

Kockázati mértékek

ELEMZÉS AZ OPTIMÁLIS ADÓSSÁGPORTFÓLIÓ MODELLHEZ
BEBES ANDRÁS

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	2
2	Kiemelten vizsgált kockázati mértékek	3
2.1	Kockázatosított Érték	3
2.2	Feltételes Kockázatosított Érték	6
2.3	„Ragasztott” VaR	8
3	Összegzés	10
	Függelék 1: Alapvető valószínűsítésszámítási fogalmak	11
	Valószínűségelméleti áttekintés	11
	Statisztikai áttekintés	14
	Függelék 2: Kockázati mértékek	16
	Mi a kockázati mérték?	17
	Kockázati mértékek axiómái	18
	Függelék 3: Kockázati mértékek osztályai	27
	Koherens kockázati mértékek	27
	Konvex kockázati mértékek	28
	Valószínűség-eloszlás invariáns kockázati mértékek	28
	Spektrális kockázati mértékek	29
	Deviáció mértékek	30
	Várhatóérték-korlátozott kockázati mértékek	30
	Kvantilis alapú kockázati mértékek	31
	Áresés mértékek	32
	Torzított kockázati mértékek	32
	Függelék 4: A kiemelt kockázati mértékek matematikai felírásai	36
	Kockázatosított Érték	36
	Feltételes Kockázatosított Érték	36
	„Ragasztott” VaR	38
	Felhasznált Irodalom	40

1 Bevezetés

A közelmúlt válságai rámutattak, hogy a kockázatok mérése a pénzügyi szektorban még mindig gyerekcipőben jár, s habár akademikusok már több mint egy évtizeddel a 2008-as válság bekövetkezése előtt rámutattak a kockázatok méréséhez addig széleskörűen használt kockázati mutatók alapvető hibáira, sőt javaslatokat is tettek, hogy milyen irányban volna érdemes továbbfejleszteni ezeket, a pénzügyi intézmények és a felügyeleti szervezetek csak az utóbbi években fordították figyelmüket a kockázatok leírásának hatékonyabb módszerei felé.

Az ÁKK optimális portfólió modelljének új alapokra helyezése kapcsán a modell összes aspektusa vizsgálatra kerül. Az egyik ilyen szempont az, hogy milyen mérőszámokkal kívánja az ÁKK számszerűsíteni az adósságkezelés során jelentkező piaci kockázatokat (a továbbiakban: kockázati mértékek). Megfelelő, illetve elegendő-e a korábban használt *kockázatosított érték* típusú mutatók (Value-at-Risk, VaR és Interest Cost-at-Risk, ICaR) alkalmazása, és az ezek szerinti portfólió optimalizálás, vagy vannak-e újabb, pontosabb, az ÁKK céljának jobban megfelelő kockázati mértékek?

Az ÁKK Kockázatkezelési osztálya összegyűjtötte, hogy a nemzetközi szakirodalomban milyen kockázati mértékek használatosak, melyeknek milyen tulajdonságai vannak, és melyek lennének alkalmazhatóak az ÁKK modellalkotási projektje során (természetesen megfelelő tesztelés után).

Az elemzés alapján a VaR mellett a feltételes VaR (CVaR) alkalmazását tartjuk relevánsnak, azonban a teljesség érdekében áttekintettük a kockázati mértékek ezeknél jóval szélesebb körét.

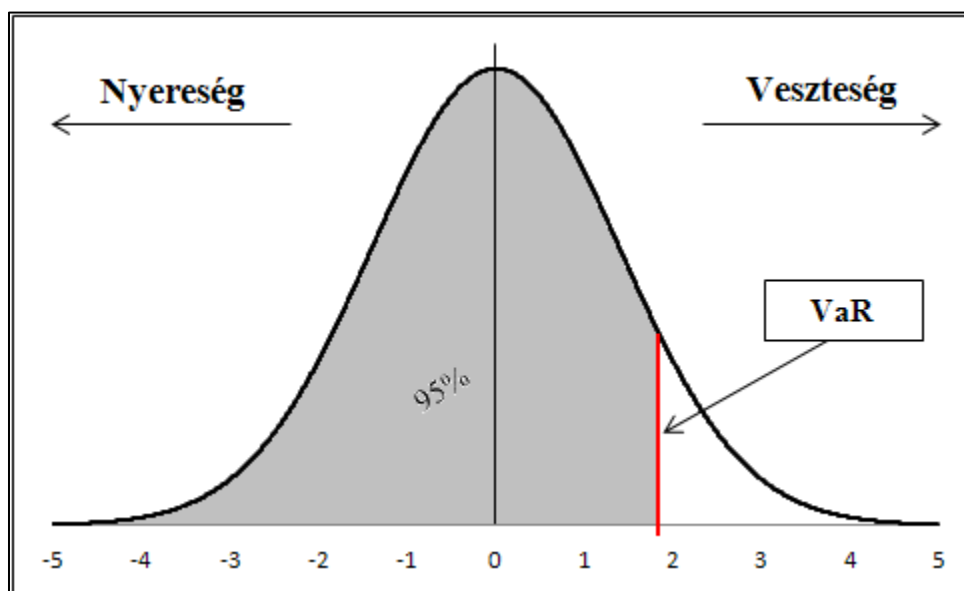
Az anyagban bemutatjuk, hogy a kockázati mértékek milyen széles spektrumon definiálhatók, mely mutatóknak mik a tulajdonságai, előnyei és korlátai. Az elmúlt évtizedekben akademikus körökben is egyre többen foglalkoznak azzal, hogy milyen módszerekkel lehetne a lehető legjobban leírni, mérni a vállalt kockázatot. Azonban nem született még „legjobb” megoldás, hiszen egyáltalán nem mindegy, hogy milyen kontextusban nézzük a problémát, sőt az sem, hogy a kockázatot miként definiáljuk. Emiatt minden egyes problémára más és más válaszokat találhatunk.

2 Kiemelten vizsgált kockázati mértékek

Míg az ÁKK 2001-2003 között fejlesztett optimális portfóliómodellje a kockázatotott értéket (VaR-t) használta fő elemzési eszközként az egyes lehetséges portfólió-összetételek kockázati jellemzőjének leírására és összehasonlítására, a VaR-al kapcsolatos – alább is ismertetett – kritikák miatt áttekintettük, hogy mennyiben érdemes más kockázati mértéke(ke)t is alkalmazni az új modellben. Így a kockázatkezelés területén továbbra is rendkívül népszerű kockázatotott értéket, a legtöbb akadémikus által ajánlott feltételes kockázatotott értéket, valamint ezek egy kombinációját vizsgáltuk meg az alábbiakban¹.

2.1 Kockázatotott Érték

A **kockázatotott érték (Value-at-Risk - VaR)** az egy adott időhorizonton az esetek $1 - \alpha = A\%$ -ban elszenvedhető minimális veszteség (vagy ami ezzel egyenértékű, az esetek $\alpha * 100\%$ -ában elszenvedhető maximális veszteség). Konkrét példában: egy portfólió egyhetes, 95%-os VaR-ja azt mutatja meg, hogy egyhetes időtávon 95%-os valószínűséggel a portfólió piaci értéke legfeljebb mennyivel változik meg. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye esetén ez a következőképp ábrázolható:



2.1 ábra: Egy veszteség eloszlás 5% kockázatotott értéke

2.1.1 Előnyök

¹ Az itt kiemelt három kockázati mértéken kívül számos más mérőszámot is tárgyal a szakirodalom. A kapcsolódó matematikai és statisztikai elméletet, a kockázati mértékek csoportképző axiómáit és az ezekkel alkotott osztályokat, valamint a kiemelt mérőszámokhoz kapcsolódó matematikai leírásokat az anyag Függelékei tartalmazzák.

Legfőbb előnye, hogy egy közös mértéket biztosít a különféle pozíciókhoz és kockázati faktorokhoz. Bármilyen típusú portfólióra alkalmazható, valamint lehetővé teszi, hogy összehasonlítsunk különböző portfóliókat.

A VaR lehetővé teszi a pozíciók aggregálását úgy, hogy figyelembe veszi a különféle kockázati faktorok egymás közti korrelációját. A VaR egy átfogó mérték, hiszen egyszerre vesz figyelembe minden kockázati faktort, míg más mértékek csak egy faktort néznek egyszerre. Sőt átfogó olyan értelemben is, hogy a teljes portfólióra ad meg egy mértéket, nem pedig csak a benne szereplő különféle elemekre.

A VaR *valószínűség típusú* és hasznos információt nyújt a kockázatkezelő számára a különféle veszteségméretek valószínűségéről (ezzel szemben más mértékek sokszor csak a „mi történik, ha?” típusú kérdésre adnak választ; pl. a derivatív termékek esetében gyakran használt ún. „görögök”, amely mutatószámok valamely tényező – pl. idő, kamatláb – változásának hatását mutatják ki).

A VaR könnyen érthető mértékegységben van kifejezve, „*elvesztett pénz*”-ben.

2.1.2 Hátrányok

Nem szabad úgy kezelni a kockázatosított értéket, még ha pontos, akkor sem, mint azt a tőkét, ami ahhoz szükséges, hogy fizetőképesek maradjunk. A VaR pusztán egy mutatószám ahhoz, hogy különféle összehasonlításokat végezhessünk, mint például két portfólió összehasonlítása, egy üzlet megkötésének relatív hatása a kockázatra, vagy a modellezett kockázat összevetése a historikus kockázattal.

Az, hogy egy portfólió kockázatosított értéke releváns mérték-e pénzügyi krízishelyzetben, egy rövid időintervallumon, függ a portfólió likviditásától, vagy a piaci likviditásban bekövetkező súlyos zavaroktól. Ilyen esetekben olyan költségek is módosíthatják a kockázatot, mint például a nem várt rövid távú finanszírozási kényszer, elszalasztott jövedelmező üzletek lehetőségköltségei, vagy kényszerített mérlegbeli változtatások. Ebből a szempontból a VaR a piaci kockázatnak csak egy aspektusával kalkulál² ezáltal pedig túlságosan szűken definiált ahhoz, hogy önmagában egy elégséges mérték lehessen tőke-megfelelési szempontból.

Valamint a VaR csak annyit mond meg nekünk, hogy maximum mennyit veszíthetünk a „jó esetekben”, a „rossz” esetekről, amikor egy farokbeli (azaz az eloszlás szélénél lévő) esemény következik be, nem ad semmilyen információt. Ebből kifolyólag a VaR képes furcsa eredményeket is generálni. Egy VaR-alapú számítás például olyat is ajánlhat, hogy a befektető menjen bele olyan befektetésekbe is, ahol a farokeloszlás megváltozását nem követi a VaR megváltozása (pl. mert 95%-os VaR-t tekintve az 5%-os kieső intervallumban bekövetkező változások nem érintik a 95%-os VaR értéket), így figyelmen kívül hagyva a pozíció értékének

² Itt arra gondolunk, hogy csak a portfólió értékében a kimenetek függvényében bekövetkező változásokra koncentrál, az ezzel járó plusz költségek, felmerülő likviditási problémák, különféle pszichológiai hatások mind kívül esnek a VaR „látókörén”.

változását, vagy a lehetséges nagyobb veszteségeket. Ez pedig rendkívül nagy kockázatokba viheti bele a csak a VaR-ra figyelő befektetőt.

A kockázatosított érték teremthet úgynevezett „moral hazard” helyzeteket is. Az a befektető, aki befektetéseire kockázatosított érték limitekkel dolgozik, szembe kerülhet olyan helyzettel, amikor az esetek többségében nyereséget érhet el, de a kisebb valószínűséggel bekövetkező „rossz” események hatásai viszont sokkalta nagyobbakká válnak. Ilyenkor létrehozható olyan veszteségeloszlású portfólió, ahol a VaR nem változik, ezáltal a befektető a „jó” esetekben keres, a „rossz” esetekben viszont rendkívül nagy veszteségeket okozhat a cégének. Ez a helyzet sok befektetőt felbátoríthat, hogy „játsszon” a veszteségeloszlással.

Komplex portfóliók esetében, amelyek több kockázati változónak is ki vannak téve (pl. a pénzügyi intézményeknél), a VaR kiszámolása rendkívül nehéz feladat is lehet. Az egyik kihívás, hogy a számolást nem lehet részekre bontani, ami abból következik, hogy a VaR nem additív a következő két értelemben:

1. Pozíció szerint: ha egy portfólió két alportfólióból áll, a portfólió teljes VaR-ja nem egyenlő a két részportfólió VaR-jainak összegével, aminek az a következménye, hogy amennyiben a portfólióhoz új eszközt teszünk hozzá, akkor újra kell számolnunk a VaR-t a teljes portfólióra.
2. Kockázati faktor szerint: egy olyan portfólió VaR-ja, amely több kockázati tényezőtől függ, nem egyenlő a különböző kockázati változók szerint számolt VaR-ok összegével (például egy átváltható kötvény VaR-ja nem egyenlő az értékét befolyásoló hozamgörbe és a kapcsolódó részvényárfolyam VaR-jainak összegével).

„A VaR mindig későn érkezik, amikor már a legrosszabb bekövetkezett”: ez az ismert mondás abból következik, hogy a piaci kockázat méréséhez a lehetséges scenáriókat historikus adatokból becsüljük. Például, egy nappal egy piaci felbolydulás előtt a becsült értékek nem fognak tudni semmit előrejelezni, ezáltal a VaR elkerülhetetlenül alul fogja becsülni a valós kockázatot, és csak napokkal az esemény megtörténte után észleli csak a változást, amikor a kialakult új helyzet adatai is bekerülnek a felhasznált historikus adatsorba.

„A VaR-nak semmi értelme”: a VaR becslése, különösen komplexebb portfóliók esetében, olyan komoly feladat lehet, hogy sokszor a végső eredménynek nem lesz releváns statisztikai értéke. A faktorok, amelyek mellett a becslések különösen nehezzé válhatnak, többek között: a *pénzügyi eszközök bonyolultsága*, a *portfólió dimenziója*, a *becslési eljárási módszerek* (pl. varianciacsökkentő módszerek implementálása a becslésbe) illetve a *becslések statisztikai hibája*.

2.1.3 A kockázatosított érték tulajdonságai

A VaR nem szub-additív. A szub-additivitás azt a várakozást jelenti, amely szerint több különböző kockázat összevonása nem növeli a teljes kockázatot. Egy olyan portfólió kockázata, amely több kisebb portfólióból áll, ne legyen magasabb, mint a benne szereplő portfóliók kockázatának összege. Egy egyszerű példán könnyedén be lehet mutatni, hogy milyen

problémákhoz vezethet a szub-additivitás hiánya. Legyen A és B két különböző kötvény, egymástól különböző csődkockázattal (amennyiben az egyik becsődöl, a másik nem). Egy olyan portfólió, amely ebből a két kötvényből áll könnyen meglehet, hogy magasabb VaR-ral rendelkezik, mint a két kötvény különálló VaR-jának összege.

