



A MAGYAR HOZAMGÖRBE MODELLEZÉSE MAKRO FAKTOROKKAL

Kivonat

A tanulmány egy kétországos dinamikus Nelson-Siegel hozamgörbe modellt illeszt a forint és euró államkötvények adataira Bayes-statisztikai eszközökkel. A cél a magyar és euróövezeti hozamok közötti kapcsolatok feltárása, és a hozamgörbék az egyes alapvető makrogazdasági változókkal (gazdasági növekedés, infláció, devizaárfolyam) való együtt mozgásának vizsgálata. Az eredmények az eurózóna faktorainak meghatározó szerepét mutatják a magyar hozamgörbe alakulásában. Az alkalmazott modell rámutat a hozamokat és devizaárfolyamot érő sokkok szoros összefüggéseire, valamint a hozamgörbe púposságának kiemelt szerepére az árfolyam-dinamikája alakulásában.

Bebesi László

TARTALOMJEGYZÉK

Ábrajegyzék	ii
Táblázatjegyzék	iii
2 Bevezetés	1
3 Modellkeret	2
4 Becslési stratégia, Adatok	5
5 Eredmények	7
5.1 Illeszkedés	8
5.2 Impulzusválasz függvények	10
5.3 Variancia dekompozíció	12
6 Összefoglalás	15
Függelék A: Gibbs mintavételezés	16
Függelék B: Modell eredmények	20
függelék C: Adatok és forrásaik	21
Irodalomjegyzék	22

ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra: A modellben alkalmazott makro változók.....	5
2. ábra: A becsült forint és euró hozamgörbék	7
3. ábra: A modell λ paraméterei.....	9
4. ábra: Impulzusválasz függvények (magyar faktorok).	10
5. ábra: Impulzusválasz függvények (eurózóna faktorok).	11

TÁBLÁZATJEGYZÉK

1. táblázat: A modell illeszkedése	8
2. táblázat: A magyar szint faktor variancia dekompozíciója.	13
3. táblázat: A magyar meredekség faktor variancia dekompozíciója.	13
4. táblázat: A magyar görbület faktor variancia dekompozíciója.....	14
5. táblázat: A Forint/Euró árfolyam variancia dekompozíciója	14
6. táblázat: a Geweke tesztstatisztika értékei	19
7. táblázat: Az átmenet mátrix (F) és a drift (μ) paraméterei.....	20
8. táblázat: A kovariancia mátrix (Q) paraméterei.....	20
9. táblázat: a modellben használt változók és hozampontok forrásai	21

1 BEVEZETÉS

Számtalan jegybank, adósságkezelő intézmény és kereskedelmi bank használja a Nelson-Siegel (1987) modell különböző változatait a hozamgörbe becslésére. Legtöbbször ezekben a modellekben csak a hozamgörbét közvetlenül leíró faktorok szerepelnek, illetve ezek mozgását valamilyen egyszerű elsőrendű vektor autoregresszív dinamika írja le. A közelmúlt tanulmányai azonban rámutattak, hogy a modellbe épített makro faktoroknak is fontos szerepe van a hozamgörbék mozgásának meghatározásában (Hördahl, Tristani és Vestin 2006; Diebold, Li és Yue 2006; Rudebusch és Wu 2008; Joslin, Priebsch és Singleton 2014). Az árfolyam és a gazdaságok közötti interakciók vizsgálatára ezen modellek kétországos változatai használhatóak, ahol a két vizsgált gazdaság hozamgörbéje egyszerre jelenik meg a modellben (Brandt és Santa-Clara 2001; Brennan és Xia 2006; Anderson, Hammond és Ramezani 2010; Chen és Tsang 2013; Mouabbi 2014), illetve e faktorok a két gazdaság makro faktoraival kiegészülve együttesen jelenítik meg az árfolyam megváltozását (Pericoli és Taboga 2012; Yin és Li 2014).

Ennek az új makropénzügyi megközelítésnek egy lényegi hiányossága a vizsgált gazdaságok köre: a tanulmányok legtöbbje az USA és valamely más nagyobb gazdaság (Németország, Japán, Egyesült Királyság stb.) kötvénypiacait vizsgálja, azaz nem terjednek ki kis, nyitott gazdaságokra. Jelen tanulmány ezt a hiányosságot igyekszik pótolni. Meglátásunk szerint egy kétországos Nelson-Siegel modell az árfolyam leírásán túl, egy kis nyitott gazdaság és egy nagy világpiaci súllyal rendelkező gazdaság viszonylatában képes lehet számszerűsíteni a nagyobb gazdaságból a kis, nyitott gazdaságba átgyűrűző hatásokat. Így egy a forint és euró hozamokon alapuló (aszimmetrikus¹) dinamikus Nelson-Siegel modellt alkotunk. Az elemzésünk fő célja annak megértése, hogy az EU pénzpiacain megjelenő változások miként gyűrűznek át hazánk állampapírpiaaira. Lényeges kérdés annak eldöntése is, hogy melyik oldalról érkező hatás a lényegesebb a magyar hozamgörbe faktor dinamikájának megjelenítésében: az országspecifikus folyamatok (magyar makro faktorok), vagy pedig a globális folyamatok (EU makro adatainak változása)?

A tanulmányban használt modellt a második részben ismertetjük, a harmadik rész bemutatja a becslés során alkalmazott módszertant, valamint a felhasznált adatokat. A negyedik részben a kapott eredményeket elemezzük (illeszkedés, impulzusválasz függvények, variancia-dekompozíció stb.), míg az ötödik rész egy rövid összefoglalás.

¹ Feltételezzük, hogy a magyar gazdasághoz köthető faktorok változásának nincs hatása az eurózónában történő gazdasági változásokra és hozamgörbe mozgásokra.

2 MODELLKERET

A Nelson-Siegel-féle (1987) függvény formula széles körben elterjedt annak egyszerű használata és könnyű interpretálhatósága miatt. A forint ($y_{t,M}(\tau)$) és euró ($y_{t,E}(\tau)$) hozamgörbe egyes lejáratokhoz (τ) tartozó pontjait a következő alakban keressük:

$$y_{t,M}(\tau) = L_{t,M} + S_{t,M} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,M}}}{\tau/\lambda_{t,M}} \right) + C_{t,M} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,M}}}{\tau/\lambda_{t,M}} - e^{-\tau/\lambda_{t,M}} \right) + \varepsilon_{M,\tau} \quad (1)$$

$$y_{t,E}(\tau) = L_{t,E} + S_{t,E} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,E}}}{\tau/\lambda_{t,E}} \right) + C_{t,E} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,E}}}{\tau/\lambda_{t,E}} - e^{-\tau/\lambda_{t,E}} \right) + \varepsilon_{E,\tau} \quad (2)$$

ahol $\varepsilon_{M,\tau} \sim N(0, \sigma_{\tau,M}^2)$, valamint $\varepsilon_{E,\tau} \sim N(0, \sigma_{\tau,E}^2)$. $L_{t,i}$, $S_{t,i}$ és $C_{t,i}$ a Nelson-Siegel (1987) modell szint, meredekség és görbület faktorai a két hozamgörbében ($i \in \{M, E\}$).

Megmutatható, hogy a meredekség és szint faktorok összege közelíti a rövid kamatláb értékét ($\lim_{\tau \rightarrow 0} y_{t,i}(\tau) = L_{t,i} + S_{t,i}$), míg a szint faktor értéke a hosszú futamidőhöz tartozó kamatok értékével azonosítható. A görbület értelmezése már közel sem ilyen egyértelmű, általában a hozamgörbében meglevő várakozásokat tulajdonítják ennek a faktornak. Hasonlóan Reppa (2009) tanulmányához mi is elhagyhatnánk a Nelson-Siegel hozamgörbe harmadik faktorát a paraméterekkel való takarékoság érdekében, azonban fontos feladatunknak tekintjük e faktor szerepének tisztázását a hozamdinamika és a gazdaságok közötti kölcsönhatások kialakításában.

