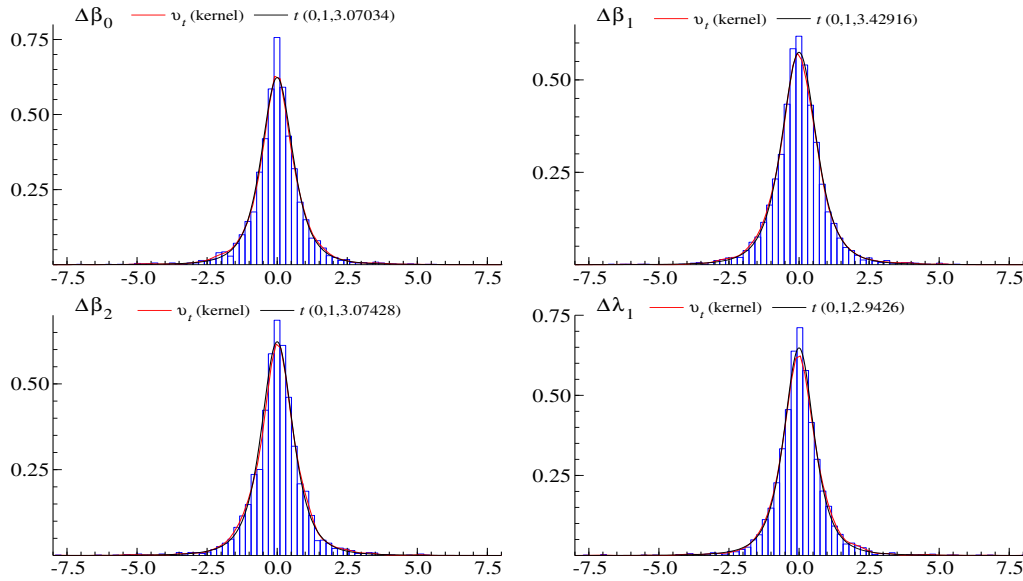
A modell eredményei azt sugallják, hogy a hozamgörbe paramétereit csak enyhény reagálnak a hosszú távú  $\varrho$  folyamatokra (a score-ban lévő sokkokra) és jóval meghatározóbb a rövid távú folyamat, a korábbi két megfigyeléshez tartozó variancia  $(\pi_1, \pi_2)$ . A felhasznált *Student-t* eloszlás szabadságfoka 3-as érték körül található és mindegyik esetben szignifikáns, vagyis a DGP nem normális eloszlásból lett generálva. Az adatgeneráló folyamat pontos jóságának vizsgálatára Pearson féle tesztet végezhetünk el. (Palm és Vlaar (1997), - hivatkozva: Laurent (2013)) A következő táblázat a  $v_t$  leíró statisztikáit is be mutatja. A Pearson statisztika 40 megfigyelésre visszatekintő, hüvelykujjszabályként a megfelelően „alacsony” p-értékek mellett fogadható el az elméleti és tapasztalati eloszlások egyezését. Csak szimulációs eredményei vannak a tesztnek, aszimptotikus eloszlás alapú bizonyítása nincsen, így kellő szkepticizmussal kell kezelni a Pearson teszt eredményeit.

9. táblázat. GAS(2,1) modellek innovációs folyamatainak leíró statisztikai és általánosított Pearson tesztje

|                 | $\Delta\beta_{0,t}$ | $\Delta\beta_{1,t}$ | $\Delta\beta_{2,t}$ | $\Delta\lambda_{1,t}$ |
|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| Log-likelihood  | 1540.027            | 137.110             | -3058.684           | -2511.439             |
| Átlag           | -0.002              | -0.001              | 0.003               | 0.003                 |
| Variancia       | 0.068               | 0.135               | 0.763               | 0.919                 |
| Ferdeség        | -1.292              | 0.889               | 0.183               | 0.109                 |
| Csúcsosság      | 30.150              | 22.990              | 26.684              | 40.189                |
| Pearson stat.   | 72.471              | 33.2640             | 63.1900             | 39.9168               |
| Pearson p-érték | 0.000899            | 0.728348*           | 0.008437            | 0.429189*             |