<i>Kimenetel</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A + B</i>	<i>Valószínűség</i>
1	70	100	170	3%
2	90	100	190	2%
3	100	70	170	3%
4	100	90	190	2%
5	100	100	200	90%

Tegyük fel, hogy a kötvények jelenlegi értéke megegyezik a kötvény kifizetéseinek várható értékével a fenti valószínűségi mérték szerint (98,9 a mi esetünkben). Ekkor az 5%-os VaR:

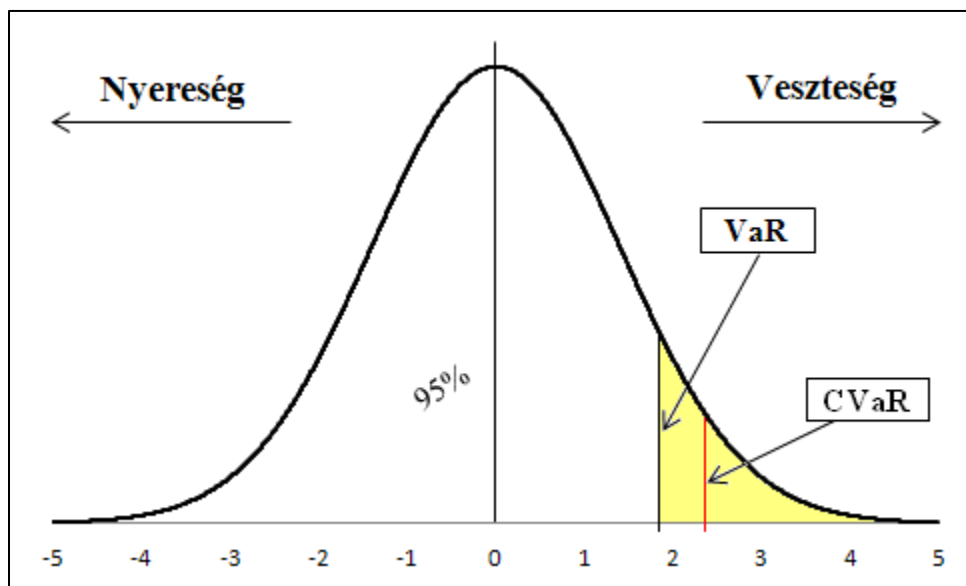
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A + B</i>
<i>Jelenlegi érték</i>	98,9	98,9	197,8
<i>VaR 5%</i>	8,9	8,9	27,8

Ezek után képzeljük el, hogy ezt a portfóliót a VaR értéke szerint minimalizáljuk. Az eredmény egy olyan portfólió lenne, amely vagy tisztán csak A vagy tisztán csak B kötvényből állna, teljesen szembemelve a diverzifikációs elvvel.

Ezen hátrányok kiküszöbölése végett kerültek megfontolásra a következő részben szereplő kockázati mutatók.

2.2 Feltételes Kockázatosított Érték

A feltételes kockázatosított értéket (Conditional Value-at-Risk - CVaR), mint a VaR természetes alternatíváját mutatták be. A CVaR arra a kérdésre keresi a választ, hogy mekkora lesz a várható veszteségünk az esetek legrosszabb $(1 - \alpha) * 100\%$ -ában, egy előre adott időintervallumon. A VaR-hoz képest itt a „várható veszteség” a lényeges különbség, mert míg a VaR azt mondja meg, hogy mi lesz az esetek $\alpha * 100\%$ -ában, az $(1 - \alpha) * 100\%$ -os intervallumról nem mond semmit, a CVaR viszont pont a kimaradó $(1 - \alpha) * 100\%$ -os eseményekről ad információt, azt, hogy mi a várható értéke az itt bekövetkező eseményeknek. A feltételes kockázatosított értékkel rengeteg tanulmány foglalkozik, s sokszor teljesen különálló módon definiálják, emiatt több ekvivalens definíció is létezik rá, sőt sokszor sokféleképpen nevezik. A 4. Függelékben szereplő három definíció ugyanazt az értéket adja meg, valamint a több tanulmányban is definiált „várható súlyos veszteség” (Expected Shortfall, ES) azonos az általunk használt feltételes kockázatosított értékkel, így a továbbiakban a két elnevezést egymás szinonimájaként fogjuk használni.



2.2 ábra: Egy veszteség eloszlás 5%-os feltételes kockázatos értéke

A CVaR kiszámításához tulajdonképpen átlagoljuk az α -nál nagyobb VaR-okat. Ebből jön a feltételes kockázatos érték elnevezés is, hiszen a mutató nem más, mint az X veszteségeloszlás várható értéke feltéve, ha az nagyobb, mint a $VaR_\alpha(X)$.

A feltételes kockázatos érték kiküszöböli a VaR talán legvitatottabb két hibáját. A CVaR szub-additív, valamint a küszöbérték utáni veszteségeket is méri, hiszen tulajdonképp azok átlagát veszi.

2.2.1 A CVaR tulajdonságai

A feltételes kockázatos érték „jobb” mutató, mint a kockázatos érték, mert kisebb eséllyel generál „furcsa” eredményeket, valamint a portfólió optimalizáció könnyebb, mert míg a CVaR-nál érvényesül a diverzifikációs hatás, a VaR-nál nem feltétlenül³, amint a fenti példában is bemutattuk (sőt, a VaR sokszor nem ad egyértelmű megoldást optimalizációs problémákra). Azonban a CVaR gyakorlati alkalmazása csak kellő körültekintés mellett javasolt, mert a hatékonysága erősen függ az alkalmazott becslési, illetve utátesztelési módszerektől. A farokeloszlás pontos becslése különösen fontos, s a legtöbb esetben pont a farok eseményekről áll rendelkezésre a legkevesebb adat a kockázatkezelők számára.

Egy másik hátránya az CVaR-nak (csakúgy, mint a VaR-nak), hogy 0 súlyt helyez az α szignifikanciaszint alatti kvantilisokra, ezáltal konzekvensen potenciális információt dob el. Az alábbi egyszerű példa jól mutatja ezt a hátrányt:

³ Lásd a Függelék 4-et.

<i>Kimenetel</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Valószínűség</i>
1	100	100	90%
2	70	100	5%
3	70	70	5%

Látható, hogy az 5%-os szignifikanciaszint mellett a CVaR – a VaR-hoz hasonlóan – ugyanazt az eredményt adja mindkét portfólió esetében, azonban az is látható, hogy az *A* portfólió kockázatosabb *B*-nél, hiszen az értékvesztésének kockázata (bekövetkezési valószínűsége) nagyobb, 10%.

2.3 „Ragasztott” VaR

A kockázatosított érték természetes alternatívájaként bemutatott feltételes kockázatosított érték sok szempontból „jobb” bizonyult, mint a VaR. Érdekes kérdés, hogy annak ellenére, hogy látszólag jobb, a CVaR mégsem terjedt el széles körben. Ennek magyarázata egyszerű a befektetési szemléletű kockázatkezelés esetében: a feltételes kockázatosított érték alapján való kockázatkezelés lényegesen magasabb tőkét igényel.

Vizsgáljuk meg a problémát egy egyszerűbb példán: a portfóliónk mai értéke legyen 150 milliárd Ft, a portfólió egységnyi idő (pl. 1 év) múlva értéke normális eloszlást követ 170 milliárd Ft várható értékkel és 17 milliárd Ft szórással. Ebben az esetben 95%-os konfidencia intervallum mellett a portfólió kockázatosított értéke 7,96 milliárd Ft, miközben az ugyanehhez a konfidencia intervallumhoz tartozó feltételes kockázatosított érték 15,02 milliárd Ft, vagyis majdnem kétszer annyi. Érthető tehát, hogy amennyiben a bázeli szabályozás a tőke megfelelést a pénzügyi intézmény 95%-os feltételes kockázatosított értékén írná elő, akkor a jelenlegihez képest a tőketöbblet-igény rendkívül magas volna. (A példában szereplő nyereség-veszteség eloszlás ráadásul normális eloszlású volt, a valóságban ennél sokkal vastagabb farkú eloszlásokkal találkozunk, ami még tovább növeli a tőkeigényt.)

Ennek a problémának az áthidalására J. Belles-Sampera et al. [29] az általuk ún. **ragasztott VaR**-ként (Glue VaR) hívott kockázati mértéket definiálták. A ragasztott kockázatosított érték típusú kockázati mértékek jellemzője, hogy több VaR típusú kockázati mérték kombinációjaként áll össze. Az így kapott kockázati mérték magában hordozza mindkét kockázati mérték előnyeit, hiszen az egyes alkotóelemek súlyának alkalmas megválasztásával a CVaR bizonyos előnyeit megtartva kaphatunk olyan kockázati mértéket, amely nem ír elő irracionálisan magas tőke-megfelelési igényt.

<i>VaR (95%)</i>	<i>VaR (99%)</i>	<i>CVaR (95%)</i>	<i>CVaR (99%)</i>	<i>GlueVaR (95%, 99%)</i>
7,96	19,55	15,02	25,15	9,88

A fenti táblázatban összehasonlításként kiszámoltuk az előző példa még néhány jellemzőjét, köztük a ragasztott VaR-t is azzal a feltétellel, hogy 80%-ban a 95%-os VaR, 15%-ban a 95%-os

CVaR-t és 5%-ban a 99%-os CVaR-t vesszük figyelembe. Azaz általánosan az α, β konfidenciaszintek mellett és $\omega_{1,2}$ súlyok mellett

$$GlueVaR_{\beta, \alpha}^{\omega_1, \omega_2}(X) = \omega_1 CVaR_{\beta}(X) + \omega_2 CVaR_{\alpha}(X) + (1 - \omega_1 - \omega_2) VaR_{\alpha}(X).$$

Egy nagyon hangsúlyos tulajdonsága a ragasztott VaR-nak, hogy a döntéshozó két külön konfidenciaszintet határoz meg, egyet a „rossz esetekhez”, egyet pedig a „nagyon rossz esetekhez”. Ezáltal egy kockázatkerülő döntéshozó lényegesen magasabb súlyt adhat a „nagyon rossz” eseteknek, míg egy magasabb kockázattétvággal rendelkező döntéshozó inkább a „rossz” esetekhez rendel magasabb súlyt.

3 Összegzés

A korábbi optimális adósságportfólió modell VaR (értékkockázat) és ICaR (kamatkockázat) mutatókat alkalmazott az egyes portfólió-szerkezetek költség és kockázat szempontú jellemzésére, és ez alapozta meg az optimális portfóliók halmazának kijelölését is. A 2007-2008-ban kezdődött válság hatásai között szerepelt az is, hogy a VaR-ral kapcsolatosan említett kritikák materializálódtak: a modell nem vehette figyelembe a hirtelen bekövetkező nagy veszteségeket és a pénzügyi piacokon bekövetkezett paradigmaváltásokat. Ez is indokolja azt, hogy az ÁKK megvizsgálja, hogy a VaR mellett (vagy esetleg ahelyett) milyen más kockázati mértékeket lehet beemelni az új modellbe, ami javíthatja a modell előrejelző képességét.

Az elemzés alapján **a VaR mellett javasoljuk a fent ismertetett mérőszámok közül a CVaR típusú kockázati mutatók beemelését az új modellbe.** Az egyes portfólió-összetételek esetén azok feltételes ICaR-ját is célszerű elemezni és az optimalizáció során figyelembe venni. A ragasztott VaR típusú mértékek használata érdekes lehet, azonban nem különösebben indokolt és a szükségesnél bonyolultabbá tenné a modellt. Az államadóssághoz kapcsolódó kockázatok kezelésekor nem egy veszteséget csökkentő szükséges tőkére vagyunk kíváncsiak, hanem a lehetséges felmerülő költségtöbbletre. A ragasztott VaR erőssége pedig pont az, hogy a CVaR tulajdonságait bizonyos mértékben megtartva képes alacsonyabb tőkeszükségletet előírni.

A nemzetközi példák alapján a külföldi adósságkezelők is a kockázatkezelés területén megszokott VaR típusú mértékeket használják modellezésük során, a VaR mellett több modellben megjelenik a CVaR alkalmazása is.

Az ÁKK új optimális adósságportfólió modelljébe való beépítés előtt természetesen tesztelésnek szükséges alávetni a felhasználandó mutatószámokat, azokat több szempontból is megvizsgáljuk majd, mint például azok érvényessége, mérésbeli előnyei vagy hátrányai.

Függelék 1: Alapvető valószínűesszámítási fogalmak

A kockázati mértékek teljeskörű elemzéséhez szükséges az egyes mérőszámok mögött meghúzódó matematikai és statisztikai elméletet is behatóan vizsgálni, ennek eredményét tartalmazza ez a függelék.⁴

Valószínűségelméleti áttekintés

A valószínűesszámítás a véletlen kimenetelű kísérletekkel foglalkozik. Kicsit formálisabban, tekinthetjük véletlennek azokat a kísérleteket, jelenségeket, amelyek kimenetelét a rendelkezésünkre álló ismeretek alapján nem tudjuk előre meghatározni. Legyen a mi példánkban ez a kísérlet a kockadobás. A lehetséges kimeneteket egy halmazzal, az *eseménytérrel* modellezzük, ezt az anyag hátralévő részében Ω -val fogjuk jelölni. A kockadobás esetében az eseménytér elemei a következők: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Az eseménytér egyes elemeit a valószínűesszámítás *elemi eseményeknek* hívja, ezeket ω -val fogjuk jelölni a továbbiakban, mondhatni az elemi események a lehetséges kimenetek.

Ezen kimenetek egy tetszőleges részhalmazát fogjuk eseményeknek nevezni. Diszkrét, avagy véges eseménytér esetén könnyen interpretálhatóak az események, pl. a kockadobási kísérletben, ha a páros számokról beszélünk, akkor egyértelmű, hogy mely események kerülnek az így definiált részhalmazba. Amennyiben az eseménytér végtelen sok elemet tartalmaz, akkor az események leírására a lehetséges eseményeket tartalmazó $\mathcal{F}$ halmazt vesszük alapul⁵. Tegyük fel, hogy a kockadobás kimenetele $\omega \in \Omega$ az esemény pedig legyen $A \in \mathcal{F}$, például a páros számok Ω -n, ekkor a kísérlet kimenetele szerint, ha $\omega \in A$, akkor A bekövetkezett, vagyis páros számot dobtunk, vagy pedig $\omega \notin A$, tehát páratlan számot dobtunk.

A harmadik objektum, amelynek megismerése elengedhetetlen a továbbiak megértése szempontjából maga a valószínűségi mérték⁶ (matematikai jelölése: $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$). A valószínűségi mérték fogalma a relatív gyakoriságból származtatható, ugyanis azt szeretnénk, hogy egy esemény valószínűsége azt fejezné ki, hogy a kísérletek körülbelül hány százalékában következik

⁴ A nemzetközi szakirodalom elsősorban a befektetők oldaláról vizsgálja a kockázatokat, azaz leegyszerűsítve a kockázat mérése elsősorban az adott portfólió értékének vagy egy befektetés kifizetési összegének csökkenéséhez (veszteséghez) kapcsolódik. Az adósságkezelés értelemszerűen az ellenkezőjében érdekelt, itt az adósság-portfólió értékének növekedése, illetve az adósságelemek elszenvedett magasabb kifizetés bekövetkezése jelenti a kockázatot. Ezen eltérő interpretáció azonban nem befolyásolja a kockázati mértékek tulajdonságainak vizsgálatát, így a kockázat értelmezésében – ebben az anyagban – a szakirodalomban használatos befektetői szemléletet követjük.