Jelen munkában a hozamgörbék szintjét, meredekségét és görbületét időben változó látens faktoroknak tekintjük, ellentétben például Nelson és Siegel (1987), Svennsson (1994) munkájával, vagy a korábbi ÁKK tanulmányokkal (pl. Reguly 2015), ahol e változók paraméterként kerülnek becslésre². A hozamok e faktorok lineáris kombinációi, amiket csak hibával tudunk megfigyelni. A faktorok dinamikája a hozamgörbe-illesztés után is megbecsülhető lenne (lásd.: Diebold és szerzőtársainak (2006) két lépcsős becslését), azonban ebben az esetben nem vennénk figyelembe a faktorok mérési hibáját az átmenet-egyenletet mozgató paraméterek becslésénél, ami kevésbé pontos becslésre vezetne. A két gazdaság esetén változó λ paramétereket alkalmazunk, és nem tesszük fel, hogy ezek valamilyen dinamikát követnek. Ez jelentős egyszerűsítés, hiszen ettől még a Kálmán-szűrő használható (a rendszer linearitása megmarad), de amennyiben a λ -kra, mint faktorokra tekintenénk, úgy a Kálmán-szűrő bizonyos változataira lenne szükség. (Erre alkalmas lenne az „unscented” Kálmán-szűrő lásd.: Julier és Uhlmann (1997) valamint a kibővített Kálmán-szűrő). A tanulmányban alkalmazott szimulációs módszerek esetén ezek kezdeti értékének

² Reguly (2015) munkája jó összefoglalót ad a Nelson-Siegel modellcsalád magyar forint hozamgörbén való illeszkedéséről, a szerző megmutatja, hogy a Nelson-Siegel hozamgörbe paraméterei idősként is értelmezhetők.

kiválasztása nem triviális, a λ_E és λ_M paraméterek kezdeti értéke minden időszakban 1 volt³.

A modellbe beillesztett makro változók is megjelennek a mérési egyenletben, és feltesszük, hogy mérési hibával figyeljük meg az egyes makro változókat ($Mac_{t,j}$, n darab, illetve $\varepsilon_{Mac_j} \sim N(0, \sigma_j^2)$):

$$Mac_{t,j} = \widehat{Mac}_{t,j} + \varepsilon_{Mac_i} \quad (3)$$

A fenti 1-2-3 egyenletek megadhatók mátrix alakban ($\tau_1, \tau_2 \dots \tau_m$ lejáratokra):

$$H_t = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\tau_1/\lambda_{t,M}}}{\tau_1/\lambda_{t,M}} & \frac{1 - e^{-\tau_1/\lambda_{t,M}}}{\tau_1/\lambda_{t,M}} - e^{-\tau_1/\lambda_{t,M}} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & \frac{1 - e^{-\tau_T/\lambda_{t,M}}}{\tau_T/\lambda_{t,M}} & \frac{1 - e^{-\tau_T/\lambda_{t,M}}}{\tau_T/\lambda_{t,M}} - e^{-\tau_T/\lambda_{t,M}} & & & \\ & & & 1 & \frac{1 - e^{-\tau_1/\lambda_{t,E}}}{\tau_1/\lambda_{t,E}} & \frac{1 - e^{-\tau_1/\lambda_{t,E}}}{\tau_1/\lambda_{t,E}} - e^{-\tau_1/\lambda_{t,E}} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{1 - e^{-\tau_T/\lambda_{t,E}}}{\tau_T/\lambda_{t,E}} & \frac{1 - e^{-\tau_T/\lambda_{t,E}}}{\tau_T/\lambda_{t,E}} - e^{-\tau_T/\lambda_{t,E}} \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} I(n)$$

Ekkor az 1-2-3 egyenletek felírhatók az alábbi alakban:

$$Y_t = H_t X_t + \theta_t \quad (4)$$

ahol $\theta_t \sim N(0, R)$, Y_t a hozamokat és a makro változókat tartalmazó vektor (megfigyelések), valamint X_t tartalmazza a hozamgörbéket leíró 6 faktor, illetve a makro változókhoz tartozó faktorokat ($\widehat{Mac}_{t,j}$), θ_t jeleníti meg az (1)-(3) egyenletek hibatagjait. A bevezetett faktorokat egy elsőrendű VAR dinamika mozgatja a következő alakban:

$$X_{t+1} = \mu + F X_t + \varepsilon_t \quad (5)$$

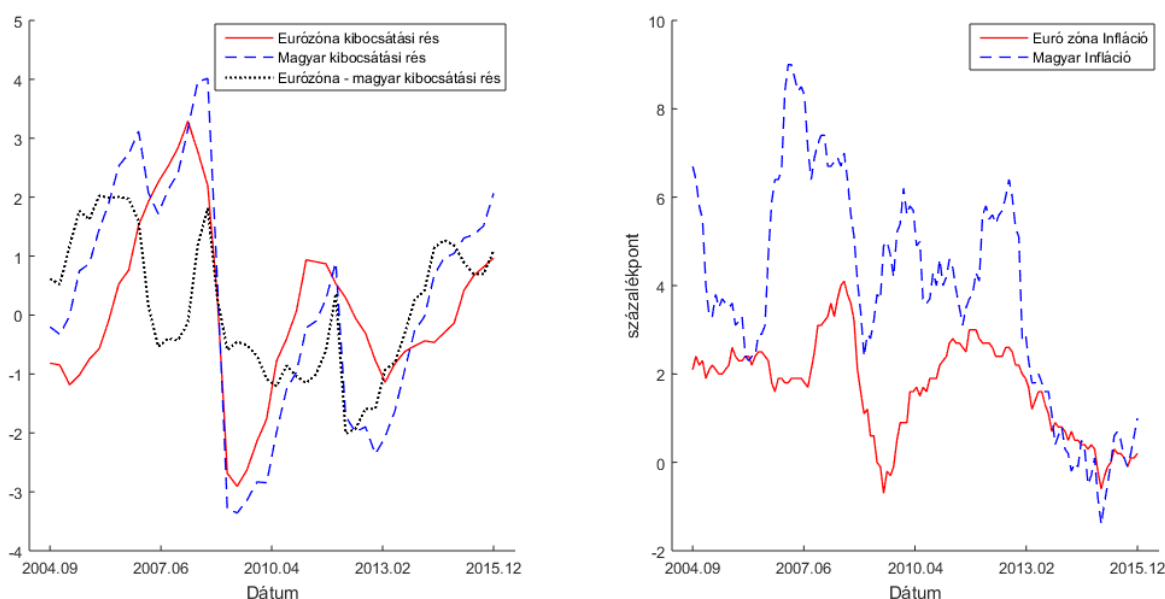
ahol $\varepsilon_t \sim N(0, Q)$. Jól látható, hogy a (4)-es és (5)-ös egyenlet már állapotter alakban jelenítik meg a modellt. A fentiek alapján a következő paramétereket kell becsülni: R , Q , F , μ , adott paraméterek mellett pedig meghatározhatók a faktor értékek. Az R és Q mátrixok az állapot és átmenet egyenletek időben állandó kovariancia mátrixai, F és μ pedig a faktorok mozgását leíró két paraméter. A becsülendő paraméterekre két fontos megkötést teszünk:

³ Ez az érték megfelel a szakirodalomban alkalmazottaknak: Diebold és szerzőtársai (2006) 0,077-es értékű λ -t használnak, ami az eltérő függvényforma (a jelen munkában alkalmazott paraméter reciprokát használták), valamint eltérő időskála (az egységnyi periódus 1 hónap volt az itt alkalmazott egy év helyett) miatt a fenti felírásban 1,08-nak felelne meg. De Pooter és szerzőtársai (2007) eredményei alapján a paraméter értéke 1,04 és 1,38 között mozog.

1. Feltesszük, hogy R diagonális, azaz a hozampontok és a makro változók mérési hibái korrelálatlanok.
2. Az átmenet mátrix (F) esetén feltételezzük, hogy a magyar hozamgörbe faktoroknak és magyar gazdasághoz köthető makro változóknak nincs hatása az eurózóna faktorainak a mozgására. (Így F bizonyos értékei azonosan nullák, lásd később.)

3 BECSLÉSI STRATÉGIA, ADATOK

A magyar állampapírhozam idősorok a Fama-Bliss (1987) féle bootstrap módszer segítségével készültek. A felhasznált adatsor a következő volt: a legrövidebb lejárat 3 hónap, ezt követően az 1 éves lejáratig minden hónapra egy hozampont, a 3 éves lejáratig minden második hónap hozama, majd 3 évtől minden egész év hozamai, a leghosszabb lejárat 12 év, így összesen 31 lejárat pontra becsüljük a hozamgörbét. Fontos megjegyezni, hogy ez a mintavételezés egyfajta súlyozást is magában rejt: a mintában nagyobb arányban szerepelnek a 2 évnél rövidebb lejáratú hozampontok, mivel 2 és 12 év között már csak 15 hozampont van az adatbázisban. Tran (2016) eredményei statikus hozamgörbe becslésekre azt mutatják, hogy érdemes olyan súlyozást alkalmazni (például a duration reciprokával, vagy a bid és ask jegyzések közötti spread inverzével), ahol a rövidebb lejáratú papírok nagyobb súlyt kapnak a becslésben, ez ugyanis jelentősen javítja a hozamgörbe modell illeszkedését a rövidebb lejáratokon. Az euróövezeti hozamok adataihoz az ECB közléseit használtuk, és csak a hitelminősítők által a legjobb minősítésű kategóriába sorolt kötvényekből képzett hozamgörbe pontjait használtuk⁴. A lejáratok megegyeztek a magyar hozampontok lejárataival.