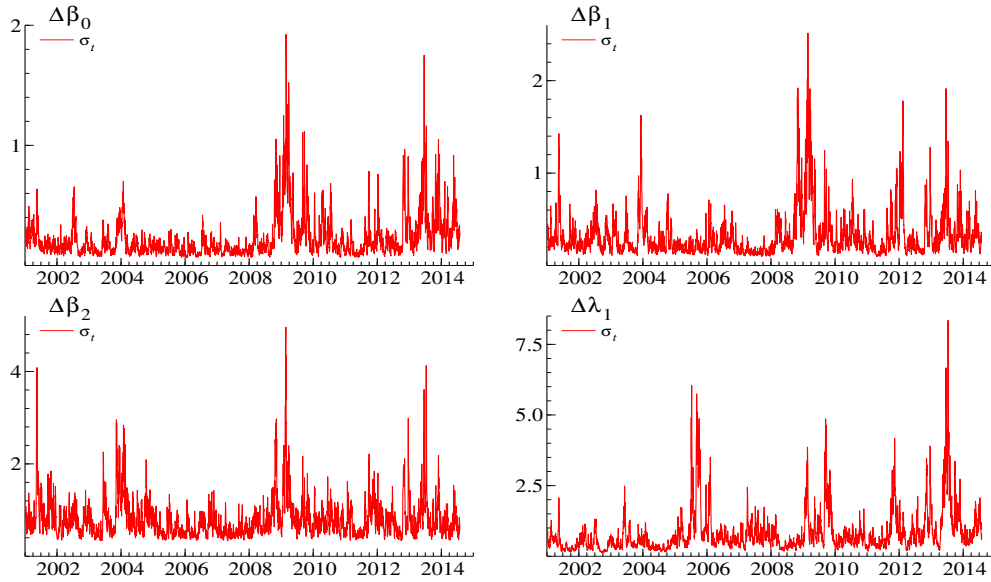
$T = 3790$ ; \*A  $\mathcal{H}_0$  hipotézis elvethető, további vizsgálatokat érdemes folytatni.

A 15. ábra a hibatagok histogramját és az elméleti *Student-t* eloszlásokat mutatja be.



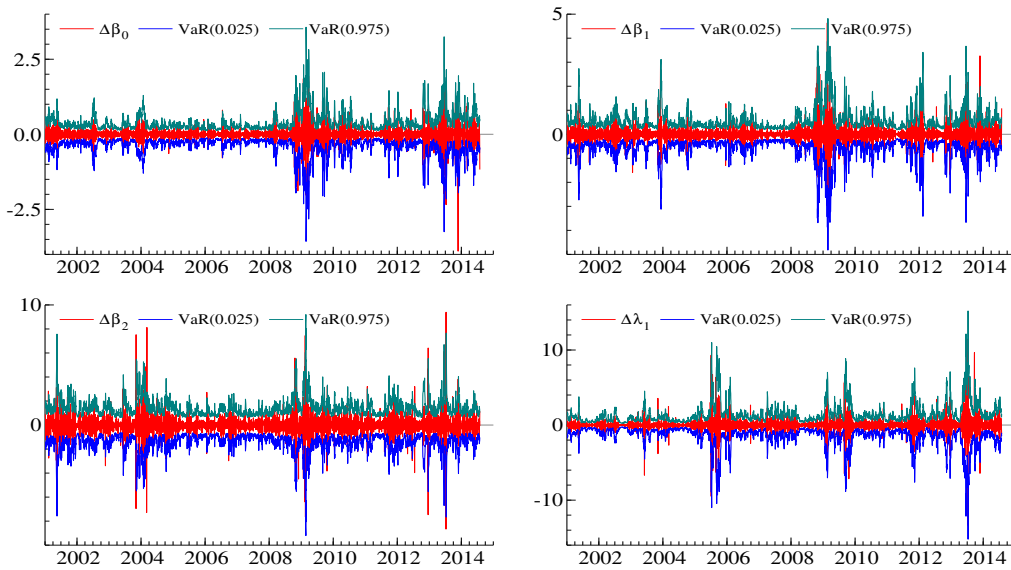
15. ábra. Illesztett GAS(2,1) modell DGP elméleti és empirikus eloszlása

A modell segítségével proxyt kapunk a kockázatok alakulására a feltételes szórásokkal. A 16. ábra a kockázatok alakulását mutatja be. Az ábrán jól lehet látni a 2008-as válságban végbemenő kockázatok emelkedését, valamint 2013 év elején végbemenő tőkekimenekítési hullámot Magyarországról.