⁵ Az $\mathcal{F}$ halmazrendszer ún. σ -algebrának hívjuk, ha **1)** $\Omega \in \mathcal{F}$, Ω a biztos esemény; **2)** $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$, ha A esemény, akkor A komplementere is; **3)** $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{F}$, megszámlálható sok esemény uniója is esemény

⁶ Egy $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvényt valószínűségi mértéknek hívunk, ha **1)** $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \geq 0$, minden valószínűség nem negatív; **2)** $P(\Omega) = 1$, a biztos esemény valószínűsége 1; **3)** Ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ páronként diszjunkt események, akkor $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

be az esemény. A valószínűségi mértékre gondolhatunk úgy is, mint egy súlyozó függvényre, amely adott eseményekhez rendel hozzá súlyokat, nagyobb súlyt adva gyakrabban bekövetkező eseményeknek.

A $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ hármast valószínűségi mezőnek nevezzük, leegyszerűsítve, ez a hármas adja meg a választ a hol, mit és mikor kérdésekre. Az eseménytér mondja meg, hogy hol van definiálva a probléma, míg az $\mathcal{F}$ részhalmaz tartalmazza az eseményeket, végül pedig a valószínűségi mérték adja meg az egyes események súlyait, bekövetkezési gyakoriságát, valószínűségét.

Valószínűségi változó, eloszlás

A pénzügyi kockázatok mérését nehezíti, hogy az egyes események bekövetkezését, de még azok bekövetkezésének valószínűségét sem adja meg valamely egyszerű szabály (nincs olyan szabályszerűség például, hogy minden esetben egyik nap felfelé, másik nap lefelé mennek az árfolyamok.) Az árfolyamok véletlenszerűen változnak, így például egy portfólió értéke adott idő múlva széles skálán eltérhet a kiindulási értéktől. A befektető számára ez okozza a kockázatot, így ha ezt a kockázatot mérni szeretnénk, akkor a lehetséges jövőbeni portfólió értékeket és azok bekövetkezési valószínűségét kell vizsgálni. Mivel a portfólió értéke nem determinisztikusan, hanem véletlenszerűen változik, ezért annak alakulása egy ún. valószínűségi változó, ami tulajdonképpen egy függvény, amely azt írja le, hogy – a példánkban – a portfólió értéke hogyan alakulhat (pl. 100%-os kiindulási érték után az értéke 70% és 125% között alakulhat, de hogy pontosan mennyi lesz, azt nem tudjuk).

Formálisan, legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező, ekkor egy olyan $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényt valószínűségi változónak⁷ nevezünk, ami az véletlentől függő eseményekhez számokat rendel.

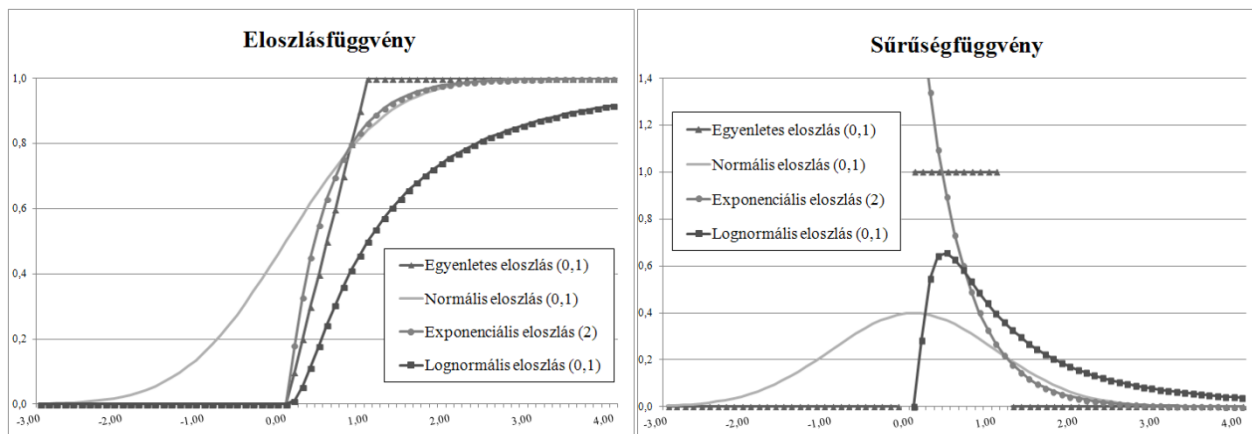
Minden valószínűségi változó meghatároz egy eloszlást. Egy valószínűségi változó eloszlását az eloszlásfüggvénye segítségével tudjuk leírni. Jelölje az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, ahol $F_X(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Az $F_X(x)$ azt mondja meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az $\{X \leq x\}$ esemény, azaz a fenti példánkban a portfólió értéke kisebb lesz mint x százalék. Az eloszlásfüggvény 0 és 1 közötti értéket vesz fel, tehát az egyes kimenetek bekövetkezésének valószínűsége legalább 0% (soha) és legfeljebb 100% (biztos bekövetkezés). Az 4.2 ábrán egyes ismert eloszlások eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét⁸ ábráztuk. Zárójelben az eloszlások paraméterei láthatóak.

X -et többféleképpen is interpretálhatjuk, lehet úgy is gondolni rá, mint nyereség-veszteség eloszlásra (ilyenkor, ha $X(\omega) > 0$, akkor nyereségünk keletkezik, ha pedig $X(\omega) < 0$, akkor veszteségünk), ha azonban veszteségeloszlásként értelmezzük, akkor az $X(\omega) > 0$ jelenti a veszteséget, tehát ebben az esetben a veszteséget pozitív értéként definiáljuk, de

⁷ Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést valószínűségi változónak nevezzük, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$. Továbbá, $\mathbb{X}$ az összes ilyen X halmaza, vagyis minden Ω -n értelmezett leképezés benne van $\mathbb{X}$ -ben.

⁸ Az X valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha létezik olyan nem negatív f függvény, hogy $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$. Az f függvényt a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének hívjuk.

hivatkozhatunk X-re, mint egy adott portfólió hozamára is. X minden esetben a pozícióban szereplő bizonytalanságot írja le.⁹



4.2 ábra: Ismert eloszlások eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye

Farok: az eloszlások azon része, ahol a legkisebb az eloszlás értéke. Farokeloszlásról akkor beszélünk, amikor nem a teljes eloszlás, hanem csak annak egy része (a kiugró értékek) érdekesek számunkra. A farokeloszlásnak központi jelentősége van a különféle kockázati mutatók kiszámolásakor, hiszen sok esetben egy pozíció kockázatakor épp a legrosszabb kimenetelű események érdekelnek minket, ezek pedig pont az eloszlás farkában szerepelnek¹⁰.

Eloszlások alapvető mutatószámai

Az alábbiakban az eloszlások néhány általánosan ismert jellemzőjét mutatjuk be. Ezek jó alapot biztosítanak ahhoz, hogy egyszerű információkat kapjunk az eloszlásról. Az átlag elméleti megfelelője az eloszlások tekintetében a *várható érték*, $E(X)$. A várható érték a lehetséges kimenetek valószínűséggel súlyozott összegét jelenti:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i), \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

amennyiben ez az érték létezik (nem végtelen). Diszkrét valószínűségi változók esetén a szumma, míg folytonos valószínűségi változók esetén az integrál érvényes¹¹. Az analógia a két esetben könnyen látható, hiszen folytonos esetben x jelenti a lehetséges kimenetelt, míg $f(x)$ a kimenetelhez tartozó súlyt. További általános mérőszám a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés, vagy más néven a variancia:

$$D^2(X) = E(X - E(X))^2$$

Szokás még a variancia négyzetgyökét is mérni, az úgynevezett szórás. A szórás a várható értéktől vett átlagos távolságot méri, nincs külön tekintettel a negatív illetve pozitív eltérésekre, valamint egyáltalán nem figyel a kiugró értékekre. Emiatt a szórás alkalmazása, mint kockázati

⁹ $X(\omega)$ egy tetszőleges kimenetel, a kockadobásnál például azt mondja meg, hogy mennyit dobtunk.

¹⁰ A valószínűségeloszlások farkainak viselkedésével az *Extrémérték Elmélet* foglalkozik.

¹¹ Tulajdonképpen az integrálás is összegzés

mérték igencsak meggondolandó. Az egy adott ponttól való távolságot mérő kockázati mutatószámokat hívjuk *deviáció mértékek*nek, ezekkel a későbbiekben még foglalkozunk.

Alapvető mérőszámok még a medián, a q -kvantilis, és a módusz. A medián a nagyság szerint sorbarendezett értékek közül a középső, matematikailag:

$$\text{Median}(X) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid P(X < x) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

A módusz az a szám, ahol a sűrűségfüggvény maximális, azaz a leggyakrabban előforduló kimenetel. A medián és a módusz sokszor nem egyértelmű, valamint fontos megjegyezni, hogy legtöbbször a várható érték, a medián és a módusz nem esnek egybe. A q -kvantilis az a szám, amelytől balra q , jobbra pedig $1 - q$ valószínűség esik. A kvantilis alapú kockázati mértékekről később részletesebben beszélünk még, hiszen ebbe az osztályba tartozik a VaR (kockázatosított érték) is.

További két alapvető mutatót érdemes még bevezetni az eloszlásokra vonatkozóan: a *ferdeséget* és a *csúcsosságot*. Az X valószínűségi változó ferdesége azt fogalmazza meg, hogy mennyire nem szimmetrikus a valószínűségi változó eloszlása, matematikailag:

$$\beta_1 = \frac{E[(X - m)^3]}{(E[(X - m)^2])^{\frac{3}{2}}},$$

ahol $E(X) = m$. A $\beta_1 = 0$ jelöli a szimmetrikus eloszlást, míg a $\beta_1 > 0$ mutatja, hogy az eloszlás sűrűségfüggvénye mennyire jobbra nyúlik el, a $\beta_1 < 0$ pedig, hogy mennyire balra. Az X valószínűségi változó csúcsossága pedig azt fogalmazza meg, hogy a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének „csúcsossága” hogyan viszonyul a normális eloszlásához, matematikailag:

$$\beta_2 = \frac{E[(X - m)^4]}{(E[(X - m)^2])^2} - 3,$$

ahol m továbbra is az X valószínűségi változó várható értékét jelenti. Normális eloszlás esetén $\beta_2 = 0$. $\beta_2 > 0$ a normális eloszlás sűrűségfüggvényénél csúcsosabb, míg a $\beta_2 < 0$ laposabb sűrűségfüggvényű eloszlást jelöl.

Statisztikai áttekintés

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ hármast *statisztikai mezőnek* hívjuk, ahol Ω nemüres halmaz (eseménytér), $\mathcal{F}$ σ -algebra (események családja), $\mathcal{P}$ pedig a szóba jöhető valószínűségi mértékek családja, azaz $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$, ahol P_ϑ valószínűségi mérték. A Θ halmazt *paramétertérnek* hívjuk. Fontos különbség a korábban definiált valószínűségi mező és a statisztikai mező között, hogy a valószínűségi mezőn **ismertnek** feltételezzük az eloszlást, míg a statisztikai mezőn nem. Ennek szemléltetésére nézzük a következő példát: jelölje az $N(\mu, \sigma^2)$ a μ várható értékű és σ^2 varianciájú normális eloszlást. A normális eloszlást ez a két paraméter egyértelműen meghatározza (vagyis, ha ezt a két értéket tudjuk, akkor mindent tudunk az eloszlásról). Tegyük

fel továbbá, hogy valamely X eloszlásról „sejtjük”¹², hogy az normális eloszlású, azonban a várható értékét és varianciáját nem ismerjük, rendelkezésünkre áll azonban egy adathalmaz, amely ebből az X eloszlásból vett kísérletek (vagy múltbéli adatok) halmaza. Ekkor a paraméterterünk $\Theta = \{\vartheta = (\mu, \sigma^2) | \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$, vagyis minden valós számpár, amelyre a szórás pozitív. A matematikai statisztika alapfeladata, hogy eldöntsük, mely számpárral írhatjuk le legjobban az X eloszlást.¹³

Egy $X = (X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ valószínűségi változót (n elemű) *mintának* nevezünk, ahol $\mathcal{X}$ a mintatér, n pedig a minta nagysága, vagy elemszáma. Az X_i koordináták a minta elemei.^{14,15} Ezentúl még definiáljuk az úgynevezett *statisztikát*. A statisztika a mintatéren megadott függvény: $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^k$. A két legismertebb statisztika a *mintaátlag* és a *korrigált tapasztalati szórásnégyzet*:

$$T(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T(X) = S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

A mintaátlagból a valós eloszlás várható értékére, míg a korrigált tapasztalati szórásnégyzetből a valós eloszlás varianciájára következtethetünk.

A matematikai statisztikán belül a becsléelmélet foglalkozik az eloszlások paramétereinek meghatározásával, míg a hipotézisvizsgálat használható arra, hogy eldöntsük bizonyos konfidencia szinten elfogadható-e egy adott feltételezés. Végül megjegyezzük, hogy a matematikai statisztika „működését” a különféle határeloszlás tételek, valamint a statisztika alaptétele biztosítják, amely azt mondja ki, hogy ha elég sok megfigyelést végzünk (vagy elegendő empirikus adat áll rendelkezésünkre), akkor tetszőleges pontossággal visszkapjuk a valódi eloszlást.

¹² A matematikai statisztika világában csak sejtéseink vannak. A portfóliómodellben is csak adott bizonyossági (konfidencia) szint mellett tehetünk különféle megállapításokat.

¹³ Természetesen nem csak paraméteres feladatok fordulhatnak elő, sok esetben egyáltalán semmilyen fogalmunk nincs a szóban forgó eloszlásról, ilyenkor $\mathcal{P}$ jelentheti akár az összes lehetséges valószínűségi mértéket is.

¹⁴ X látszólag eltérő definíciója összezavarhatja az olvasót, azonban míg a korábbi definícióban ismertük X -et, addig egy statisztikai felállásban csak szimulált, vagy múltbéli adatokra támaszkodhatunk, ám ezek az adatok ugyanúgy meghatározzák a valós eloszlást, ezért nem fogjuk külön jelölni a kettőt.

¹⁵ Az X ebben a kontextusban is az egyes kimenetekhez rendel valamilyen véletlen értéket, azonban most csak véges sok (egészen pontosan n) pontban ismerjük ezeket az értékeket.