1. ábra: A modellben alkalmazott makro változók, Forrás: Eurostat, részletesebben lásd.: függelék C: Adatok és forrás.

A modell a 6 látens hozamgörbe faktor mellett tartalmaz még 5 makrogazdasági változót is. Mind az euróövezeti, mind a magyar év/év alapú inflációt szerepeltetjük a modellben. A reálgazdaságot a magyar gazdaság és eurózána kibocsátási rése írja le, amelyet a Hodrick-Prescott-szűrő segítségével állítottuk elő negyedéves adatokon 1600-as értékű simítási paraméter segítségével, majd pedig ezt a két idősort havi frekvenciára transzformáltuk. A kibocsátási résre kapott két idősor erősen korrelált egymással, ezért a magyar kibocsátási résből kivontuk az eurózána kibocsátási rését

⁴ Így kissé leegyszerűsítve: az euró hozamok itt a német állampapírok hozamaival egyenértékűek.

leíró változót, ez alapján a kapott változó hazánk relatív teljesítményét méri az eurózónához képest. A modell 11. faktora a Forint/Euró árfolyam havi log-hozamai voltak. A vizsgált időhorizont 2004 szeptembere és 2015 decembere közé esett, ami 136 időszakot jelent a havi frekvencia miatt. Mivel ez a 11 év nehezen tekinthető egy egybefüggő világ gazdasági rezsimnek (feltehető, hogy bizonyos paraméterek értékei változhatnak), ezért a modellt újra becsültük a 2009. januártól 2015. decemberig tartó időszakra. Azaz, elemzésünket egy olyan időperióduson is megismételtük, amelyben már nincs benne a 2008-as pénzügyi válságot megelőző időszak.

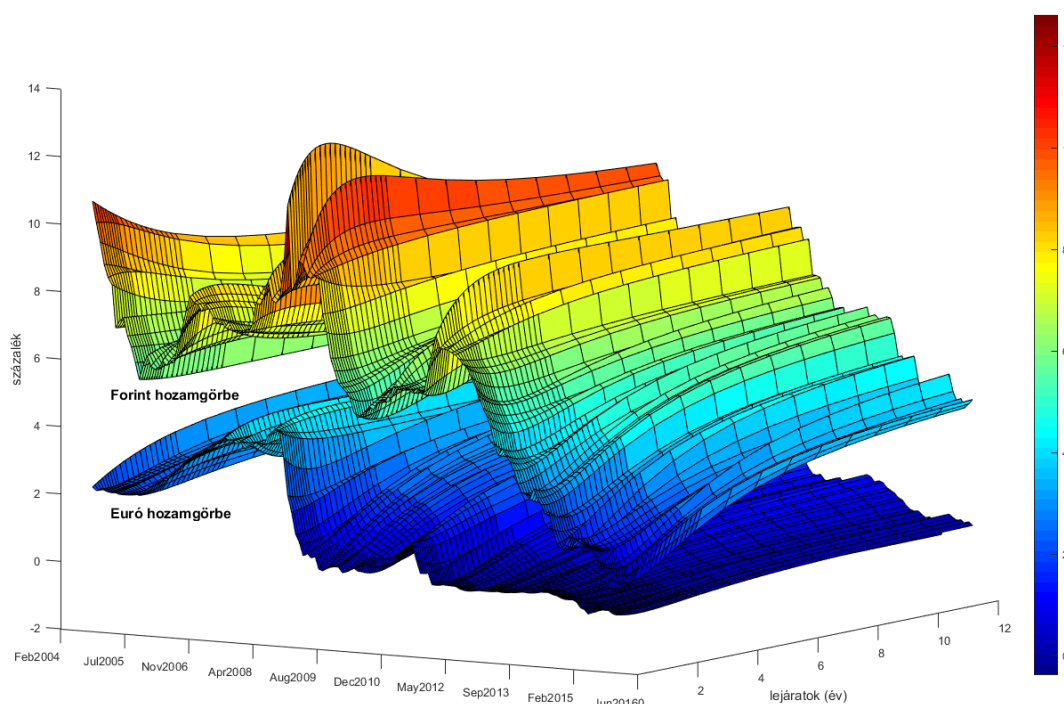
A modell paramétereinek becslésére a Gibbs mintavételezési eljárást használtuk (illetve a lambda paraméterek becsléséhez ennek egy általánosítását, a Metropolis-Hastings algoritmust használtuk), a faktorok értékét adott paraméterek mellett a Kálmán-szűrővel határoztuk meg. A Gibbs-mintavételezés (és ezzel együtt a Markov Lánc Monte Carlo (MCMC) alapú módszerek) használata jellemzően akkor merül fel, amikor nagy az optimalizálás tér, és a paraméterek együttes eloszlásai numerikusan nehezen számolhatók. A (4)-es és (5)-ös egyenletekkel megalkotott modell becsülhető lenne a modell likelihoodjának maximalizálásával is, azonban a nagyszámú paraméter miatt ez a becslés bizonytalan, és rendkívül számításigényes módszerre vezetne. A Monte Carlo alapú módszerek nagy előnye, hogy a becslés során nem csak egy realizáció áll rendelkezésre a faktorokból, ugyanis minden iteráció során új véletlen realizációkat generálunk a 11 faktorból minden időpontra.⁵ A szimulációs módszerek e tulajdonsága jelentősen tudja enyhíteni a túlillesztésből esetlegesen adódó hibákat. A modellt 100 ezer iterációt felhasználva készítettük el, amelyekből az utolsó 50 ezer alapján végeztük el a végső becslésünket (egyszerűen e realizációk átlagát vettük).⁶ A mintavételezés kiértékeléséhez a Geweke-féle statisztikát használtuk. (A jelen munkában alkalmazott mintavételezési eljárásról és annak kiértékeléséről részletesebben lásd: Függelék A: Gibbs-mintavételezés).

⁵ Az ÁKK a fejlesztés alatt álló optimális adósságportfólió modelljében az előrejelzéshez és trajektória generáláshoz használja jelen modell egy fejlettebb változatát. A 10 fölötti faktor szám bevezetése indokolt, hiszen az államadósság összetételére vonatkozó benchmark értékek meghatározásához szükséges az árfolyam, valamint a magyar és akár az eurózána inflációs szám ismerete is. Az euróban denominált adósság vizsgálatához a magyar euró hozamgörbe szükséges, ami megkapható a kockázatmentes euró hozamgörbe és a magyar szuverén CDS felárak segítségével. Az ÁKK optimális adósságportfólió modelljében a két kibocsátási rés helyett a magyar CDS felárakat leíró két faktor szerepel.

⁶ Az eljáráshoz nagyszámú minta szükséges, az első véletlen realizációkat rendre el kell hagyni, ugyanis ezek esetén feltehető, hogy még nem következett be a konvergencia.

4 EREDMÉNYEK

A becslés eredményeit a Függelék B: Modell eredmények részének 7. és 8. táblázata mutatja be⁷. Az átmenet mátrix diagonálisában kapott eredmények alapján szembeűő az adatok magas perzisztenciája, ezt alátámasztja F domináns saját értéke is, amely közel van az egyhez (0,94). Az átmenetmátrix diagonálisában az árfolyamot leszámítva az összes elem szignifikáns⁸. Fontos kiemelni, hogy a diagonálison kívül is több szignifikáns paraméter van, ami a faktorok erős összefűgűőségére utal⁹. Az eredményűl kapott hozamgűrbéket a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra: A becslűt forint és euró hozamgűrbék

A paraméter becslések elkészítése után több fontos, a hat hozamgűrbe faktorhoz kapcsolódó eredményt is ki kell emelni:

- A vártnak megfelelően a forint hozamgűrbe faktorok kevésbé perzisztensek, mint az euró hozamgűrbe faktorok, viszont a faktorok varianciája mintegy 2-3 szorosa az euró faktorokénak.
- Mindkét hozamgűrbe esetén a szint és meredekség faktorokat érű sokkok között van egy szignifikáns, ellentétes irányű kapcsolat.

⁷ Az R mátrixra kapott paraméter értékeket terjedelmi okokból nem közölűk.