16. ábra. Feltételes szórások alakulása az időben

A számított feltételes szórások és *Student-t* eloszlások segítségével kiszámítható a 2,5% és 97,5% kvantilisok, amelyeket áttételeken a hozamgörbe VaR-jához használhatunk fel.

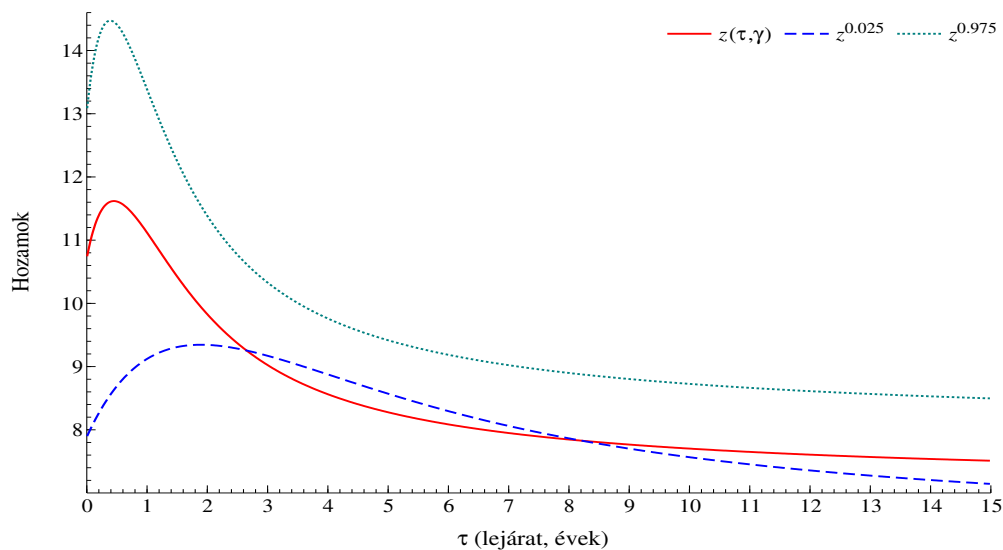


17. ábra. Paraméterek alakulásának kockázati értékei (2,5% és 97,5%)

A kapott értékeket a 2008. Október 20.-i napra megvizsgálva előállítható az *egész hozamgörbe* VaR-ja. A módszer érdekessége, hogy mivel a  $\lambda_1$  paraméterre is elvégeztük az illesztést a hozamgörbe púposágának helye megváltozik, így az előállított hozamgörbe rövid és hosszú oldalainak csökkenése (2,5% kvantilishez tartozó), a közepes távon magasabb hozamokat eredményez mint a realizált hozamgörbe.<sup>24</sup>

<sup>24</sup>Ez a jelenség interpretálható extrém piaci megnyugvási hipotézisként: egy hirtelen pozitív sokk vé-





18. ábra. Nelson-Siegel hozamgörbe VaR: 2008. Október 20.

Összefoglalva, a bemutatott GAS(2,1) modell segítségével sikerült a Nelson-Siegel genetikus algoritmussal optimalizált koefficiensek idősoros kockázatainak elemzése. A GAS (2,1) modell gyorsan adaptálja az idősorban fellelhető sokkokat és rámutat arra, hogy a hozamgörbe paramétereinek változásából kinyert variancia, két megfigyelési napra visszatekintően rendkívül érzékeny, míg a hosszabb távú folyamatok gyorsan tűnnek el a rendszerből. A feltételes varianciák számításával megkapjuk a teljes hozamgörbe idősoros kockázati faktorait, amelyek hasznosak lehetnek a hozamgörbe idősoros kockázatainak feltárásában.

---

gigvonnul a hozamgörbén, amely a hozamgörbét lefelé tolja. A kételkedő befektetők ellenben a piaci korrekcióra várva (úgyis jön egy negatív hatás), emelkedést áraznak be a közepes lejáratoknál.