Függelék 2: Kockázati mértékek

A pénzügyi termékekben rejlő kockázatok mérése a különféle pénzügyi instrumentumok elterjedésével párhuzamosan terjedt el. Azonban míg kezdetben csak a várható értéktől való átlagos eltérést (szórás) definiálták kockázati mértékként az egyre bonyolultabb termékek megjelenése, illetve a szabályozói környezet szigorúbbá válása egy teljes tudományág kialakulásához vezetett, melynek feladata, hogy minél hatékonyabban leírhatóvá váljon az egyes piaci pozíciókban rejlő kockázat. A derivatív termékek megjelenése, illetve a 90-es évek válságai hatására irányult mind nagyobb figyelem a kockázatkezelés hatékonyabb módszerei felé. A Bázeli szabályozás létrejötté pedig a felelősebb gazdálkodás felé terelte a piaci szereplőket. Az optimális portfóliómodellben is központi szerepet játszanak az egyes kockázati mértékek, ugyanis ezek alapján tudjuk meghatározni, hogy mely portfólió-összetételek vagy kibocsátási stratégiák „jobbak” a többihez képest.

A szórás (félszórás, variancia ... stb.) alkalmazása már nagyon korán, több ponton is vitathatóvá vált, mint hatékony kockázati mutatószám, hiszen a kockázatkezelést a negatív irányú megváltozás (költségnövekedés, értékcsökkenés) érdekli, ennek bemutatására pedig alkalmatlannak bizonyult. A derivatív termékek megjelenése hozta magával az ún. „görögök”-et (a derivatív termék értékének változása valamely külső tényező megváltozásának hatására), amelyek hátránya viszont, hogy a pozíciót a háttérben befolyásoló tényezők (idő, részvényérték stb.) mindössze egyikének megváltozásakor jelentkező kockázatot képes mérni, s ezáltal alkalmatlan a komplexebb portfóliókban szereplő kockázatról egy általános képet adni. A Bázeli szabályozás hatására került előtérbe a VaR, amely könnyű érthetősége és interpretálhatósága miatt viszonylag rövid idő alatt a kockázatkezelés alapvető mérőszámává vált. Akadémikusok azonban már röviddel a megjelenése után figyelmeztettek hibáira, ám ezek a figyelmeztetések nem jutottak el sem a pénzügyi piac szereplőihöz, sem pedig a felügyeleti szervezetekhez. Csak az elmúlt években bekövetkezett pénzügyi piaci válság után fordultak újra az akadémikusokhoz új, hatékonyabb kockázati mértéket keresve.

A VaR megjelenését követően a tudományos világ rögtön megjelentette kritikáit az új mértékkel kapcsolatban. Az első úttörő alkotást 1999-ben publikálták Artzner et al. [4], tanulmányukban a kockázati mérték „keresését” teljesen új alapokra helyezték. Ahelyett, hogy egy új kockázati mutatószámot alkottak volna, definiáltak egy axiómarendszert, amely rendszer a mérőszámmal szembeni elvárásait rögzítette, majd ezután ebben az axiomatikus környezetben próbálták meg megtalálni az alkalmas mutatószámot. Ezt a módszert alkalmazzák azóta is az akadémikusok, ha kockázati mértékekkel foglalkoznak.

Jelen tanulmány csak egy periódusú kockázati mértékekkel foglalkozik. Ezalatt olyan mutatókat értünk, amelyeket csak egy időintervallumra definiálunk. Például egy tetszőleges t időben induló T pillanatig számolt egy periódusú kockázati mérték azt mondja meg nekünk, hogy a t pillanattól a T -ig mekkora kockázatot vállalunk (a legtöbb esetben: hogyan változik a portfólió értéke), anélkül, hogy foglalkoznánk azzal, hogy mi történik a köztes időben. Általában a $t = 0$ (jelenbeli kiindulási állapot) esettel fogunk foglalkozni. Dinamikus kockázati mértékről

abban az esetben beszélünk, ha a kockázatot egy a $[t, T]$ időintervallumon definiált „időrács” mérjük, és az idő előrehaladtával a T -ig vállalt kockázat dinamikusan változik a beérkező új adatok függvényében. Az ilyen mértékek, amennyiben kellően precízen definiáltak, képesek pontosabb eredményeket produkálni, mint az egy periódusos társaik, azonban komplexitásuk miatt sokszor egész egyszerűen nem éri meg alkalmazásuk. A dinamikus kockázati mértékek kutatása kívül esik jelen anyag terjedelmén (a témában kutattak: [40], [49], [14], [5], [12]). A legismertebb kockázati mérték a VaR (Value-at-Risk – Kockázatosított érték) is egy perióduson definiált, azt mondja meg nekünk, hogy egy előre rögzített időhorizonton az esetek $A\%$ -ában mekkora minimális veszteség keletkezhet a pozíciónkon, vagy más megfogalmazásban mekkora a maximális veszteség az adott portfólión az esetek $(1 - A)\%$ -ában.

Mi a kockázati mérték?

A *kockázati mérték* egy eloszlásokon értelmezett valós értékű leképezés (függvény), jelölésünkben: $\rho: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$.¹⁶ Az X vagy Y minden esetben egy valószínűségi változót fog jelenteni, az ezeket tartalmazó halmazt pedig $\mathbb{X}$ -szel fogjuk jelölni, vagyis $\mathbb{X}$ az összes valószínűségi eloszlás halmaza. Ezen valószínűségi változókra gondoljunk úgy, mint egy pénzügyi eszköz, vagy portfólió értékváltozása mögötti véletlenre. Ezáltal a kockázati mérték egy véletlen kimenetellel rendelkező eseményhez rendel egy valós számot, ami az eloszlásról ad információt. Itt nem egy darab kimenetelhez ($X(\omega)$), hanem a lehetséges kimenetek összességéhez (az eloszláshoz) tartozik az adott érték. Az e definíció túlmenő megkötések már mind speciális kockázati mértékeket határoznak meg. Tetszőleges megkötéseknek eleget tevő kockázati mértékeket az adott megkötések által meghatározott *osztályba* tartozónak nevezzük. A megkötéseket *axiómáknak*, vagy *tulajdonságoknak* nevezzük.

Artzner et al. [4] 1999-es tanulmányukban például úgynevezett *elfogadási tartományok* szerint definiálják a kockázati mértékeket. Elgondolásuk szerint egy pénzügyi pozícióhoz tartozik egy véletlen kifizetés az intervallum lejáratakor (a különféle kimenetek), ekkor a kockázati mérték az ő általuk alkotott rendszer szerint egy elfogadási tartományba való kerülés „távolságát” méri. Ez a látszólag absztrakt elgondolás könnyen lefordítható, gondoljunk arra, hogy ahhoz, hogy egy befektetésbe belevágjon, a kockázatkezelőnek elfogadható szinten kell tartania a lehetséges veszteségeit, így az elfogadási tartomány ebben az interpretációban az a várható veszteségi küszöb, ami felett már belevágunk a befektetésbe. A kockázati mérték pedig ebben az interpretációban értelmezhető úgy is, mint az a mennyiségű készpénz, amit az adott pozíció mögé rakva fedezni tudjuk a lehetséges veszteségeinket (az elfogadási küszöbnek megfelelően). Ezt a megközelítést alkalmazza ma széles körben a kockázatkezelői szakma, a Bázeli ajánlásban megfogalmazott követelményrendszer pontosan egy ilyen küszöb meghatározását írja elő.

¹⁶ A későbbiekben mindig ρ -val fogjuk jelölni a kockázati mértéket, valamint a $\rho(X) = VaR_p(X)$ típusú jelölés egy specifikált kockázati mértéket jelent.

A szakirodalom elkülöníti egymástól a *deviáció* és *tőke-megfelelési* mértékeket. A deviáció mértékek szerint a kockázat egy céltól való eltérést jelent (ilyen pl. a szórás, variancia), míg a tőke-megfelelési mértékek szerint a kockázat úgy értelmezhető, mint a „szükséges tőke, vagy prémium” (többek között ilyen a VaR is). Albrecht [3], valamint Rockafeller et. al. [41] is kiemelik ezt a különbséget. Mi igyekszünk ennél általánosabban nézni a kockázati mértékekre, azonban némely axióma megfogalmazásakor elkerülhetetlen, hogy néhol a deviáció mértékek, néhol pedig a tőke-megfelelési mértékek szerint értelmezett kockázatra gondoljunk (az osztályok részletesebb leírása a következő fejezetben található). Államadósság-kezelési szempontból a szükséges tőke egyenlő a felmerülő többletköltséggel.

Kockázati mértékek axiómái

Egy mára egyre inkább elterjedt módszer, hogy a kockázati mutatókat egy axiomatikus rendszerben definiáljuk, amelyben ezek az axiómák jelentik e mutatók általunk elvárt tulajdonságait. Egy ilyen rendszerben kiválaszthatók vagy akár konstruálhatóak is különféle mutatók, amelyek az általunk definiált problémákra jó választ adhatnak, az axiómák segítségével pedig a mutatók több fontos és hasznos tulajdonság is levezethető. A kockázatkezelő feladata, hogy kialakítsa azt az axiómarendszert és kiválassza az ezeknek megfelelő mutató(ka)t, amelyekkel a leghatékonyabban képes felmérni a vállalt kockázatot. Ez minden esetben eltérő lehet, nincs egy egyetemes axiómarendszer, amely minden szempontból jobb lenne a többinél, hiszen a kockázat maga is egy nehezen megfogható fogalom. Általában inkább különféle elvárásokkal rendelkeznek a döntéshozók, s ennek megfelelően lehet kiválasztani, hogy mely tulajdonságok segítségével írható le a legjobban az adott probléma. Ezen axiómák több csoportba oszthatóak egyszerű racionalitás, additivitási és technikai tulajdonságok alapján (Denuit et. al. [35]). A racionalitási axiómák főként olyan tulajdonságokat határoznak meg, amelyek a legtöbb kockázati mértékre teljesülnek (pl. monotonitás), az additivitási axiómák kockázatok aggregálásával foglalkoznak, azt írják le, hogy a különféle összevonások hogyan hatnak a kockázati mértékekre. Végül a technikai axiómák, amelyek főként folytonossági tulajdonságokkal foglalkoznak, ezek jelentősége leginkább a matematikai bizonyítások szempontjából érdekes, s a legtöbb esetben nagyon nehéz szemléletesen megmagyarázni őket. Az alkalmazható axiómák alábbi listája¹⁷ nem teljes, sőt mindegyik axióma vita tárgyát képezi.

Valószínűség-eloszlás invariancia (objektivitás)

Gyakorlati szempontból talán ez az axióma nevezhető a legfontosabbnak. A gyakorlatban a különféle eloszlásokat empirikus adatokból becsüljük, vagy szimuláció révén kapunk képet X -ről. A valószínűség-eloszlás invariancia azt állítja, hogy a kockázati mérték nem önmagában X -től, hanem annak mögöttes eloszlásától F_X -től függ, vagyis $\rho(X) = \rho(F_X)$. Ez a tulajdonság biztosítja, hogy F_X tartalmazzon minden információt X kockázatának méréséhez. Máshogyan leírva:

¹⁷ Az axiómákat Ekaterina et. al. [18] szedték össze ilyen részletességgel.

$$F_X = F_Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y),$$

vagyis amennyiben X és Y pozíciók valószínűségi eloszlása megegyezik, akkor a kockázatuk is azonos. Például, ha X a pozíció mögötti tényleges véletlenszerűséget jelenti, Y pedig a számunkra rendelkezésre álló információt, vagyis múltbéli vagy szimulált adatok által meghatározott eloszlás, akkor a valószínűség-eloszlás invariancia azt mondja meg, hogy amennyiben a rendelkezésre álló adatok eloszlása „azonos”¹⁸ a valós eloszlással, akkor az adatok által jelzett kockázati mérték is „azonos” lesz a valóssal. Más szóval szimulációval, vagy empirikus adatokkal leírható a kockázati mérték.

Pozitív homogenitás

Pénzügyi szempontból a pozitív homogenitás azt állítja, hogy a pozíció méretének megváltoztatása egy pozitív konstanssal, a kockázat megváltozásához vezet ugyanezen konstanssal, matematikailag:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X),$$

minden $\lambda > 0$ konstansra és $X \in \mathbb{X}$ valószínűségi változóra. Például, amennyiben duplázzuk a pozíciónk méretét ($\lambda = 2$), akkor a vállalt kockázat is duplázódik. Sokan vitatják ezen axióma létjogosultságát, hiszen sok esetben a kockázat nem lineáris mértékben változik a pozíció méretéhez képest. Ilyen eset például a likviditási kockázat.

Monotonitás

Minden X és Y valószínűségi változó eloszlásra, ahol $X \geq Y$,

$$\rho(X) \leq \rho(Y).$$

A monotonitás következménye, hogy ha az első eszköz (X) hozama kimenetelenként nem kisebb, mint a másik eszköz (Y) hozama, akkor X kockázata nem nagyobb, mint Y -é. Tehát, ha X az egyes kimeneteleken nagyobb nyereséget (kisebb veszteséget) generál, akkor a vállalt kockázat is kisebb. Egy másik reprezentációja a monotonitás axiómának a kockázatmentes eszközzel¹⁹ a következőképp néz ki:

$$X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(0) = 0,$$

ahol $X \in \mathbb{X}$. Szemléletes jelentése: amennyiben az X eszköz kimenetelei csak számunkra kedvezőek (pozitívak) lehetnek, akkor a vállalt kockázat negatív. Amennyiben a kockázati mértéket tőke-megfelelési szempontból definiáltuk, akkor a negatív kockázat azt jelenti, hogy készpénzt vehetünk ki a portfólióból.

Nem-negativitás

¹⁸ Természetesen bizonyos hibahatáron belül.

¹⁹ Itt a kockázatmentes eszközön a matematikai szempontból kockázatmentes eszközt értjük, amelynél $\rho(0) = 0$.

$\rho(X) \geq 0$, valamint $\rho(X) > 0$ minden nem konstans X -re. A nem-negativitás ezen formája a deviáció mértékeknél jellemző elvárás.

Ha $X \geq 0$, akkor $\rho(X) \leq 0$; ha $X \leq 0$, akkor $\rho(X) \geq 0$. A tulajdonság jelentése magától értetődő, hiszen, ha X minden véletlen kimenetele számunkra pozitív, akkor a hozzá tartozó kockázat nem lehet 0-nál nagyobb, és fordítva ugyanez. Ez az axióma a tőke-megfelelési szempontból definiált kockázati mértékeknél szokott elvárás lenni.

Szimmetria

$\rho(-X) = -\rho(X)$, amely egybecseng a nem-negativitási feltétellel.

$\rho(-X) = \rho(X)$, ez a tulajdonság csak olyan mértékek esetén értelmes, amelyek felvehetnek negatív értékeket is.

Transzláció invariancia

$\alpha \geq 0$ és $C \in \mathbb{R}$ konstansokkal a transzláció invariancia a következőképpen írható le:

$$\rho(X + \alpha C) = \rho(X) - \alpha C.$$

Az axióma jelentése az hogy, ha a pozíciókhoz hozzáadunk (elveszünk, ha C negatív) bizonyos mennyiségű vagyont (pl. készpénzt), akkor az így képzett portfólió kockázata csökken (nő). Gyakorlatban az $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$ esetek használatosak, s ezek markánsan el is térnek egymástól, tulajdonképp ez a két külön eset különbözteti meg egymástól a deviáció és tőke-megfelelési mértékeket.