⁸ A tanulmányban használt becslűsi eljárás logikájából adódóan nem lehet valódi standard hibákról beszélni. Ugyanakkor a szimuláció eredményeként megkapható az adott paraméter posterior szűrása, amely fűg a hozzátartozó prior szűrásától. Némi leegyszerűsítéssel e posterior szűrást tekintűk a becslűs hibájának, ennek segítségével vizsgálűk meg, hogy mennyiben releváns az adott paraméter. Így akkor tekintűk az adott paramétert „szignifikánsnak”, ha abszolűt értékben a paraméter érték és a szűrásának hányadosa nagyobb kettűnél.

⁹ Az eredményűl kapott faktorokra elvégzett Johansen-féle kointegrációs teszt eredményei szerint legalább 4 kointegrálű vektor van, elsőrendű késleltetést feltételezve.

- A forint és euró hozamoknál egyaránt, az átmenetmátrix alapján a szint faktor emelkedése hosszútávon a hozamgörbe ellaposodását (ill. kellően nagy első faktor esetén inverzzé válását) vonja maga. Ez azt jelenti, hogy egységnyi szint eltolódás a rövidebb hozamokat jobban érintheti, mint a hosszabb lejáratokhoz tartozó hozampontokat.
- Az euró hozamgörbe faktorok elsősorban a magyar hozamgörbe meredekségére hatnak az átmenetmátrix alapján, így például az euró hozamgörbe meredekebbé válása, a forint hozamgörbe meredekebbé válását is eredményezi.
- Az euró hozamgörbe meredekségének, az euró övezeti inflációnak és a magyar kibocsátási résznek a forint hozamgörbe görbület faktorára vonatkozóan a legnagyobb az együtthatója. Ez azt sejteti, hogy a hozamgörbe közepes lejáratú hozamainak a mozgását a reálgazdasági folyamatok jelentősen tudják befolyásolni.

Az árfolyam mozgásának nagy részét (közel 70 százalékát) nem magyarázza a modell, azonban arra képes rávilágítani, hogy miből is származhat az árfolyam varianciájának egy jelentős része. A 8. táblázatban látható, hogy a forint és euró hozamgörbe görbület faktorainak sokkjai erősen korreláltak az árfolyam innovációival, ami arra enged következtetni, hogy a hozamgörbét és árfolyamot érő sokkok egyszerre jelentkeznek, valamint az árfolyam és hozamgörbe mozgása nehezen tekinthető függetlennek.

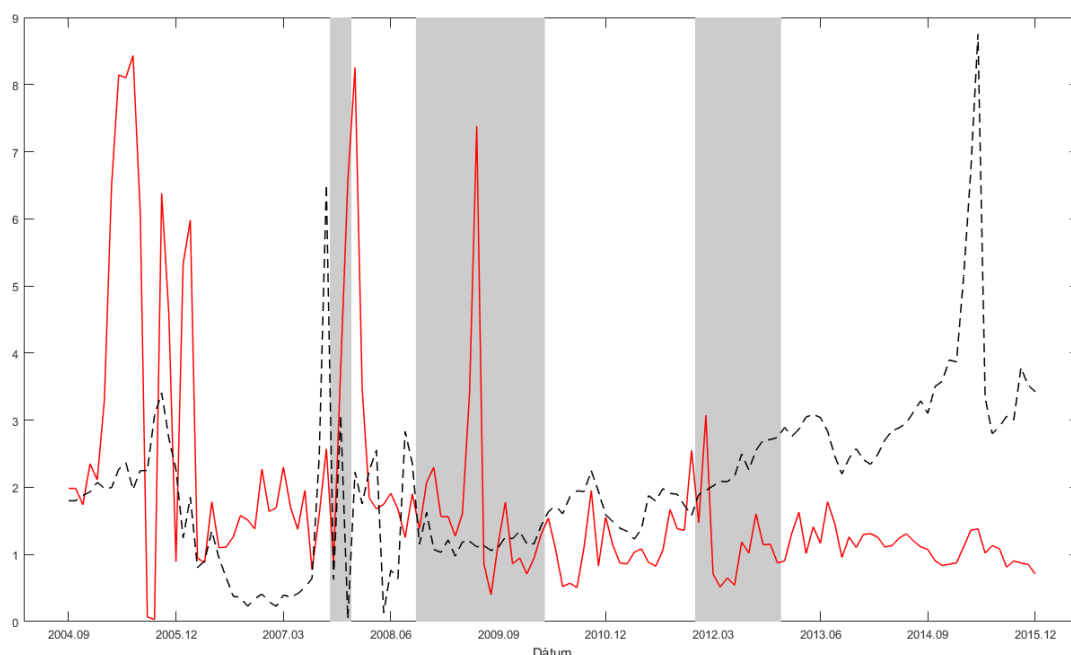
4.1 ILLESZKEDÉS

A modell illeszkedése – figyelembe véve az alacsony frekvenciát – összességében jónak tekinthető. Az 1. táblázat mutatja a fontosabb lejáratokhoz tartozó átlagos négyzetes (RMSE) és átlagos abszolút (MAE) hibákat. Ismert tény, hogy a magyar hozam idősorok jóval zajosabbak, mint a nagyobb gazdaságok hozam idősorai, ezt a jelenséget jelen modell is visszatükrözi. A 3 hónapos forint hozam esetén ugyanis a becslési hiba nagyjából másfélszerese az euró 3 hónapos hozampont becslési hibáinak. A hozamgörbe egészét tekintve elmondható, hogy a forint hozamgörbe esetén a becslési hiba valamivel magasabb.

	Rögzített λ				Változó λ			
	Forint hozamok		Euró hozamok		Forint hozamok		Euró hozamok	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
3 hónap	17,0	13,0	10,7	9,6	11,2	8,5	3,9	2,7
1 év	14,2	10,6	8,4	7,3	11,2	8,0	1,4	0,7
2 év	6,6	3,6	4,1	0,9	4,0	3,2	1,1	0,5
3 év	12,8	8,9	12,4	11,0	7,1	5,4	1,7	1,3
5 év	16,8	11,3	17,6	16,0	9,8	7,7	2,3	1,6
7 év	12,2	8,8	6,9	6,3	10,6	7,6	3,3	2,0
10 év	5,5	4,1	14,9	13,5	5,5	1,0	10,6	7,6
Összes hozampont	11,3	7,3	10,6	7,6	8,4	5,7	4,6	2,0

1. táblázat: A modell illeszkedése. Megj.: Az értékek bázispontban vannak megadva.

Az „alap” modellt megbecsültük rögzített¹⁰ és változó λ paraméterekre is. Jól látható, hogy utóbbi esetén jóval kisebbek az illeszkedés pontatlanságát jelző mutatók. Érdekes megvizsgálni e paraméterek időbeni alakulását is a 3. ábra segítségével:



3. ábra: A modell λ paraméterei. Forrás: saját számítások, KSH adatok. Megj.: A folytonos piros vonal a λ_M , míg a szaggatott fekete vonal λ_E paramétereket jelöli az egyes időszakokban. A szürke sávok azon időszakokat jelölik, amikor az előző év azonos negyedéhez képest negatív GDP növekedés volt tapasztalható Magyarországon; a gazdasági növekedés leírására a KSH naptárhatástól tisztított, szezonálisan igazított negyedéves adatait használtuk.