## 7. Összefoglalás

A tanulmány a zero-kupon hozamgörbe modellezését, több idősoros elemzést lehetővé tevő, egymással összehasonlítható illesztéssel mutatta be. A magyar állampapírpiac hozamainak és lejáratának összefüggését négy eltérő polinom segítségével írtuk fel, amelyeket különböző globális optimalizációs módszerrel illesztettünk az adatokra. Az eltérő eljárással készített illesztéseket a szakirodalomban használatos szempontok felhasználásával, összehasonlítottuk és értékeltük.

A hozamgörbe modellezési feladat egy nem-lineáris, több minimumhellyel rendelkező, alulhatározott probléma, melynek megoldása során a kezdeti értékek megadása alapvetően befolyásolja az illesztés eredményét. A dolgozatban kidolgozott robosztus tanuló algoritmus képes figyelembe venni ezeket az idősoros szempontokat a kezdőértékek meghatározásánál. Ezzel a módszerrel nemcsak jó illeszkedést, de idősorosan is értelmezhető polinomokhoz tartozó koefficienseket kapunk.

Az illesztési feladat megoldása során alkalmazott optimalizációs algoritmusokban a különféle szakirodalomban elterjedt függvényformulákból 4 polinomot használtunk fel, amelyek a Spline, illetve Nelson-Siegel-Svensson model családkba tartoznak. Ezek matematikai tulajdonságait részletesen áttekintettük. Ezek után bemutatásra kerültek az optimalizáló algoritmusok tulajdonságai és keresési stratégiái. A fent említett illesztési probléma megoldásában ezek a stratégiák kulcsszerepet játszanak. Az eredmények rámutatnak arra, hogy turbulensebb időszakban érdemes komplikáltabb modelleket és eljárásokat alkalmazni, míg a nyugodtabb időszak esetén a klasszikusnak számító Nelson-Siegel modell megbízható eredményeket ad.

A tanulmány végén a kapott illesztési eredményekből, a Nelson-Siegel modell, Genetikus Algoritmussal becsült paraméterein végtünk idősoros elemzést, annak ellenőrzésére, hogy teljesül-e a kezdetben kitűzött idősoros értelmezhetőségi kritérium. Az általánosított autoregresszív score modellt (GAS) felhasználva interpretálható modellt kaptunk az egész hozamgörbe idősoros kockázatainak felmérésére, amely visszaadta a stilizált tényeket. A modell segítségével nem csupán a teljes hozamgörbe viselkedésére kaptunk idősoros magyarázatot, hanem kockázati metrikát is előállíthatunk a teljes hozamgörbe alakulásának modellezésére.

## Hivatkozások

- Adams, K. J. és Van Deventer, D. R. (1994), Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness, *The Journal of Fixed Income* **4**(1), 52–62.
- Anderson, N., Breedon, F., Deacon, M., Derry, A. és Murphy, G. (1996), *Estimating and interpreting the yield curve*, Wiley Chichester.
- Anderson, N. és Sleath, J. (2001), *New estimates of the UK real and nominal yield curves*, Bank of England.
- Annaert, J., Claes, A. G., De Ceuster, M. J. és Zhang, H. (2013), Estimating the spot rate curve using the nelson–siegel model: A ridge regression approach, *International Review of Economics & Finance* **27**, 482–496.
- Bai, Q. (2010), Analysis of particle swarm optimization algorithm, *Computer and information science* **3**(1), p180.
- Blasques, F., Creal, D. D., Janus, P., Koopman, S. J., Lucas, A., Scharth, M. és Schwaab, B. (2014), *Generalized Autoregressive Score Models for Time-varying Parameters: new models and applications*, Timberlake Consultancy, Summer School in Aix-en-Provence 2014.
- Bliss, R. R. (1997a), Movements in the term structure of interest rates, *Economic Review* pp. 16–33.
- Bliss, R. R. (1997b), Testing term structure estimation methods, *Advances in Futures and Options Research* pp. 197–231.
- Bliss, R., Sener, E., Erdogan, G. és Ahi, E. (2011), Robust term structure estimation.
- Bolder, D. és Strélski, D. (1999), Yield curve modelling at the bank of canada, *Available at SSRN 1082845*.
- Bollerslev, T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of econometrics* **31**(3), 307–327.