Ha $\alpha = 0$, akkor adott mennyiségű vagyon hozzáadása nem csökkenti a kockázatot.²⁰

Abban az esetben, ha $\alpha = 1$ akkor adott mennyiségű vagyon hozzáadásakor a kockázat ugyanennyivel csökken:

$$\rho(X + C) = \rho(X) - C.$$

Ha a konstans vagyon pozitív, vagyis $C \geq 0$, akkor

$$\rho(X + C) \leq \rho(X).$$

Ez az eredmény egyetértésben van a monotonitás tulajdonsággal; $X + C \geq X$.

A transzláció invariancia magába foglalja az alábbi esetet is:

$$\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0,$$

így kapható kockázatmentes pozíció (megfelelő bizonyossági szint mellett), ha $\rho(X)$ -t adunk az eredeti pozícióhoz X -hez. Ez adja tulajdonképp az egész lényegét, hiszen amennyiben ezt az összeget a pozíciónk mellé rakjuk, akkor bizonyos konfidenciaszint mellett „semlegesítjük” a kockázatot. Ez az axióma a tőke-megfelelési mértékre jellemző.

²⁰ Ez az axióma úgy is ismert, mint a Gaivoronsky-Pflug (G-P) transzláció invariancia [23].

Kockázat kockázatmentes C hozammal

A $\rho(C) = -C$, összefüggés az $\rho(X + C) = \rho(X) - C$ feltételből következik. Ha $C > 0$, akkor a pozíció stabil, a kockázat negatív. Az ellentéte történik, ha $C < 0$.

$\rho(C) = 0$, a kockázat nem változik a kockázatmentes hozam hatására.

Várhatóérték-korlátozottság

Az axióma annyit mond, hogy a portfólió, vagy eszköz kockázata mindig nagyobb, mint a hozama várható értékének mínusz egyszerese.

$$\rho(X) \geq -E(X),$$

valamint szigorú egyenlőtlenség teljesül minden nem konstans X esetén. Az axiómát Rockafeller et. al. [41] vezette be tőke-megfelelési mértékekre.

Alsó tartománybeli dominancia

Deviáció mértékek rendelkeznek alsó tartománybeli dominanciával, amely a következő formában írható le:

$$\rho(X) = \mathcal{D}(X) \leq E(X),$$

nem negatív véletlen változókra ($X \geq 0$). Az első egyenlőség csak egy új jelölést vezet be a deviáció mértékekre, ezentúl a deviáció mértékeket az írott $\mathcal{D}$ -vel jelöljük.

Kockázatok összege

Vegyünk két valószínűségi változót: $X, Y \in \mathbb{X}$, legyen az általuk alkotott portfólió az $X + Y$.

Szub-additivitás

A szub-additivitás azt állítja, hogy egy portfólió kockázata nem nagyobb, mint a benne szereplő komponensek kockázatának összege. Más szóval „egy fúzió nem teremt extra kockázatot” (Artzner et al. [4]).

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Ezen tulajdonság teljesítése a diverzifikációs hatás teljesülését jelenti. Artzner et al. [4] ragaszkodik a szub-additivitáshoz, úgy vélik, hogy ahhoz, hogy egy kockázati mérték koherens legyen, elengedhetetlen a szub-additivitás, azonban empirikus vizsgálatok azt sugallják, hogy a szub-additivitás nem mindig teljesül a valóságban. Heyde et. al. [10] cikkükben rámutattak, hogy a szub-additivitás sokszor problémákhoz vezet. Néha ugyanis jobban megéri a kockázatos befektetéssel foglalkozó divíziókat különálló al-cégekbe szervezni, hiszen ezáltal egy kockázatos ügymenet csődje nem feltétlen rántja magával a teljes céget, mint ahogy az történt a brit Barings Bank esetében is. A bankot 1995-ben a szingapúri divízió vitte csődbe mégpedig úgy,

hogy egy tőzsdei kereskedő határidős ügyletein 1,4 milliárd dollárt veszített, ebből pedig egyértelműen látszik, hogy a fúzió néha éppen extra kockázatot jelent.

Comonoton-additivitás

A comonoton additivitás a következőként írható le:

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

Ez a tulajdonság független és comonoton²¹ véletlen változókra X és Y -ra teljesül. Szemléletesen a comonotonitás a tökéletes pozitív függőséget jelenti a komponensek között, a közgazdaságtanban ez annyit jelent, hogy ugyanarra a hatásra teljesen ugyanúgy reagálnak a komponensek, mondhatni comonoton pénzügyi instrumentumok portfólióba válogatása nem tünteti el az egyes instrumentumokban rejlő egyedi kockázatot.²²

Szuper-additivitás

A szuper-additivitás azt állítja, hogy a portfólió kockázata *lehet* nagyobb, mint a benne szereplő komponensek kockázatának összege.

$$\rho(X + Y) \geq \rho(X) + \rho(Y)$$

Többek között a VaR is lehet szuper-additív, ennek elemzésével több tanulmányban is foglalkoznak: Wirth [30], Embrechts et. al. [36], illetve Dhaene et. al. [28].

Konvexitás

Minden $X, Y \in \mathbb{X}$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ -re a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y)$$

A konvexitás biztosítja a diverzifikációs hatást, sőt valójában a szub-additivitás és a pozitív homogenitás axiómák egy gyengített formája. Értelmezése: ha X eszköz λ súllyal szerepel a portfólióban, míg az Y eszköz $1 - \lambda$ súllyal, akkor az így konstruált $X + Y$ portfólió kockázata nem lehet nagyobb, mint az eszközök kockázatának azonos súlyozású összege.

Konzisztencia

Valószínűségelméletben és a matematikai statisztikában a sztochasztikus rendezés számszerűsíti azt a fogalmat, hogy az egyik valószínűségi változó „nagyobb”, mint a másik. A sztochasztikus rendezést a $\leq$, $\geq$ operátorokkal fogjuk jelölni. A „szokásos” sztochasztikus rendezés azt mondja, hogy egy valós véletlen valószínűségi változó (X) nagyobb, mint egy másik valós véletlen valószínűségi változó (Y) a szokásos sztochasztikus rendezés szerint, ha $P(X > x) \geq P(Y > x)$ minden $x \in (-\infty, \infty)$ -re, amennyiben szigorú egyenlőtlenség is fennáll

²¹ Egy véletlen vektorváltozó ($X = (X_1, \dots, X_n)$) comonoton, ha $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \min_{i=\{1, \dots, n\}} P(X_i \leq x_i)$, ahol $(x_1, \dots, x_n)$.

²² Comonoton additivitás témában Dhaene et. al. [26], [27], Wang és Dhaene [50] kutattak.

néhány x -re, akkor beszélünk szigorú sztochasztikus rendezésről. A továbbiakban tehát a sztochasztikus rendezés jelölése: $X \succcurlyeq Y$, vagy a szigorú esetben $X \succ Y$.

A *sztochasztikus dominancia* a sztochasztikus rendezés egy formája. Sztochasztikus dominanciáról döntéseméleti kontextusban beszélünk, amikor például két fogadásról el tudjuk dönteni, hogy az egyik „dominálja” a másikat. A sztochasztikus dominancia a kimenetekkel kapcsolatos preferenciákon alapszik. Ennek sok formája lehet, akár egy sima rendezés a leginkább várttól a legkevésbé vártig, de akár érték-mérték is lehetséges (pl. 2 körben nyerni 1 forintot, vagy 1 körben 2-t). *Determinisztikus dominanciáról* akkor beszélünk, ha az egyik fogadás legrosszabb kimenetele jobb, mint a másik fogadás legjobb kimenetele. Az *állapot szerinti dominancia* két fogadást úgy hasonlít össze, hogy megnézi az egyes kimeneteket és azokat páronként veti össze, pl. dobókockával való dobás: az X esetén 1 forintot nyerünk, ha a dobás 1 – 3, 2-t, ha 4 – 6, míg Y fogadás esetén 1 – 3 esetén 0 forintot nyerünk, 4 – 6 esetén 1-t, vagy ha a lottót nézzük, és azt mondjuk, hogy a tegnapi lottónyeremények mindegyikéhez (5-ös találat, 4-es találat,...) hozzáadunk 1 forintot, akkor az új lottó *állapot szerint dominálja* a régit.

A konzisztencia tulajdonság biztosítja, hogy karakterizálni tudjuk az optimális portfóliók halmazát (Ortobelli et. al. [44] valamint Rachev et. al. [39]).

Az **n -edrendű sztochasztikus dominancia** a következő általános alakban írható:

$$X \succcurlyeq_n Y \Leftrightarrow \rho(X) \geq \rho(Y).$$

Gyakorlatban az n maximális értéke 2; $n = 0$ éppen a monotonitás tulajdonságot jelenti. A különböző rendű sztochasztikus dominanciák tulajdonképp egy rendezést adnak meg $\mathbb{X}$ elemei között. Erre azért van szükség, hogy különbséget tudjunk tenni az egyes kifizetések között, vagyis el tudjuk dönteni melyik a kockázatosabb, illetve melyik a kevésbé kockázatos pozíció.

Elsőrendű sztochasztikus dominancia (FSD)

$$\text{Ha } X \succcurlyeq_1 Y \Leftrightarrow F_X(x) \leq F_Y(x)$$

Ha egy befektető X -t preferálja Y -hoz képest, akkor az FSD azt fogja jelezni, hogy X kevésbé kockázatos, mint Y . Ha u hasznossági függvény, akkor a következőképp írható fel:

$$\text{Ha } X \succcurlyeq_1 Y \Leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)]$$

minden növekvő hasznossági függvényre. Az FSD karakterizálja a kockázat-kedvelő befektetők preferenciáit. Ortobelli et. al. [44] tanulmányukban az elsőrendű sztochasztikus dominanciával rendelkező kockázati mértékeket *biztonsági-kockázati mértékek*ként definiálta (az osztályról a következő fejezetben lesz szó).

Rothschild-Stiglitz sztochasztikus dominancia (RSD). Az RSD-t Rothschild és Stiglitz [43] mutatta be és a következőképp néz ki:

$$\text{Ha } X \succcurlyeq_{RS} Y \Leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

minden konkáv, nem csökkenő u hasznossági függvényre. Az RSD a kockázatkerülő befektetők preferenciáit mutatja meg. Ortobelli et. al. [44] az RSD-vel rendelkező kockázati mértékeket *diszperziós (szórás) kockázati mértékeknek* hívja.²³

Másodrendű sztochasztikus dominancia (SSD). Az SSD-t először Hadar and Russell [25] mutatta be. Az SSD a következőképp írható le:

$$\text{Ha } X \succcurlyeq_2 Y, \quad E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

minden növekvő, konkáv u hasznossági függvényre. SSD a nem kielégíthető kockázatkerülő befektetőket karakterizálja.

Sztochasztikus rendezés - stop-loss. Y dominálja X -t ($Y \geq_{SL} X$) stop-loss rendezés szerint, ha bármilyen α -ra az alább egyenlőtlenség teljesül:

$$E[(Y - \alpha)^+] \geq E[(X - \alpha)^+].$$

Itt $\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}$. Ilyen rendezés alapvető jelentőségű a biztosítási szakmában. Amennyiben a biztosító vállalja a felelősséget az α -nál nagyobb követelések esetén, akkor a várható Y követelés nem kisebb, mint X .

Konvex rendezés. Y dominálja X -t a konvex rendezés szerint ($Y \geq_{CX} X$), ha $Y \geq_{SL} X$ teljesül és $\alpha = -\infty$ a stop-loss rendezés szerint, más szóval $E[X] = E[Y]$. A konvex rendezés kapcsolódik a kockázatkerüléshez.

Folytonosság

A folytonossági axiómák technikai jellegű axiómák, leginkább a kockázati mértékek matematikai tulajdonságainak leírásához szükségesek. Mivel az összefoglalónak nem célja az egyes matematikai tulajdonságok, következmények levezetése, ezért ezeket itt most csak felsoroljuk.

Valószínűség konvergenciabeli folytonosság: Ha $X_n \xrightarrow{P} X$, akkor $\rho(X_n)$ konvergál és határértéke $\rho(X)$.

Gyenge topológiai folytonosság: Ha $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$, akkor $\rho(F_{X_n})$ konvergál és határértéke $\rho(F_X)$.

Vízszintes eltolásbeli folytonosság: $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(X + \delta) = \rho(X)$.

A lehetőség a tetszőleges kockázat közelítésre véges hordozóval az alábbi egyenlettel írható le:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \rho(\min\{X, \delta\}) = \lim_{\delta \rightarrow -\infty} \rho(\max\{X, \delta\}) = \rho(X).$$

Alsó részleges-folytonosság: Minden $C \in \mathbb{R}$, a halmaz $\{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq C\}$ $\sigma(L^\infty, L^1)$ - zárt.

²³ Ortobelli et. al. [44] a kockázati mértékeket a portfólió-kiválasztási probléma oldaláról közelítette meg.

Fatou tulajdonság: Minden korlátos folyamatra (X_n) amire $X_n \xrightarrow{P} X$, a következő teljesül:

$$\rho(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n).$$

Ezek a tulajdonságok – bár itt részletesen nem fejtjük ki őket – fontosak a kockázati mértékek esetében, segítségükkel írhatóak le az egyes kockázati mértékek matematikai tulajdonságai, valamint különféle bizonyításokhoz elengedhetetlenül fontosak.

Allokáció

Egy kockázati mérték nem szükséges, hogy egy valószínűségi változó teljes értéktartományán definiálva legyen. Formálisan, adott egy halmaz U , az $F_X = F_Y$ feltétel mellett, ha $x \notin U$, akkor $\rho(X) = \rho(Y)$. Érdekes módon ez a tulajdonság csak valószínűségi-törvény invariáns mértékek esetében teljesül. Legtöbbször egy T küszöbérték van hozzárendelve, úgy hogy az U halmaz a $U = (-\infty, T]$ vagy $U = [T, \infty)$ -n értelmezett.

A pénzügyi szakma csak az utóbbi másfél évtizedben kezdett el mélyebben foglalkozni a kockázat mérésének különféle módjaival, miután a Bázeli szabályozás hatására előtérbe került a kockázatotott érték (VaR). A biztosítási szakma azonban már ezt megelőzően is komolyabban foglalkozott a témával, aktuáriusok már a 70-es évek óta vizsgálják, hogy miként lehetne a lehető leghatékonyabban mérni a kockázatot. A torzított kockázati mértékek koncepciója is a biztosítási szakma eredménye, amely egy az addigiaknál lényegesen általánosabb osztályt jelent. Az alábbi három axióma a torzított kockázati mértékek osztályára lett kimondva (Balbás et. al. [6]). A cikkben a szerzők kifogásokat fogalmaznak meg a szokásos kockázatotott érték és feltételes kockázatotott értékkel szemben, kiemelve, hogy némely esetben inkonzisztens döntésekhez vezet használatuk, ezekre a kritikákra válaszul definiálják az alábbi axiómákat. Az osztályt bővebben a következő fejezetben fogjuk csak bemutatni.