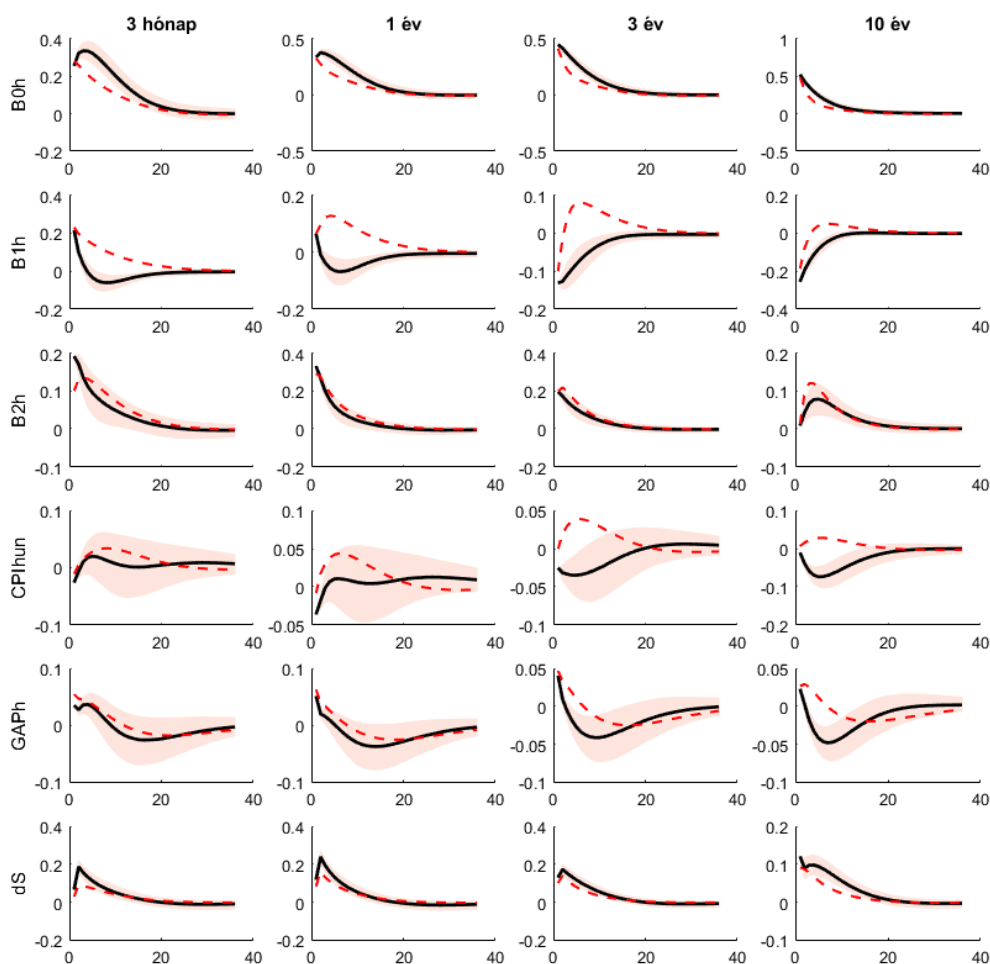
Meggyőződésünk szerint a λ paraméter inkább egy matematika fogalom, mintsem egy közgazdasági tartalommal bíró könnyen értelmezhető változó, ugyanakkor a két idősorból látni kell, hogy 2007-től jellemzően volatilisabb, rosszabb reálgazdasági teljesítménnyel rendelkező időszakok előtt és közben ugrik meg az értéke. Így például a λ_M paraméter értéke 2007. 3. negyedévben közelít a maximumához, valamint a 2008-as pénzügyi válság ideje alatt is viszonylag magas szintet ér el, a 2012-es rossz magyar gazdasági teljesítményt is e paraméter növekedése előzi meg. (A megnyugvási szintnek tekinthető 1-1,5-ről 3-ra növekszik a recessziós periódus elején.) E megfigyelésekkel teljesen ellentétes a 2005-ös évben tapasztalható magas érték, amely nem magyarázható a rossz hazai gazdasági teljesítménnyel. Némileg eltérő megállapítások tehetők az euró hozamgörbe λ paraméterének vizsgálata esetén: a paraméter két esetben vesz fel 6 fölötti értékeket: 2007 szeptemberében valamint 2015 márciusában. E két időpont több lényeges világpiaci eseménnyel is összefügg: 2007 szeptembere tekinthető a pénzügyi válság kezdetének, 2015 márciusában pedig az ECB Mennyiségi Lazítás (Quantitative Easing) programja kezdődött meg.

¹⁰ A rögzített λ paraméter mindkét gazdaság és mindegyik időszak esetén 1 volt.

4.2 IMPULZUSVÁLASZ FÜGGVÉNYEK

A 4. ábra és az 5. ábra szemlélteti az átmenet-egyenletből megkapható impulzusválasz függvényeket. A konfidencia intervallumok meghatározásához az azokat meghatározó paraméterek Gibbs-mintavételezés során kapott eloszlását használtuk, 5000 sikeres mintavétel alapján készítettük el¹¹. Mivel a fentebb bemutatott eredmények alapján a Q mátrix nehezen tekinthető diagonálisnak, ezért a 4. ábra és az 5. ábra megalkotásakor korrelált sokkokat feltételeztünk. A két időszakra kapott becslés impulzusválaszai nagyjából hasonlóan tekinthetők, érdemi eltérések csak a forint hozamgörbe meredekségének sokkjaira adott reakciókban vannak. Így például a magyar meredekség faktorra adott impulzusválaszok irányukban megegyeznek a két vizsgált időszak esetén, azonban a lecsengés sebessége némileg különbözik: a sokk lecsengése a rövidebb időszakra adott becslés esetén gyorsabb a hosszú lejáratoknál, lassabb a rövid lejáratok esetén.

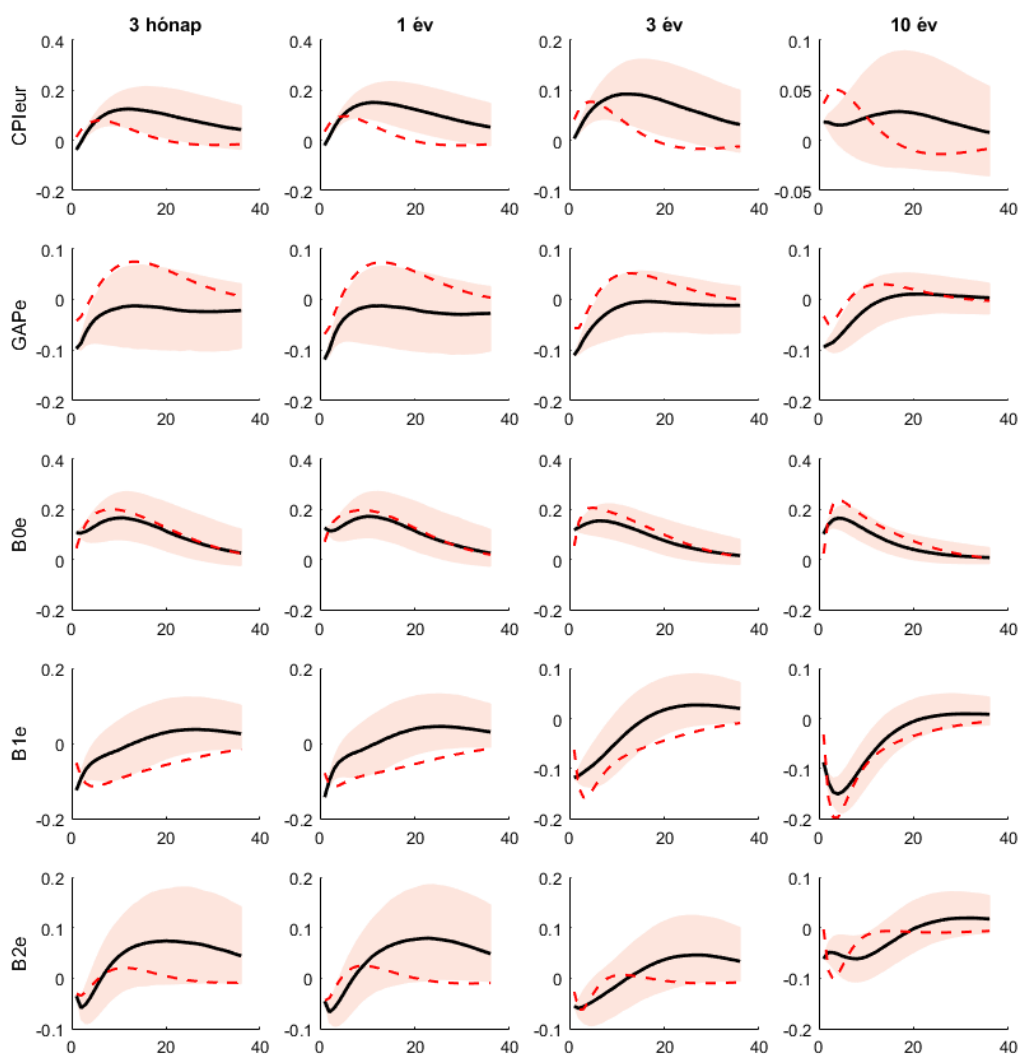
A többi változó esetén állítható, hogy a két időszakra adott becslés eltérései a hibahatáron belül vannak.



4. ábra: Impulzusválasz függvények (magyar faktorok).

¹¹ Azokat a mintákat, ahol F domináns sajátértéke nagyobb volt, mint 1, valamint ahol Q nem volt pozitív definit (csak pozitív szemidefinit), kihagytuk a vizsgálatból és újakat generáltunk helyettük.