- Cairns, A. J. és Pritchard, D. J. (2001), Stability of models for the term structure of interest rates with application to german market data, *British Actuarial Journal* **7**(03), 467–507.
- Chen, S. (2013), Particle swarm optimization, Technical report, Mathworks.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E. és Ross, S. A. (1985), A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 385–407.
- Creal, D., Koopman, S. J. és Lucas, A. (2008), A general framework for observation driven time-varying parameter models, Technical report, Tinbergen Institute Discussion Paper.
- Creal, D., Koopman, S. J. és Lucas, A. (2013), Generalized autoregressive score models with applications, *Journal of Applied Econometrics* **28**(5), 777–795.
- Csajbok, A. (1998), Zero-coupon yield curve estimation from a central bank perspective, Technical report, Magyar Nemzeti Bank (the central bank of Hungary).
- Dai, Q. és Singleton, K. J. (2000), Specification analysis of affine term structure models, *The Journal of Finance* **55**(5), 1943–1978.
- de Andrés Sánchez, J. és Terceno Gomez, A. (2004), Estimating a fuzzy term structure of interest rates using fuzzy regression techniques, *European Journal of Operational Research* **154**(3), 804–818.
- Deventer, D. v. és Imai, K. (1997), *Financial risk analytics: A term structure model approach for banking, insurance and investment management*, Irwin.
- Diebold, F. X. és Li, C. (2006), Forecasting the term structure of government bond yields, *Journal of econometrics* **130**(2), 337–364.
- Doornik, J. A. és Hendry, D. F. (2013), *Empirical Econometric Modelling*, Vol. PcGive 14, Timberlake Consultants Ltd.
- Duffee, G. R. (2002), Term premia and interest rate forecasts in affine models, *The Journal of Finance* **57**(1), 405–443.
- Durbin, J. és Koopman, S. J. (2012), *Time series analysis by state space methods*, Oxford University Press.

- Eberhart, R. C. és Kennedy, J. (1995), A new optimizer using particle swarm theory, *in* Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science, Vol. 1, New York, NY, pp. 39–43.
- Engle, R. F. (1982), Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 987–1007.
- Fabozzi, F. J., Martellini, L. és Priaulet, P. (2005), Predictability in the shape of the term structure of interest rates, *The Journal of Fixed Income* **15**(1), 40–53.
- Fama, E. F. és Bliss, R. R. (1987), The information in long-maturity forward rates, *The American Economic Review* pp. 680–692.
- Fegyveres, Gy. (2014), A hozamgörbe modellezésének módszertani bemutatása a spline és a nelson-siegel típusú modellek összehasonlításán keresztül, Diplomamunka, Budapest Corvinud Egyetem and Eötvös Lóránd Tudományegyetem.
- Ferstl, R. és Hayden, J. (2010), Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc, *Journal of Statistical Software* **36**(1), 1–34.
- Gabrel, V., Murat, C. és Thiele, A. (2014), Recent advances in robust optimization: An overview, *European Journal of Operational Research* **235**(3), 471–483.
- Gauthier, G. és Simonato, J.-G. (2012), Linearized nelson–siegel and svensson models for the estimation of spot interest rates, *European Journal of Operational Research* **219**(2), 442–451.
- Gilli, M., Große, S. és Schumann, E. (2010), Calibrating the nelson–siegel–svensson model, Technical report, COMISEF Working Paper Series.
- Gimeno, R. és Nave, J. M. (2009), A genetic algorithm estimation of the term structure of interest rates, *Computational Statistics & Data Analysis* **53**(6), 2236–2250.
- Harvey, A. C. (2013), *Dynamic Models for Volatility and Heavy Tails*, Cambridge University Press: Econometric Society Monographs.
- Harvey, A. C. és Chakravarty, T. (2008), *Beta-t(e) garch*, University of Cambridge, Faculty of Economics.