Az osztály bemutatásához használni fogjuk a túlélési függvényt, amely azt mondja meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az X úgymond „túléli” x -et. Jelölése: $S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X \geq x)$.

Teljesség

Legyen ρ_g egy torzított kockázati mérték, amelyet a

$$\rho_g(X) = E_{P^*}(X) = \int_0^\infty g[S_X(x)]dx - \int_{-\infty}^0 \{1 - g[S_X(x)]\}dx,$$

generál, ahol P^* a torzított valószínűség, $S_X(x)$ a túlélési függvénye X -nek. Azt mondjuk, hogy ρ_g teljes torzított kockázati mérték, ha:

$$S_X(x_1) = S_X(x_2) \Leftrightarrow S_X^*(x_1) = S_X^*(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in [0, \infty),$$

ahol S^* a torzított eloszlás túlélési függvénye.

Teljes körűség

Egy kockázati mérték számára sokszor nem csak az fontos, hogy szub-additív legyen, hanem az is, hogy minden rendelkezésre álló információt felhasználjon. ρ_g egy torzított kockázati mérték, amelyet $\rho_g(X) = E_{P^*}(X)$ generál, mint fent. Azt mondjuk, hogy ρ_g *teljes körű torzított kockázati mérték*, ha koherens és teljes (teljesülnek rá a pozitív homogenitás, szub-additivitás, monotonitás, $\rho(X + C) = \rho(X) - C$, valamint a teljességi axiómák).

Adaptáltság

Egy torzított kockázati mérték *adaptált*, ha a torzító függvényére teljesül:

- 1) g szigorúan konkáv, vagyis g' szigorúan csökken
- 2) $\lim_{u \rightarrow 0^+} g'(u) = \infty$ és $\lim_{u \rightarrow 1^-} g'(u) = 0$.

Függelék 3: Kockázati mértékek osztályai

A kockázati mértékek osztályozása tulajdonképpen az előző függelékben összegyűjtött axiómák egy tetszőleges részhalmazának vétele. Egy kockázati mérték viselkedésének leírására a különféle axiómák egy részét válogatjuk ki preferenciáinknak megfelelően. Ezután olyan leképezéseket keresünk, amelyek teljesítik a számunkra fontos tulajdonságokat. Az ilyen leképezések egyik alapvető karakterisztikája, hogy a magasabb bizonytalanságú hozam magasabb kockázatot jelentsen.

Koherens kockázati mértékek

A koherens kockázati mértékek ötletét Artzner et. al. [4] vetették fel. Koherens kockázati mértékeknek azokat hívjuk, amelyek teljesítik a *transzláció invariancia*, *szub-additivitás*, *monotonitás* és *pozitív homogenitás* tulajdonságokat. Általánosságban a következőképp írhatóak fel:

$$\rho(X) = \sup_{P \in \mathcal{Q}} E_P[-X],$$

ahol $\mathcal{Q}$ egy valószínűségi mértékosztály²⁴ Ω -n, X pedig nyereség-veszteség eloszlás.

Az említett négy kritérium alapozza meg ezen kockázati mértékek kiválasztásának és kiértékelésének szabályait. Azonban nem minden szabály alkalmazható minden szituációban, bizonyos helyzetekben némely axióma felülvizsgálatra szorulhat. Wang [48] úgy véli, hogy egy kockázati mértéknek tovább kellene lépnie e tulajdonságokon, hogy még több információ kerüljön hasznosításra. Dhaene et. al. [15] cikkében a biztosítási szektorban megfigyelhető „legjobb gyakorlati szabályokat” elemezve arra a következtetésre jutott, hogy a koherens kockázati mértékek problémákhoz vezetnek.

Artzner et. al. [4] a *feltételes várható extrém érték* (TCE, tail conditional expectation), illetve a *legrosszabb feltételes várakozás* (WCE, worst conditional expectation) mértékeket ajánlják. A feltételes várható extrém értéket a következőképp írhatjuk le:

$$TCE^\alpha(X) = -E\{X|X \leq -VaR_\alpha(X)\},$$

míg a legrosszabb feltételes várakozást a következőképpen:

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\{E(X|A)|A \in \mathcal{F}, P(A) > \alpha\},$$

ahol X a nyereség-veszteség eloszlást jelenti, mint eddig, $\alpha \in (0,1)$ pedig a bizonyossági szintet (ez legtöbbször 95%, vagy 99%).

²⁴ Valószínűségi mértékosztály alatt valószínűségi eloszlások egy családjára gondolunk.

Konvex kockázati mértékek

A konvex kockázati mértékeket (más néven gyengén koherens kockázati mértékek) Föllmer és Schied [19], [20] valamint Frittelli és Rosazza Gianin [21] tanulmányozta. A konvex kockázati mértékek a koherens kockázati mértékek általánosításaként kaphatóak, mégpedig a *pozitív homogenitás* és *szub-additivitás* axiómák együttesénél gyengébb *konvexitás* axiómára cserélésével. A konvex kockázati mértékek a következőképp karakterizálhatóak:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} (E_Q[-X] - \alpha(Q)),$$

ahol α egy büntető függvény, amely a Ω -n definiált valószínűségi mértékeken van definiálva, X pedig nyereség-veszteség eloszlás. A $\rho : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál konvex kockázati mérték, ha teljesíti a *konvexitás*, *alsó részleges-folytonosság*, és *normalizáció* ($\rho(0) = 0$) tulajdonságokat.

Konvex kockázati mérték a *várható súlyos veszteség*²⁵ (ES, Expected Shortfall), vagy más néven *feltételes kockázatotott érték* (CVaR, Conditional Value-at-Risk), amely az α küszöb feletti VaR_u -k átlaga:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

Valószínűség-eloszlás invariáns kockázati mértékek

Kusuoka [33] jelöléseit követve, valószínűségi-törvény invariáns koherens kockázati mértékek a következő formában írhatóak le:

$$\rho_\alpha(X) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 Z_{-X}(x) dx$$

ahol $Z : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ nem csökkenő, jobbról folytonos függvény. Ez az osztály teljesíti az *alsó részleges-folytonosság* tulajdonságot minden $X \in L^1, 0 \leq \alpha \leq 1$, valamint a koherens kockázati mértékek tulajdonságait. Az osztályba tartozó mértékek legfontosabb tulajdonsága, hogy alkalmazhatóak a gyakorlatban is. Ide tartozik többek között a várható súlyos veszteség is. A Wang et. al. [45] tanulmányukban szereplő kockázati mérték éppen egy valószínűség-eloszlás invariáns kockázati mértéket ír le, a biztosítási árakkal szembeni elvárásai: a valószínűség-eloszlás invariancia, monotonitás, comonoton additivitás valamint a $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \rho(\min\{X, \delta\}) = \lim_{\delta \rightarrow -\infty} \rho(\max\{X, \delta\}) = \rho(X)$ axiómák.

²⁵ A várható súlyos veszteséggel a későbbiekben részletesebben is fogunk foglalkozni.

Spektrális kockázati mértékek

Az osztályt Acerbi [1] definiálta. A spektrális kockázati mértékek úgy definiálhatóak, hogy a koherens kockázati mértékek axiómáihoz hozzávesszük még a *valószínűségi-törvény invariancia* és *comonoton additivitás* tulajdonságokat. A spektrális kockázati mértékek a nyereség-veszteség eloszlás kvantiliseinek súlyozott átlagaiból állnak, ahol a súlyozó függvény egy nem növekvő függvény, amelyet spektrumnak hívunk és ϕ -vel jelöljük. A következőképp van definiálva:

$$M_{\phi}(X) = - \int_0^1 \phi(x) F_{\bar{X}}(x) dx,$$

ahol ϕ egy nem-negatív, nem növekvő, jobbról folytonos integrálható függvény a $[0,1]$ -n valamint olyan, hogy $\int_0^1 \phi(x) dx = 1$. ϕ -re tett feltételezések döntenek el, hogy koherens-e a spektrális kockázati mérték. Amennyiben bármely fenti feltételezés gyengítésre kerül, akkor a kockázati mérték már nem koherens. A spektrális kockázati mértékek a *pozitív homogenitás*, *transzláció invariancia*, *monotonitás*, *szub-additivitás*, *valószínűségi-törvény invariancia*, *comonoton additivitás*, *másodrendű sztochasztikus dominancia* axiómákkal jellemezhetők.

Az $L^1([0,1])$ normált tér ($\|\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)| dx$) egy ϕ eleméről azt mondjuk, hogy **elfogadható kockázati spektrum**, ha

- 1) ϕ pozitív,
- 2) ϕ csökkenő,
- 3) $\|\phi\| = 1$.

A $\phi(x)$ függvény különböző $\phi(x)$ súlyokat helyez különböző "*x-konfidenciaszint darabokhoz*" az eloszlás bal farkában. A normalizáció biztosítja, hogy a súlyok összege 1 legyen. Az, hogy egy elfogadható kockázati spektrum $\phi(x)$ monoton csökkenő függvény x -ben, intuitívan mutatja a koherencia lényegét ("egy mérték koherens, ha nagyobb súlyt rendel a rosszabb kimenetekhez" Acerbi [1]).

Bármely racionális befektető kifejezheti kockázatkerülő magatartását úgy, hogy különféle súlyokat ad a ϕ súlyfüggvénynek. A koherencia megtartásához csak egy dologra kell figyelnie, hogy ϕ pozitív, csökkenő és $[0,1]$ -n normalizált legyen. Ezen megkötéseken belül tetszőleges választású ϕ egy tökéletesen igazolt kockázati étvágyat fog reprezentálni.

Példák

- 1) Kockázatotott Érték (VaR):

$$\phi_{\alpha}(x) = \delta(x - (1 - \alpha)),$$

ahol δ jelenti az ún. Dirac deltát: $\delta(x): \int_a^b f(x) \delta(x - c) dx = f(c) \forall c \in (a, b)$

- 2) Feltételes Kockázatotott Érték (CVaR):

$$\phi_{\alpha}(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1 - \alpha\}}$$

Deviáció mértékek

A szakirodalomban a kockázati mértékek osztályozásakor két egymástól elkülönülő csoportba osztják a kockázati mértékeket. Az általunk megfogalmazott kockázati mérték igyekszik a témát a lehető legáltalánosabban megfogni, ám pont ez a megközelítés rendkívül nehéz is teszi a feladatot. A veszteséget ugyanis nem mindegy, hogy miként definiáljuk. Matematikailag elérhető, hogy egy portfólió teljesen kockázatmentessé váljon abból a szempontból, hogy pénzt nem bukhatunk rajta, azonban ettől még a nyereségünk ingadozhat. Kérdés tehát, hogy a kockázatot miként definiáljuk, mire gondolunk, amikor egy portfólió kockázatáról beszélünk. Ezt a különbséget fogják meg tanulmányukban Rockafeller et al. [41], Ortobelli et. al. [44] valamint Albrecht [3]. A lényegi különbség a kétfajta elgondolás szerint, hogy az egyik a véletlen változóban szereplő bizonytalanságot méri, míg a másik a veszteség kizárásához szükséges tőkét, vagy ami államadósság-kezelési szempontból számunkra fontos: felmerülő költségtöbbletet. A legtöbb akadémikus csak az utóbbit tartja „rendes” kockázati mértéknek. Ortobelli et. al. [44] a portfólió-kiválasztási probléma kapcsán a két osztályt diszperziós (szórás alapú) és biztonsági kockázati mértékeknek hívják, míg Rockafeller et. al. [41] deviáció és várhatóérték-korlátozott kockázati mértékeknek nevezik. Mi a szórás-alapú mértékeket deviáció, míg „szükséges tőke” alapú mértékeket tőke-megfelelési mértékeknek hívjuk.

A deviáció mértékeket Rockafeller et. al. [41] a *Gaivoronsky-Pflug transzláció invariancia*, *pozitív homogenitás*, *szub-additivitás* valamint a *nem-negativitás* axiómákkal jellemzik. Példaként a szórás, a variancia és a standard szemideviáció ($\mathcal{D}(X) = \sigma_+(X) = \sqrt{E[\max\{X - E(X), 0\}^2]}$, $\mathcal{D}(X) = \sigma_-(X) = \sqrt{E[\max\{E(X) - X, 0\}^2]}$) említhető.

Várhatóérték-korlátozott kockázati mértékek

Rockafeller et al. [41] ajánlotta a várhatóérték-korlátozott mértékeket is, mégpedig a *szub-additivitás*, *pozitív homogenitás*, *transzláció invariancia* és a *várhatóérték-korlátozottság* tulajdonságokkal. Tipikus példa a kockázatotott érték (VaR), a feltételes kockázatotott érték (CVaR). Létezik egy egy- az-egyben kapcsolat a deviáció mértékek és a várhatóérték-korlátozott kockázati mértékek között. Levezethető a várhatóérték-korlátozott koherens mértékek osztálya is a *monotonitás* hozzá vételével.

Legyen $\mathcal{D}(X)$ egy deviáció mérték $\mathcal{R}(X)$ pedig egy várható érték-korlátozott kockázati mérték, ekkor;

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{R}(X - E(X)), \quad \text{és} \quad \mathcal{R}(X) = \mathcal{D}(X) - E(X)$$

Példák

- 1) Ha $\mathcal{R}(X) = \lambda(E[(X - E(X))^2])^{\frac{1}{2}} - E[X] = \lambda\sigma(X) - \mu(X)$, akkor $\mathcal{D}(X) = \lambda\sigma(X)$, minden $\lambda > 0$
- 2) $\mathcal{R}(X) = \text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x | P(X \leq x) > \alpha\}$, akkor $\mathcal{D}(X) = \text{VaR}_\alpha^\Delta(X) = \text{VaR}_\alpha(X - E[X])$

$$3) \mathcal{R}(X) = CVaR_\alpha(X), \text{ akkor } \mathcal{D}(X) = CVaR_\alpha^\Delta(X) = CVaR_\alpha(X - E[X])$$

Kvantilis alapú kockázati mértékek

A kvantilis alapú mértékek osztályába tartozik többek között a **kockázatosított érték** (VaR), **várható súlyos veszteség** (ES vagy CVaR), **feltételes várható extrém érték** (TCE) és **legrosszabb feltételes várakozás** (WCE). Az alábbiakban ezeket mutatjuk be. Az alábbiakban X minden esetben *nyereség-veszteség eloszlást* jelent.

A **Kockázatosított érték (VaR)** azt mondja meg, hogy mekkora a minimum veszteség adott konfidenciaszint mellett. A formális definíciója:

$$VaR_\alpha(X) = q_\alpha(-X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(-X \leq x) \geq 1 - \alpha\}$$

A VaR a következő tulajdonságokkal rendelkezik: monotonitás, pozitív homogenitás, transláció invariancia, valószínűségi-törvény invariancia, comonoton additivitás. A VaR rendelkezik a szub-additivitás tulajdonsággal is elliptikus veszteségeloszlások esetén, ám ezek rendkívül ritkák a gyakorlatban.