A 4. ábra és az 5. ábra adott egységnyi szórású sokk, adott lejáratú hozamokhoz tartozó impulzusválaszait mutatja. A fekete vastag vonal jelöli a teljes időszakra megbecsült modellből kapott eredményt, míg a szaggatott vonal impulzusválasz függvénye tartozik a válság utáni időperiódusra megbecsült modellhez. A satírozott terület jelöli a teljes időszakra becsült modell impulzusválaszaihoz tartozó 16 és 84 százalékos konfidencia intervallumokat. A változók a 4. ábra esetén a következők: $B0h$ (magyar szint faktor), $B1h$ (magyar meredekség faktor), $B2h$ (magyar görbület faktor), $CPIhun$ (magyar infláció), $GAPh$ (magyar kibocsátási rés), dS (A Forint/Euró árfolyam havi megváltozása), míg az 5. ábra esetén: $B0e$ (euróövezeti szint faktor), $B1e$ (euróövezeti meredekség faktor), $B2e$ (euróövezeti görbület faktor), $CPIeur$ (euróövezeti infláció), $GAPe$ (euróövezeti kibocsátási rés).



5. ábra: Impulzusválasz függvények (eurózóna faktorok).

A vártak megfelelően mindhárom magyar faktor sokkja szignifikáns és az elmélettel megegyező irányú elmozdulást generál a négy kiválasztott lejárat esetén. Ez nem meglepő, hiszen e három faktor közvetlenül is részt vesz a magyar hozamok meghatározásában. Az árfolyam egységnyi szórású leértékelődése, ahogy arra számítani lehet, a hozamgörbét nagyjából 20 bázisponttal emeli meg 2-3 időszak alatt. Ez a hatás viszonylag lassan cseng le a forint faktorok viszonylag magas perzisztenciája

miatt. A két magyar makrogazdasági faktor (CPI_{hun} , GAP_h) által generált sokkok csak nagyon rövid távokon térnek el szignifikánsan 0-tól, ami arra enged következtetni, hogy a magyar reálgazdasági helyzet változása csak rövid távú sokkok képében jelenik meg a hozamgörbében.

Sokkal lényegesebb az eurózónához köthető változók hatása a magyar hozamgörbére: a szint eltolódás (azaz a hosszú lejáratú Bund hozamok eltolódása) és az eurózóna infláció növekedése is a magyar hozamszint emelkedését eredményezi. E két változó varianciája 0,19 ill. 0,10, így egységnyi szórású sokk esetén a kérdéses sokkoknak az euró szint faktor esetén 90-100, az euró infláció esetén 100-110 százaléka jelenik meg a magyar hozamgörbében. Így például egy 20 bázispontos euró hozamszint emelkedés (csökkenés) egy maximum 18 bázispont körüli forint hozamszint emelkedést (csökkenést) okoz a rövidebb lejáratokon a modell szerint (4. ábra). A két faktor magas perzisztenciája miatt a sokkok sokáig megmaradnak a rendszerben, a forint hozamok szint eltolódása hosszútávon szignifikánsan nem nulla.

Az euró hozamgörbe meredekségét és görbületét érő egységnyi szórású pozitív (negatív) sokk rövidtávon a magyar hozamgörbe csökkenésével (növekedésével) jár együtt. Ez rávilágít a minta sajátosságára: a 2008-as válság során az ECB rendre alapkamat csökkentéssel próbálta élénkíteni az eurózóna gazdaságát, míg az MNB a forint alapkamatot emelni volt kénytelen a romló csődkockázati besorolás és csökkenő állampapírpiazi kereslet miatt. A kialakult alacsonyabb külső kamatkörnyezetet a forint hozamok csak késve tudták lekövetni. A Nelson-Siegel modellkeretben a rövid kamatláb mozgása a legmagasabb korrelációt az első majd a második faktoral mutatja, miközben ezek varianciája jóval meghaladja a szint faktorét, így szükséges, hogy a rövid kamatok viselkedéséhez hasonló eredményekre vezessenek az e faktorokat érő sokkok.

4.3 VARIANCIA DEKOMPOZÍCIÓ

Egy VAR dinamika becslése után hasznos eszköz az eredmények ismertetésében a variancia dekompozíció, amely azt mutatja meg, hogy egy adott változóban bekövetkező sokkok mennyiben magyarázhatók a többi változóban bekövetkező sokkokkal. E módszerrel az innovációk relatív fontosságáról kaphatunk képet különböző időtávok mellett. A továbbiakban az eredmények terjedelme miatt csak a 3 magyar hozamgörbe faktorhoz és a Forint/Euró árfolyamhoz tartozó variancia felbontást mutatjuk be részletesebben. A 2. táblázat, 3. táblázat, 4. táblázat és 5. táblázatok szemléltetik az eredményeket, 6 különböző időhorizonton egészen 3 éves időtartamig¹².

A táblázatok alapján általánosságban elmondható, hogy a makro faktorok és euró hozamgörbe faktorok hatása csak közép és hosszú távon kezd el megjelenni a forint

¹² A variancia dekompozíció során alkalmazott Cholesky-dekompozíció miatt az eredmények változhatnak a változók sorrendiségétől függően. A legjobb gyakorlatnak megfelelően a „legfontosabb” (legnagyobb hatást kifejteni képes) változók kerültek a sor elejére: így például az euróövezeti infláció esetén feltehető, hogy sokkjainak az egész rendszerre vonatkozóan van hatása, míg a sor legvégén álló magyar görbület faktor esetén ez közel sem mondható el. A sorrend a táblázatokon láthatóak szerint alakult, az első változó a CPI_{eur} volt, míg a forint hozamgörbe faktorai zárták a sort.

hozamokban. Ennek megfelelően a szint, görbület, valamint az árfolyam esetén az idősor saját varianciájának hatása folyamatosan csökken, miközben ezzel párhuzamosan a modell más változóinak aránya növekszik. Ez a legerőteljesebben a görbület faktor esetén tapasztalható, ahol 3 hónap esetén is a változó saját varianciájának aránya 50 százalék körüli, azonban 3 éves időtávon már az euróövezeti hozam szint és az euróövezeti infláció határozzák meg a görbület faktor varianciájának több mint 70 százalékát.

	1 hónap	3 hónap	6 hónap	1 év	2 év	3 év
<i>CPIeur</i>	0,002	0,009	0,021	0,024	0,029	0,046
<i>GAPe</i>	0,004	0,025	0,066	0,121	0,162	0,167
<i>B0e</i>	0,004	0,023	0,056	0,084	0,083	0,083
<i>B1e</i>	0,010	0,055	0,128	0,211	0,256	0,250
<i>B2e</i>	0,001	0,003	0,006	0,006	0,005	0,006
<i>CPIhun</i>	0,000	0,001	0,002	0,002	0,008	0,009
<i>GAPh</i>	0,002	0,008	0,018	0,031	0,030	0,031
<i>dS</i>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,003
<i>B0h</i>	0,977	0,874	0,701	0,520	0,421	0,399
<i>B1h</i>	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
<i>B2h</i>	0,001	0,001	0,001	0,002	0,004	0,005

2. táblázat: A magyar szint faktor variancia dekompozíciója.

Hasonló állapítható meg az árfolyam esetén is, ennél is a két legjelentősebb változó az euróövezeti hozam szint és infláció, jóllehet a folyamat saját varianciájának relatív fontosság még mindig 40 százalék 3 éves időtávon is. Némileg eltérően viselkedik a magyar szint faktor. Rövidtávon e változó innovációira csak az euróövezeti kibocsátási rés faktornak van mérhető hatása (alig 15 százalék), míg hosszabb távon az elmélettel összhangban az euró hozamgörbe innovációi (a 3 euró hozamgörbe faktor rész aránya közel 30 százalék) írják le e változó varianciáját.

	1 hónap	3 hónap	6 hónap	1 év	2 év	3 év
<i>CPIeur</i>	0,000	0,002	0,019	0,096	0,197	0,214
<i>GAPe</i>	0,002	0,007	0,010	0,008	0,012	0,012
<i>B0e</i>	0,001	0,001	0,003	0,040	0,152	0,200
<i>B1e</i>	0,014	0,058	0,098	0,097	0,069	0,063
<i>B2e</i>	0,004	0,017	0,034	0,051	0,064	0,068
<i>CPIhun</i>	0,002	0,008	0,016	0,023	0,020	0,018
<i>GAPh</i>	0,002	0,006	0,008	0,010	0,009	0,008
<i>dS</i>	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000
<i>B0h</i>	0,035	0,136	0,228	0,248	0,183	0,161
<i>B1h</i>	0,939	0,764	0,583	0,423	0,291	0,255
<i>B2h</i>	0,003	0,002	0,003	0,004	0,003	0,003

3. táblázat: A magyar meredekség faktor variancia dekompozíciója.