- Heath, D., Jarrow, R. és Morton, A. (1992), Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica* **60**(1), 77–105.
- Hendry, D. F. (1995), *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press.
- Hendry, D. F. és Johansen, S. (2014), Model discovery and trygve haavelmo’s legacy, *Econometric Theory* **FirstView**, 1–22.
- Hladíková, H. és Radová, J. (2012), Term structure modelling by using nelson-siegel model, *European Financial and Accounting Journal* **2012**(2), 36–55.
- Holland, J. H. (1975), *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.*, U Michigan Press.
- Hubig, A. (2013), Use of orthogonal polynomials to describe the shape and dynamics of the term structure of interest rates for the purpose of government debt management, *in* Introduction of a New Conceptual Framework for Government Debt Management, Springer, pp. 73–111.
- Hull, J. és White, A. (1990), Pricing interest-rate-derivative securities, *Review of Financial Studies* **3**(4), 573–592.
- Hurn, S., Lindsay, K. és Pavlov, V. (2005), Smooth estimation of yield curves by laguerre functions.
- Ioannides, M. (2003), A comparison of yield curve estimation techniques using uk data, *Journal of Banking & Finance* **27**(1), 1–26.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. et al. (1983), Optimization by simulated annealing, *science* **220**(4598), 671–680.
- Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H. és Wright, P. E. (1998), Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions, *SIAM Journal on optimization* **9**(1), 112–147.
- Laurent, S. (2013), G@rch 7, estimating and forecasting arch models, *Timberlake Consultants* .

- Manousopoulos, P. és Michalopoulos, M. (2009), Comparison of non-linear optimization algorithms for yield curve estimation, *European Journal of Operational Research* **192**(2), 594–602.
- McCulloch, J. H. (1971), Measuring the term structure of interest rates, *Journal of Business* pp. 19–31.
- Mitchell, M. (1998), *An introduction to genetic algorithms*, MIT press.
- Nelder, J. A. és Mead, R. (1965), A simplex method for function minimization, *The computer journal* **7**(4), 308–313.
- Nelson, C. R. és Siegel, A. F. (1987), Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of business* pp. 473–489.
- Palm, F. C. és Vlaar, P. J. (1997), Simple diagnostic procedures for modeling financial time series, Technical report, Maastricht University.
- Pedersen, M. E. H. és Chipperfield, A. J. (2010), Simplifying particle swarm optimization, *Applied Soft Computing* **10**(2), 618–628.
- Perez, R. és Behdinan, K. (2007), Particle swarm approach for structural design optimization, *Computers & Structures* **85**(19), 1579–1588.
- Pooter, M. D. (2007), Examining the nelson-siegel class of term structure models, Technical report, Tinbergen Institute Discussion Paper.
- Ramos, S. N. (1995), *Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos*, Banco de España.
- Reguly, Á. (2014), *A magyar állampapírok robosztus illesztésének módszertana*, Adósság Kezelési Tanulmányok.
- Reguly, Á. (2015), Az infláció, a bérek és a pénzkereslet makroökonometriai modellezése: A Hendry féle redukciós módszertan alkalmazása a magyar gazdaság 1995-2014 közötti időszakában, Diplomamunka, Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem.
- Schich, S. (1997), Estimating the german term structure.

- Shi, Y. és Eberhart, R. (1998), A modified particle swarm optimizer, *in* Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on, IEEE, pp. 69–73.
- Stander, Y. S. (2005), *Yield Curve Modeling*, Palgrave MacMillan.
- Steeley, J. M. (1991), Estimating the gilt-edged term structure: Basis splines and confidence intervals, *Journal of Business Finance & Accounting* **18**(4), 513–529.
- Svensson, L. E. (1994), Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994, Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of financial economics* **5**(2), 177–188.
- Virmani, V. (2012), On estimability of parsimonious term structure models: an experiment with the nelson–siegel specification, *Applied Economics Letters* **19**(17), 1703–1706.
- Waggoner, D. F. (1997), Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper* pp. 97–10.
- Wang, H., Sun, H., Li, C., Rahnamayan, S. és Pan, J.-s. (2013), Diversity enhanced particle swarm optimization with neighborhood search, *Information Sciences* **223**, 119–135.
- Wernen, R. és Ferenczi, I. (2006), *Calibration of the Svensson Model to Simulated Yield Curves*.