A **Várható súlyos veszteség (ES, Expected Shortfall)**, más néven feltételes kockázatosított érték (**CVaR, Conditional Value-at-Risk**) amely egy α küszöb feletti VAR_u -k átlaga:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du, \quad \alpha \in (0,1)$$

Az ES (CVaR) a VaR alternatívájaként lett ajánlva, amely kiküszöböli annak egyes gyengeségeit. Az ES a következő tulajdonságokkal rendelkezik: *valószínűségi-törvény invariancia, transláció invariancia, comonoton additivitás, folytonosság, monotonitás* valamint *szub-additivitás*. Artzner et al. [4] szerint a CVaR „jó” kockázati mérték, mert koherens.

A **Feltételes várható extrém érték (TCE, Tail Conditional Expectation)** Artzner et al. [4]-től származik a következő alakban:

$$TCE^\alpha(X) = -E\{X|X \leq -VaR_\alpha(X)\},$$

TCE^α nem szub-additív általános esetben, csak folytonos eloszlásokra lesz koherens.

A **Legrosszabb feltételes várakozás (WCE, Worst Conditional Expectation)** a következőképp definiált:

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\{E(X|A)|A \in \mathcal{F}, P(A) > \alpha\},$$

$WCE_\alpha(X)$ nem valószínűségi-törvény invariáns, ezáltal nem becsülhető pusztán empirikus adatokból. Ilyen mérték használata különböző kockázatokhoz vezethet két olyan portfólió esetében, amelyeknek ugyanolyan a nyereség-veszteség eloszlása.

Összehasonlítva az ES, TCE és WCE hármast a következő egyenlőtlenség írható fel:

$$TCE^\alpha(X) \leq WCE_\alpha(X) \leq ES_\alpha(X).$$

Amennyiben X eloszlása folytonos, akkor $TCE^\alpha(X) = WCE_\alpha(X) = ES_\alpha(X)$.

Áresés mértékek

Az áresés mértékek intuitív mértékek, jellemzően a jelenlegi helyzetet a legjobb múltbéli helyzettel hasonlítják össze. Az áresés mértékek lokális minimum és lokális maximum értékek különbségét méri. Cheklov et al. [11] úgy definiálta az áresés függvényt, mint a teljes portfólió értékének maximuma t -ig illetve a t -beli értékének különbségét.

Az áresés mértékek nagyon hasonlítanak a deviáció mértékekhez. Bár előnyük, hogy rendkívül egyszerűen programozhatóak, az áresés mértékek nem képesek leírni a valós helyzetet a piacon, ennél fogva leginkább más kockázati mértékekkel együtt érdemes használni őket.

Példák

Legyen $w(x, t)$ a teljes portfólió hozam t időben, ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ jelöli a portfólióban szereplő m eszköz súlyát.

1) Áresés (D):

$$D(x, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{w(x, \tau)\} - w(x, t)$$

2) Abszolút áresés (AD):

$$AD(x, t) = |D(x, t)|$$

3) Maximum áresés (MDD): a $[0, T]$ intervallumon

$$MDD(x, T) = \max_{0 \leq t \leq T} D(x, t)$$

4) Átlagos áresés (AvDD):

$$AvDD(x, T) = \frac{1}{T} \int_0^T D(x, t) dt$$

5) Feltételes kockázatos áresés (CDaR):

$$CDaR_p(x, T) = \min_a \left\{ a + \frac{1}{(1-p)T} \int_0^T [D(x, t) - a]^+ dt : a \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol $[z]^+ = \max(0, z)$. Ha $\alpha \rightarrow 1$, akkor $CDaR$ tart a maximális áreséshez, vagyis $CDaR_1(x, T) = MDD(x, T)$, valamint, ha $\alpha \rightarrow 0$, akkor $CDaR$ egyenlő lesz az átlagos áreséssel, vagyis $CDaR_0(x, T) = AvDD(x, T)$.

Torzított kockázati mértékek

A torzított kockázati mértékek arról kapták elnevezésüket, hogy a veszteség-eloszlásban szereplő valószínűségi mértéket eltorzítják, más szóval átsúlyozzák az eloszlásban szereplő

információt úgy, hogy a számunkra fontosabb része nagyobb hangsúlyt kapjon. Legegyszerűbb példa a VaR, ahol az átsúlyozás következményeként 1 (vagyis minden) súlyt az α -kvantilis kapja, az eloszlás többi részére (sem az α -kvantilis alatti, sem pedig az afeletti részre) pedig nem helyezünk súlyt. Azáltal, hogy bármilyen súlyozást meghatározhatunk, ez az osztály rendkívül általános értelemben definiálja a kockázati mértékeket. A következőkben az osztály matematikai definícióját, valamint tulajdonságait mutatjuk be.

Egy torzított kockázati mérték, amely *veszteségeloszlásokra* van definiálva és bármely valós értéket felvehet, a következőképp van definiálva:

$$\rho_g(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(x) d\tilde{g}(x) = - \int_{-\infty}^0 \tilde{g}(F_X(x)) dx + \int_0^{\infty} [1 - \tilde{g}(F_X(x))] dx,$$

ahol $\tilde{g}(u) = 1 - g(1 - u)$ és $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ egy folytonos, nem csökkenő függvény, amely $g(0) = 0$ és $g(1) = 1$; F_X jelöli az X eloszlásfüggvényét, míg $g(F_X(x))$ -t torzított eloszlásfüggvénynek szokták hívni. Nagyon hasonló képletet kapunk, ha X túlélési függvényét használjuk $S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ az eloszlásfüggvény helyett,

$$\rho_g(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 [1 - g(S_X(x))] dx,$$

g -t általában torzító függvénynek hívjuk, míg $\tilde{g}$ a g torzító függvény duálisa. $P^*(A) := \mu(A) = g[P(X \in A)]$, ahol P egy valószínűségi mérték, X véletlen valószínűségi változó, P^* a torzított valószínűség. Hasonlóan $\tilde{P}^*(A) := \tilde{\mu}(A) = \tilde{g}[P(X \in A)]$. A fenti egyenlőtlenségek a Choquet integrálreprezentációból származnak:

$$\rho_g[X] = \int X dP^* = \int X^+ dP^* - \int X^- d\tilde{P}^*,$$

ha ezek az integrálok végesek.

Tulajdonságok

- 1) Ha $X \geq 0$, akkor $\rho_g(X) \geq 0$ (monotonitás).
- 2) $\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X)$, minden $\lambda \geq 0$ (pozitív homogenitás).
- 3) $\rho_g(X + c) = \rho_g(X) + c$, minden $c \in \mathbb{R}$ (transzláció invariancia).
- 4) $\rho_g(-X) = -\rho_{\tilde{g}}(X)$, ahol $\tilde{g}(x) = 1 - g(1 - x)$.
- 5) Ha $X_n \xrightarrow{w} X$ és $\rho_g(X)$ létezik, akkor $\rho_g(X_n) \rightarrow \rho_g(X)$.
- 6) Ha X és Y olyan comonoton véletlen változók, amelyek pozitív és negatív értékeket is felvesznek, akkor: $\rho_g(X + Y) = \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ (comonoton additivitás).
- 7) Torzított kockázati mértékek akkor és csak akkor szub-additívak, ha a torzító függvény $g(x)$ konkáv: $\rho_g(X + Y) \leq \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ (szub-additivitás). Ezáltal a konkáv torzító függvényekre definiált torzított kockázati mértékek koherensek.
- 8) Ha a g torzító függvény nem csökkenő, akkor a hozzá tartozó kockázati mérték ρ_g konzisztens az elsőrendű sztochasztikus dominanciával;

$$X \preceq_1 Y \Rightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$$

- 9) Ha a g torzító függvény nem csökkenő és konkáv, akkor a hozzá tartozó kockázati mérték ρ_g konzisztens a másodrendű sztochasztikus dominanciával;

$$X \preceq_2 Y \Rightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y) \quad (5.2.12.4)$$

Ennek eredményeként minden koherens torzított kockázati mérték konzisztens a másodrendű sztochasztikus dominanciával.

- 10) Ha g torzító függvény szigorúan konkáv, akkor a hozzá tartozó kockázati mérték ρ_g szigorúan konzisztens a másodrendű sztochasztikus dominanciával;

$$X \prec_2 Y \Rightarrow \rho_g(X) < \rho_g(Y)$$

Példák:

- 1) A $g(x) = x$ függvénnyel a $\rho_g(X) = E[X]$ -t kapjuk (amennyiben $E[X]$ létezik)
- 2) Kockázatotott érték (VaR):

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1 - \alpha; \\ 1, & \text{ha } 1 \geq x \geq 1 - \alpha. \end{cases}$$

- 3) Feltételes kockázatotott érték (CVaR):

$$g_\alpha(x) = \min\left(\frac{x}{1 - \alpha}, 1\right), \quad x \in [0, 1]$$

- 4) Arányos hazard transzformált:

$$g_\alpha(x) = x^{1-\alpha}$$

- 5) Duális-erő transzformált:

$$g_\alpha(x) = 1 - (1 - x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- 6) Dennensberg abszolút deviáció szabálya:

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} (1 + (1 - \alpha))x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \alpha + (\alpha)x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

- 7) Gini szabálya:

$$g_\alpha(x) = (1 + (1 - \alpha))x - (1 - \alpha)x^2$$

- 8) Négyzetgyök transzformált:

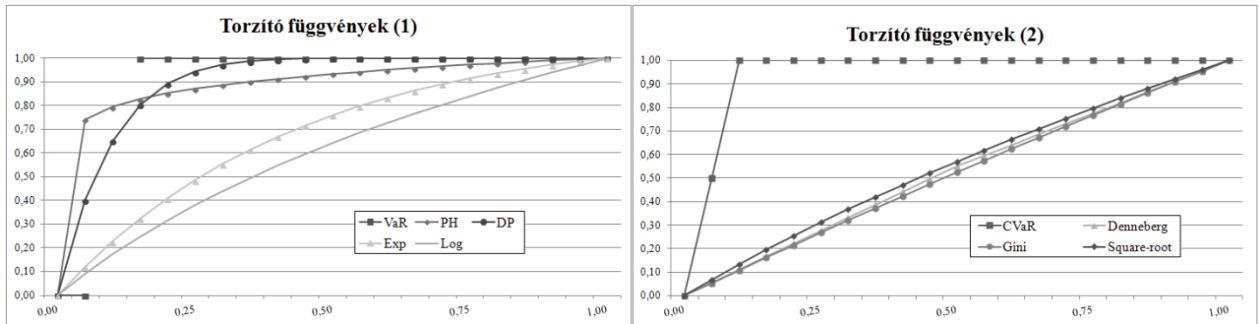
$$g_\alpha(x) = \frac{\sqrt{1 - \ln(1 - \alpha)}x - 1}{\sqrt{1 - \ln(1 - \alpha)} - 1}$$

- 9) Exponenciális transzformált:

$$g_{\alpha}(x) = \frac{1 - (1 - \alpha)^x}{\alpha}$$

10) Logaritmikus transzformált:

$$g_{\alpha}(x) = \frac{\ln(1 - \ln(1 - \alpha) x)}{\ln(1 - \ln(1 - \alpha))}$$



6.9 ábra: Gyakran használt torzító függvények

Az ún. torzító függvény egy súlyozó függvény, amely segítségével X eloszlása súlyozható át úgy, hogy az a nekünk szükséges kimenetekre helyezzen nagyobb figyelmet, ezáltal például jobban odafigyelve a nagyobb veszteségekre.

Függelék 4: A kiemelt kockázati mértékek matematikai felírásai

Ebben a fejezetben az anyag fő részében bemutatott három kockázat mértékhez kapcsolódó matematikai felírásokat összegezzük.

Kockázatotott Érték

A **kockázatotott érték (VaR)** az egy adott időhorizonton az esetek $1 - \alpha = A\%$ -ban elszenvedhető minimális veszteség (vagy ami ezzel egyenértékű, az esetek $\alpha * 100\%$ -ában elszenvedhető maximális veszteség):

$$VaR_\alpha(X) = q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \alpha\},$$

ahol $\alpha \in (0,1]$, X pedig egy veszteségeloszlás $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -n és $q_\alpha(X)$ az X eloszlás α -kvantilise.

A kockázatotott érték tulajdonságai;

- 1) Ha $X, Y \in \mathbb{X} : Y \geq X$, akkor $VaR_\alpha(Y) \geq VaR_\alpha(X)$
- 2) $X \in \mathbb{X}, h > 0, hX \in \mathbb{X}$, akkor $VaR_\alpha(hX) = hVaR_\alpha(X)$
- 3) $X \in \mathbb{X}, a \in \mathbb{R}, X + a \in \mathbb{X}$, akkor $VaR_\alpha(X + a) = VaR_\alpha(X) + a$
- 4) $X, Y \in \mathbb{X} : F_X(t) = F_Y(t) \forall t \in \mathbb{R}$, akkor $VaR_\alpha(Y) = VaR_\alpha(X)$
- 5) $VaR_\alpha(X) = -VaR_{1-\alpha}(-X)$
- 6) Ha X, Y comonoton valószínűségi változók, akkor $VaR_\alpha(X + Y) = VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$
- 7) VaR nem szub-additív. A szub-additivitás azt a várakozást jelenti, amely szerint több különböző kockázat összevonása nem növeli a teljes kockázatot. Egy olyan portfólió kockázata, amely több kisebb portfólióból áll, ne legyen magasabb, mint a benne szereplő portfóliók kockázatának összege.

Feltételes Kockázatotott Érték

A feltételes kockázatotott értéket, mint a VaR természetes alternatíváját mutatták be. A CVaR arra a kérdésre keresi a választ, hogy mekkora lesz a várható veszteségünk az esetek legrosszabb $(1 - \alpha) * 100\%$ -ában, egy előre adott időintervallumon. A VaR-hoz képest itt a „várható veszteség” a lényeges különbség, mert míg a VaR azt mondja meg, hogy mi lesz az esetek $\alpha * 100\%$ -ában, az $(1 - \alpha) * 100\%$ -os intervallumról nem mond semmit, a CVaR viszont pont a kimaradó $(1 - \alpha) * 100\%$ -os eseményekről ad információt, azt, hogy mi a várható értéke az itt bekövetkező eseményeknek. A feltételes kockázatotott értékkel rengeteg tanulmány foglalkozik, s sokszor teljesen különálló módon definiálják, emiatt több ekvivalens definíció is létezik rá, sőt sokszor sokféleképpen nevezik. Az alábbi három definíció ugyanazt az értéket adja

meg, valamint a több tanulmányban is definiált "várható súlyos veszteség" (Expected Shortfall, ES) azonos a feltételes kockázatosított értékkel, így a továbbiakban a két elnevezést egymás szinonimájaként fogjuk használni.