A 3. táblázat alapján szembetűnő, hogy a meredekség faktor varianciája több kisebb hatás eredőjeként áll össze. A magyar szint faktor varianciájának hozzájárulása 1 évnél éri el a maximumát, hasonlóan az euróövezeti meredekség faktorhoz. Hosszabb távon az euróövezeti szint faktor és infláció lesz meghatározó.

	1 hónap	3 hónap	6 hónap	1 év	2 év	3 év
<i>CPIeur</i>	0,012	0,083	0,191	0,326	0,401	0,419
<i>GAPe</i>	0,022	0,054	0,045	0,021	0,017	0,021
<i>B0e</i>	0,025	0,110	0,206	0,310	0,352	0,353
<i>B1e</i>	0,008	0,027	0,042	0,045	0,036	0,032
<i>B2e</i>	0,003	0,002	0,010	0,035	0,044	0,043
<i>CPIhun</i>	0,007	0,011	0,006	0,003	0,004	0,005
<i>GAPh</i>	0,138	0,319	0,298	0,172	0,094	0,081
<i>dS</i>	0,025	0,015	0,006	0,003	0,003	0,003
<i>B0h</i>	0,026	0,056	0,053	0,026	0,016	0,016
<i>B1h</i>	0,014	0,035	0,026	0,012	0,007	0,006
<i>B2h</i>	0,721	0,290	0,117	0,047	0,025	0,022

4. táblázat: A magyar görbület faktor variancia dekompozíciója.

A variancia dekompozíció jól rámutat a makro változók szükségességére; 2-3 éves időtávon a vizsgált 4 faktor innovációinak nagyjából 30 százalékát írta le valamilyen makro változó. A bevezetett makro változók közül a vártak megfelelően az euróövezeti inflációs mutató volt az, amely szinte mindegyik vizsgált változónál jelentős hozzájárulást mutatott az adott változó varianciájához, és így a hozamgörbe egészére érdemi hatása volt. A táblázatok jól rámutatnak hazánk világgazdasági kitettségre is. Az eredmények alapján látható, hogy 1 évnél hosszabb távon az euróövezethez köthető 5 változó határozza meg a 4 vizsgált faktor innovációinak több mint 50 százalékát. Miközben (leszámítva az adott faktor saját varianciáját) a magyar hozamgörbe és makro faktoroknak nincs érdemi hozzájárulása a magyar faktorok varianciájához. (Így például nem állítható az, hogy a magyar szint faktor varianciájából származna a magyar meredekség faktor varianciájának egy jelentékeny hányada.) A legnagyobb kitettséget a hozamgörbe görbület faktora mutatja, amelynek varianciáját 6 hónapos időtávon 50 százalékban, 3 éves időtávon pedig 86 százalékában magyarázzák az euróövezethez köthető faktorok. Így a leírtak alapján a görbület faktor tekinthető egy olyan csatornának, ahol az azonnal érzékelhető szinteltolódásokon túl a hozamgörbe alakját érintő fontosabb világgazdasági strukturális változások először és tartósan beépülhetnek a magyar hozamgörbébe.

	1 hónap	3 hónap	6 hónap	1 év	2 év	3 év
<i>CPIeur</i>	0,043	0,077	0,106	0,131	0,165	0,175
<i>GAPe</i>	0,043	0,031	0,053	0,070	0,077	0,081
<i>B0e</i>	0,043	0,071	0,089	0,099	0,118	0,137
<i>B1e</i>	0,001	0,005	0,017	0,028	0,029	0,028
<i>B2e</i>	0,018	0,028	0,027	0,028	0,029	0,031
<i>CPIhun</i>	0,003	0,012	0,013	0,013	0,012	0,012
<i>GAPh</i>	0,019	0,026	0,027	0,032	0,029	0,028
<i>dS</i>	0,740	0,618	0,542	0,483	0,431	0,404
<i>B0h</i>	0,023	0,034	0,031	0,028	0,028	0,028
<i>B1h</i>	0,040	0,055	0,054	0,052	0,049	0,046
<i>B2h</i>	0,026	0,043	0,041	0,037	0,033	0,031

5. táblázat: A Forint/Euró árfolyam variancia dekompozíciója

5 ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány a forint és euró hozamgörbe mozgását vizsgálta a két gazdaság (Magyarország és Eurózóna) fontosabb makro változóival. A bemutatott feltáró jellegű elemzések azt mutatják, hogy az eurózónához köthető faktorok nem elhanyagolható hatást gyakorolnak a forint hozamgörbére, mi több, az eredmények alapján a magyar makro változók gyakorlatilag csak rövidtávon képesek érdemben befolyásolni a forint hozamokat. Első ránézésre ez meglepő megállapítás, ugyanakkor ismert tény, hogy Magyarország mint kis nyitott gazdaság üzleti ciklusait erősen meghatározzák az eurózónában lejátszódó események. Így e modellben is szükségeszerű az eurózóna gazdaságát leíró faktorok dominanciája.

Rámutattunk a relatíve nehezen interpretálható görbület faktorok relevanciájára. A Nelson-Siegel modell görbület faktorainak (mindkét hozamgörbe esetén) innovációi korreláltak a legerősebben az árfolyam innovációival, miközben az átmenetmátrix alapján a magyar görbület volt az a faktor, amelynek mozgására a makro változók szignifikáns hatást fejtettek ki. Az eredmények alapján látható, hogy a Forint/Euró árfolyamot érő sokkok a teljes hozamgörbével (mindhárom faktoral) erősen korreláltak.

A jelen tanulmányban bemutatott modellt számos helyen lehet bővíteni, például az F , Q , R és μ paramétereket a teljes becslési időhorizonton állandóknak tekintettük, miközben sejthető, hogy ezek időben változhatnak. A jövőben hasznos bővítése lehet a modellnek például egy rezsimváltó dinamika feltételezése, vagy sztochasztikus volatilitás beépítése a modellbe (ez esetben a hibák kovariancia mátrixai időben változnak). Lehetséges még további elméleti feltételek hozzáadása a modellhez, így például Christensen és szerzőtársai (2011) alapján egy arbitrázsmentes Nelson-Siegel modell megalkotása kétországos keretben. Szóba jöhet még a makro változók körének változtatása (például folyó fizetési mérleg egyenleg, vagy költségvetési egyenleg bevonása) is. Azonban a bővítési lehetőségek ellenére is, ez a viszonylag egyszerű modell is képes volt rámutatni a forint és euró hozamgörbe közötti fontosabb összefüggésekre, a makro változók hozamgörbékkel kapcsolatos fontosabb vonatkozásaira.

FÜGGELÉK A: GIBBS-MINTAVÉTELEZÉS

A Bayes-i statisztikában a cél valamely paraméter halmaz (θ) posterior eloszlásának meghatározása a minta (y) függvényében:

$$p(\theta|y) = p(\theta, y)/p(y)$$

Felhasználva a Bayes tételt ez tovább alakítható a következő alakra:

$$p(\theta|y) = p(y|\theta)p(\theta)/p(y)$$

Mivel az adatok rögzítettek ezért $p(y)$ egy konstans érték minden paraméter halmazra, így a paraméterek posterior eloszlása arányos a likelihood ($p(y|\theta)$) és prior eloszlások szorzatával ($p(\theta)$). Ebben a felírásban a prior eloszlás tekinthető az elemző kezdeti várakozásainak, ami aztán az adatok megismerése után frissítésre kerül. A helyes prior kiválasztás az optimalizálási tér szűkítésével jelentősen lecsökkentheti a számítási igényt. A paraméterek együttes eloszlásának ($p(\theta|y)$), vagy ezek különböző momentumainak meghatározása közel sem egyszerű (ez a gyakorlatban egy többszörös numerikus integrálást jelentene), ehelyett sokkal egyszerűbb ezek marginális eloszlásaiból mintát venni, azaz a $p(\theta_i|y, \theta_{-i})$ eloszlásokból realizációkat generálni. (Itt θ_i jelöli az i -edik paramétert, míg θ_{-i} az összes többi paramétert tartalmazó halmazt.) Megmutatható, hogy az iterációk számának növekedésével a feltételes eloszlások exponenciális sebességgel konvergálnak a paraméterek együttes eloszlásához¹³. A jelen munkában használt Gibbs-féle mintavételezési algoritmus a következő pontokban foglalható össze:

1. Alkalmas kezdő pontokat választunk, azaz olyan kezdő paraméter értékeket, amelyek benne vannak a paraméter térben. A látens faktorokat láthatóvá tesszük, még pedig úgy, hogy kihelyettesítjük az empirikus megfelelőikkel azokat, ezekre pedig megbecsüljük a modell átmenet egyenletét a legkisebb négyzetek módszerével, valamint a kapott faktorokkal meghatározzuk R kovariancia mátrixot¹⁴.