Legyen $\alpha \in (0,1)$ fix és X egy valós értékű valószínűségi változó (veszteségeloszlás) a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn úgy, hogy $E[X] < \infty$. Ekkor a **Feltételes Kockázatosított Érték (CVaR)** egy optimalizációs probléma megoldásaként definiálható;

$$CVaR_\alpha(X) = \inf \left\{ \frac{1}{1-\alpha} E[X - b]^+ + b : b \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol $[z]^+ = \max(z, 0)$.

Legyen $\alpha \in (0,1)$ fix és X egy valós értékű valószínűségi változó (veszteségeloszlás) a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn úgy, hogy $E[X] < \infty$, $q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \alpha\}$. Ekkor a;

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} (E[X \mathbf{1}_{\{X \geq q_\alpha(X)\}}] + q_\alpha(X) \{\alpha - P[X < q_\alpha(X)]\}),$$

értéket az X eloszlás α szintű **Várható Súlyos Veszteségének (ES)** hívjuk. Ez a CVaR-nak egy alternatív, de azzal megegyező definíciója.

Hogy jobban megértsük a definíció értelmét, a $q_\alpha(X) \{\alpha - P[X < q_\alpha(X)]\}$ részt úgy kell értelmezni, mint azt a részt, amelyet le kell vonni az $E[X \mathbf{1}_{\{X \geq q_\alpha(X)\}}]$ értékéből, amennyiben az $\{X \leq q_\alpha(X)\}$ esemény α -nél nagyobb valószínűségű. Amennyiben azonban $P[X < q_\alpha(X)] = \alpha$, ami minden esetben így van, ha X eloszlása folytonos, akkor ez a rész eltűnik és látható, hogy $ES_\alpha(X) = E(X|X \geq q_\alpha(X))$. Legyen adva a VaR definíciója, ekkor létezik egy ekvivalens reprezentációja a CVaR-nak;

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

Ez utóbbi talán a legkönnyebben érthető definíció. Tulajdonképpen átlagoljuk az α -nál nagyobb VaR-okat. Ebből jön a feltételes kockázatosított érték elnevezés is, hiszen a mutató nem más, mint a veszteségeloszlás X várható értéke feltéve, ha az nagyobb, mint a $VaR_\alpha(X)$.

A feltételes kockázatosított érték kiküszöböli a VaR talán legvitatottabb két hibáját. A CVaR szub-additív, valamint a küszöbérték utáni veszteségeket is méri, hiszen tulajdonképp azok átlagát veszi.

A CVaR tulajdonságai;

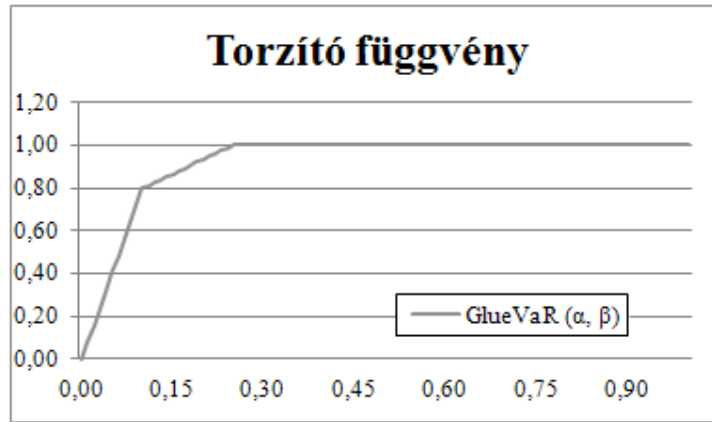
- 1) $X \in \mathbb{X}, X \geq 0 \Rightarrow CVaR_\alpha(X) \geq 0$
- 2) $X, Y, X + Y \in \mathbb{X} \Rightarrow CVaR_\alpha(X + Y) \leq CVaR_\alpha(X) + CVaR_\alpha(Y)$.
- 3) $X, hX \in \mathbb{X}, h > 0 \Rightarrow CVaR_\alpha(hX) = h CVaR_\alpha(X)$.
- 4) $CVaR_\alpha(X + a) = CVaR_\alpha(X) + a$.
- 5) Ha $F_X = F_Y \Rightarrow CVaR_\alpha(X) = CVaR_\alpha(Y)$.

„Ragasztott” VaR

Adott α és β konfidenciaszintek mellett J. Belles-Sampera et al. [29], a következő torzított kockázati mértéket definiálták:

$$\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u) = \begin{cases} \frac{h_1}{1-\beta}u & \text{ha } 0 \leq u < 1-\beta, \\ h_1 + \frac{h_2-h_1}{\beta-\alpha}[u-(1-\beta)] & \text{ha } 1-\beta \leq u < 1-\alpha, \\ 1 & \text{ha } 1-\alpha \leq u \leq 1, \end{cases}$$

ahol $\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)$ a kockázati mértékhez tartozó torzító függvény, $\alpha, \beta \in [0,1]$ úgy, hogy $\alpha \leq \beta$, $h_1 \in [0,1]$ és $h_2 \in [h_1, 1]$. A β paraméter egy plusz konfidenciaszintet ad meg α mellett. A torzító függvény formáját a torzított valószínűségek h_1 és h_2 valamint az $1-\beta$ és $1-\alpha$ határozzák meg. J. Belles-Sampera et al. [29] a h_1 és h_2 paramétereket a torzító függvény magasságainak hívják.



7.3 ábra: A ragasztott VaR torzító függvénye α és β konfidencia intervallumok mellett

Ragasztott VaR különleges esetei;

- 1) α konfidenciaszintű **VaR**: $\kappa_{\alpha,\alpha}^{0,0}(u)$
- 2) α konfidenciaszintű **CVaR**: $\kappa_{\alpha,\alpha}^{1,1}(u)$

Kockázati mértékek lineáris kombinációja

Adottak X valószínűségi változó és α és β rögzített toleranciaszintek úgy, hogy $\alpha < \beta$, a $GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X)$ kifejezhető, mint a $CVaR_{\beta}(X)$, $CVaR_{\alpha}(X)$ és $VaR_{\alpha}(X)$ kockázati mértékek lineáris kombinációja. Amennyiben a következő jelölést használjuk,

$$\begin{cases} \omega_1 = h_1 - \frac{(h_2 - h_1)(1 - \beta)}{\beta - \alpha} \\ \omega_2 = \frac{(h_2 - h_1)(1 - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ \omega_3 = 1 - \omega_1 - \omega_2 = 1 - h_2 \end{cases}$$

akkor a torzító függvény $\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)$ átírható a következő alakra:

$$\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u) = \omega_1 \gamma_\beta(u) + \omega_2 \gamma_\alpha(u) + \omega_3 \psi_\alpha(u),$$

ahol $\gamma_\beta, \gamma_\alpha, \psi_\alpha$ torzító függvények, méghozzá a CVaR β és α konfidenciaszintekhez, valamint a VaR α konfidenciaszinthez tartozó torzító függvények. Ekkor:

$$\mathbf{GlueVaR}_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X) = \omega_1 \mathbf{CVaR}_\beta(X) + \omega_2 \mathbf{CVaR}_\alpha(X) + \omega_3 \mathbf{VaR}_\alpha(X).$$

Egy nagyon hangsúlyos tulajdonsága a ragasztott VaR-nak, hogy a döntéshozó két külön konfidenciaszintet határoz meg, egyet a „rossz esetekhez”, egyet pedig a „nagyon rossz esetekhez”. Ezáltal egy kockázatkerülő döntéshozó lényegesen magasabb súlyt adhat a „nagyon rossz” eseteknek, míg egy magasabb kockázattérítéssel rendelkező döntéshozó inkább a „rossz” esetekhez rendel magasabb súlyt.

Felhasznált Irodalom

- [1] Acerbi, C. (2002) Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. *Journal of Banking & Finance* 26(7), 1505-1518.
- [2] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002), 'On the coherence of expected shortfall', *Journal of Banking & Finance* 26(7), 1487-1503.
- [3] Albrecht P., 2004, Risk measures, *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons.
- [4] Artzner P, Delbaen F, Eber J-M, Heath D (1999) Coherent measures of risk. *Math Finance* 9(3): 203–228
- [5] Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. (2001). Coherent Measures of Multiperiod Risk. Presentation at the Workshop New Ideas in Risk Management, Carnegie Mellon University, Aug. 25–26.
- [6] Balbás, A., Garrido, J. and Mayoral, S. (2009), 'Properties of distortion risk measures', *Methodology and Computing in Applied Probability* 11(3, SI), 385-399.
- [7] Basle Committee on Banking Supervision. January 1996. Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks
- [8] C. Acerbi and D. Tasche. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, 31(2):379–388, 2002.
- [9] C. Acerbi, C. Nordio, and C. Sirtori. Expected Shortfall as a tool for financial risk management. Working paper, 2008.
- [10] C. C. Heyde, S. G. Kou, X. H. Peng. (June 26, 2006). What Is a Good Risk Measure: Bridging the Gaps between Data, Coherent Risk Measures, and Insurance Risk Measures
- [11] Chekhlov A., Uryasev S. and Zabarankin M., 2003, Portfolio optimization with Drawdown constraints, Implemented in Portfolio Safeguard by AORDA.com, *Theory Probability Application* Vol.44, No.1.
- [12] Cvitanic, J. and I. Karatzas. (1999). "On Dynamic Measures of Risk." *Finance and Stochastics*, 3, 451–482.
- [13] Delbaen, F. (1998) Coherent risk measures on general probability spaces. Working paper, ETH Zürich. <http://www.math.ethz.ch/~delbaen/>
- [14] Detlefsen, Kai; Scandolo, Giacomo (2005) : Conditional and dynamic convex risk measures, SFB 649 discussion paper, No. 2005,006
- [15] Dhaene J., Goovaerts M. and Kaas R., 2003, Economic capital allocation derived from risk measures, *North American Actuarial Journal*, Vol. 7, No. 2, 44-59.
- [16] Dirk Tasche (2002) Expected Shortfall and Beyond
- [17] Duffie, D., and J. Pan, (1997), *An Overview of Value at Risk*, *Journal of Derivatives* 4, 7-49.
- [18] Ekaterina N. Sereda, Efim M. Bronshtein, Svetozar T. Rachev, Frank J. Fabozzi, Wei Sun, Stoyan Stoyanov, Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization

- [19] Föllmer H. and A. Schied, 2002a, Convex measures of risk and trading constraints, *Finance and Stochastics* 6, Issue 4, 429-447.
- [20] Föllmer H. and A. Schied, 2002b, Robust preferences and convex measures of risk, *Advances in Finance and Stochastics*, 39-56.
- [21] Frittelli M. and Rosazza Gianin E., 2005, Law invariant convex risk measures, *Advances in Finance and Stochastics* 7, 33-46.
- [22] Frittelli, M. and Rosazza Gianin, E. (2002), 'Putting order in risk measures', *Journal of Banking & Finance* 26(7), 1473-1486.
- [23] Gaivoronski A. and Pflug G., 2001, Value at risk in portfolio optimization: properties and computational approach, Technical Report, University of Vienna.
- [24] Grzegorz Darkiewicz, Jan Dhaene, Marc Goovaerts, Coherent Distortion Risk Measures - A Pitfall (2003)
- [25] Hadar J. and Russell W., 1969, Rules for ordering uncertain prospects, *American Economic Review* 59, 25-34.
- [26] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke. (2001). The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory.
- [27] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke. (2002). The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Applications.
- [28] J. Dhaene, R. J. A. Laeven, S. Vanduffel, G. Darkiewicz, M. J. Goovaerts. Can a Coherent Risk Measure be too Subadditive? *The Journal of Risk and Insurance*, 2008, Vol. 75, No. 2, 365-386
- [29] Jaume Belles-Sampera, Montserrat Guillén, Miguel Santolino (2013), Beyond Value-at-Risk: GlueVaR Distortion Risk Measures, Research Institute of Applied Economics Working Paper 2013/02 30 pag.
- [30] Julia Lynn Wirth. (August 1997). Value-at-Risk for Risk Portfolios. *Actuarial Research Clearing House* 1998 Vol. 1
- [31] K. Detlefsen and G. Scandolo. Conditional and dynamic convex risk measures. *Finance and Stochastics*, 9(42):539–561, 2005.
- [32] Kevin Dowd and David Blake, After VAR: The Theory, Estimation and Insurance Applications of Quantile- Based Risk Measures. The Pensions Institute, DISCUSSION PAPER PI-0603 (2006) <http://www.pensions-institute.org/>
- [33] Kusuoka, S., 2001. On law invariant coherent risk measures. *Advances in Mathematical Economics* 3, 83–95.
- [34] Markowitz H., 1952, Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.
- [35] Michel Denuit, Jan Dhaene, Marc Goovaerts, Rob Kaas & Roger Laeven. (2005). Risk Measurement with Equivalent Utility Principles
- [36] Paul Embrechts, Johanna Neslehová, Mario V. Wüthrich. Additivity properties for Value-at-Risk under Archimedean dependence and heavy-tailedness
- [37] Pflug, G., 2000. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: Uryasev, S. (Ed.),

- [38] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000.
- [39] Rachev R., Ortobelli S., Stoyanov S., Fabozzi S. and Biglova A., 2005, Desirable properties of an ideal risk measure in portfolio theory, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, <http://www.pstat.ucsb.edu/research/papers/Despropv.pdf>.
- [40] Riedel F., 2004, Dynamic coherent risk measures, *Stochastic Processes and their applications*, Vol. 112, 185-200.
- [41] Rockafellar RT, Uryasev S, Zabarankin M (2006a) Generalized deviation measures in risk analysis. *Finance Stoch* 10:51–74
- [42] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2001) Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance* 26(7), 1443-1471.
- [43] Rothschild M. and Stiglitz J., 1970, Increasing risk. I.a. definition, *Journal of Economic Theory* 2, 225-243.
- [44] Sergio Ortobelli, Svetlozar T. Rachev, Stoyan Stoyanov, Frank J. Fabozzi and Almira Biglova. (2005). The Proper Use of Risk Measures in Portfolio Theory
- [45] Shaun S. Wang, Virginia R. Young, Harry H. Panjer. (1997). Axiomatic Characterization of Insurance Prices. *Insurance: Mathematics and Economics* 21 (1997) 173-183
- [46] Tanya Styblo Beder. (1995). VaR: Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal* September-October 1995
- [47] Uryasev, S. (2000). Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. *Financial Engineering News*, 14, February 2000.
- [48] Wang S., 2002, A risk measure that goes beyond coherence, 12th AFIR International Colloquium, Mexico.
- [49] Wang T., A class of dynamic risk measures, Working Paper (1999)
- [50] Wang, S. S. and Dhaene, J. (1998), 'Comonotonicity, correlation order and premium principles', *Insurance: Mathematics and Economics* 22(3), 235-242.
- [51] Wirth J, Hardy MR (2001) Distortion risk measures: coherence and stochastic dominance. Working paper. <http://pascal.iseg.utl.pt/~cemapre/ime2002/>
- [52] Yamai, Y., Yoshida, T. (2001) On the validity of value-at-risk: comparative analyses with Expected Shortfall. Discussion paper 2001-E-4, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan. <http://www.gloriamundi.org/var/wps.html>