2. Második lépésben adott paraméterek ($R, Q, F, \mu, \lambda_{t,E}, \lambda_{t,E}$) mellett lefuttatjuk a Kálmán-szűrőt, az átmenet egyenlet posterior kovariancia mátrixaival lehetőség van a Carter és Kohn-féle (1994) módszertan szerint véletlen faktorok generálására. A Kálmán-szűrő a következő egyenletekkel adható meg a jelen munkában vizsgált problémára, ahol $K_t = P_{t|t-1}H_t'S_{t|t-1}^{-1}$ jelöli az úgynevezett Kálmán-nyereséget:

$$X_{t|t-1} = \mu + FX_{t-1|t-1},$$

$$P_{t|t-1} = FP_{t-1|t-1}F' + Q,$$

$$Z_{t|t-1} = Y_t + H_tX_{t|t-1},$$

$$S_{t|t-1} = H_tP_{t|t-1}H_t' + R,$$

$$X_{t|t} = X_{t|t-1} + K_tZ_{t|t-1},$$

¹³ Ennek egy bizonyításáért lásd.: Athreya és szerzőtársai (1992), a Gibbs mintavételezés egy intuitív magyarázatát adja Casella és George (1992).

¹⁴ Ez lényegében a Diebold és szerzőtársai (2006) által alkalmazott kétlépcsős eljárás a Kálmán-szűrő futtatása nélkül.

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t) P_{t|t-1}.$$

Az utolsó időszaki faktor értékek ($X_{T|T}$), valamint az utolsó időszaki (T) posterior kovariancia mátrix ($P_{T|T}$) segítségével az utolsó időszakra egy véletlen faktor realizáció generálható az

$$X_T \sim N(X_{T|T}, P_{T|T})$$

eloszlásból. Ezt követően időben visszafelé haladva a következő két formula ismeretében véletlen faktor realizációk generálhatók a többi időszakra is (Carter és Kohn 1994):

$$X_{t|t, X_{t+1}} = X_{t|t} + P_{t|t} F' (F P_{t|t} F' + Q)^{-1} (X_{t+1} - \mu - F X_{t|t})$$

$$P_{t|t, X_{t+1}} = P_{t|t} - P_{t|t} F' (F P_{t|t} F' + Q)^{-1} F P_{t|t}$$

azaz: $X_t \sim N(X_{t|t, X_{t+1}}, P_{t|t, X_{t+1}})$.

3. A kapott faktor realizációk mellett új véletlen paramétereket generálunk. Villiani (2009) eredményeivel összhangban hasznos lehet a rendszer permanens értékeire rögzített állandósult állapotbeli értékeket megadni, így az inflációs mutatók esetén feltesszük, hogy a permanens érték közel lesz a magyar inflációs célhoz (3 százalék), ill. az euróövezeti infláció közel lesz 1,75 százalékhöz, ami nagyjából az ECB előrejelzéseiben megadott számnak felel meg. A kibocsátási rések esetén a feltételezés az, hogy permanens állapotban az értéke 0. A faktorok és az árfolyam esetén a prior permanens értékeket az első pontban leírtak eredményeiből kaptuk.

A továbbiakban legyen $C = (I - F)^{-1} \mu$ a permanens értékek vektora, ezt kivonva az (5)-ös egyenlet mindkét oldalából és bevezetve az $X_t^* = X_t - C$ a jelölést:

$$X_{t+1}^* = F X_t^* + \varepsilon_t$$

valamint legyen $X^* = [X_1^*, X_2^*, \dots, X_T^*]'$ és jelölje L a lag operátort. Ekkor Sugita (2008) alapján adott $vec(F_{prior}) \sim N(vec(F_0), V_0)$ prior eloszlás mellett meghatározható F feltételes posterior eloszlása a többi paraméter és faktorok mellett, amiből aztán a mintavételezés is történik:

$$vec(F_{posterior}) \sim N(vec(F), V)$$

$$V = [V_0^{-1} + Q \otimes (X^{*'} X^*)]^{-1}$$

$$vec(F) = V [V_0^{-1} vec(F_0) + (Q \otimes I(k))^{-1} vec((L X^{*'}) X^*)]$$

A fenti felírásokban $I(k)$ jelenti az egység vektort (k értéke egyenlő F oszlopainak számával), $\otimes$ pedig a Kronecker szorzatot jelöli. Amennyiben az F -re kapott realizációnak van abszolút értékben egynél nagyobb sajátértéke, akkor a kapott realizáció helyett újat generálunk, ezzel biztosítva F kovariancia stacionaritását.

4. Az F paramétereinek ismeretében a következő lépés a mintavétel C -ből. Villiani (2009) megmutatta, hogy C posterior eloszlása többdimenziós normális, amennyiben a modell hibatagjai is több dimenziós normális eloszlásúak és C prior eloszlása többdimenziós normális ($C_{prior} \sim N(c_0, \Sigma_c)$):

$$C_{posterior} | Q, F, X^* \sim N(c^*, \Omega^*)$$

$$\Omega^* = (\Sigma_c^{-1} + U'(D'D \otimes Q^{-1})U)^{-1}$$

$$c^* = \Omega^*(U'vec(Q^{-1}X^*D) + \Sigma_c^{-1}c_0)$$

A posterior eloszláshoz szükséges U és D mátrixok a következő módon adhatók meg:

$$U = \begin{bmatrix} I(k) \\ F \end{bmatrix},$$

$$D = [1_T, -1_T],$$

ahol 1_T egy T periódus hosszúságú 1-esekből álló oszlopvektor. C generálása után könnyedén megkapható a μ paraméter értéke az alábbi formulával:

$$\mu = (I(k) - F)C$$

Fontos látni kell, hogy a 3. lépésben, valamint a második lépésben is fontos a prior kovariancia mátrixok (Σ_c , V_0) szerepe, ugyanis e (jellemzően diagonálisnak választott) mátrixok határozzák meg azt, hogy az algoritmus mekkora paraméter teret „derít fel”. Ha a priorok varianciája kicsi, akkor az algoritmus a prior értékekhez nagyon közeli eredményeket fog visszaadni, így nem fog értékelhető becslést eredményezni. Jelen munkában V_0 diagonálisának értékeit 0,1-nek, Σ_c diagonálisainak értékeit (makro változókhoz tartozó paraméterek esetén) 0,005-nek választjuk, Σ_c diagonálisának hozamgörbe faktorokhoz tartozó értéke 0,1.

5. A Q és R kovariancia mátrixok posterior eloszlásai inverz Wischart (IW) eloszlásúak (illetve mivel R diagonális, így speciálisan R posterior eloszlása inverz gamma). Q posterior eloszlása adott $Q_{prior} \sim IW(Q_0, T)$ prior eloszlásnál (Sugita 2008):

$$Q_{posterior}|F, X^* \sim IW(Q^*, T^*)$$

$$Q^* = (X^* - FLX^*)'(X^* - FLX^*) + Q_0$$

$$T^* = 2T$$

Minimális módosításokkal megkapható R posterior eloszlása is a prior eloszlás $R_{prior} \sim IW(R_0, T)$ definiálása után:

$$R_{posterior}|X^* \sim IW(R^*, T^*)$$

$$R^* = (Y - HX^*)'(Y - HX^*) + R_0$$

$$T^* = 2T.$$

6. A modell $\lambda_{t,E}$ és $\lambda_{t,M}$ paramétereit az úgynevezett véletlen bolyongásos Metropolis-Hastings-eljárással becsüljük. Ennek lényege a következő:

- Minden időpontban új paramétereket generálunk az alábbi formula segítségével, legyenek ezek a paraméterek: $\lambda_{t,E}^{új}, \lambda_{t,M}^{új}$
- $\begin{bmatrix} \lambda_{t,E}^{új} \\ \lambda_{t,M}^{új} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{t,E} \\ \lambda_{t,M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix}$, ahol $e_{1,t}$ és $e_{2,t}$ független standard normális eloszlású változók.
- Az új paraméterekkel elkészítjük a H mátrixot adott időszakra, amelynek segítségével kiértékelhetjük a mérési egyenlett likelihood függvényét (ϕ) adott időszakban, a generált paraméterek és faktorok mellett, normális eloszlású hibatagokat feltételezve.

- A régi és új paraméterek likelihood függvény értékének hányadosa adja meg az elfogadási valószínűséget, $\alpha = \min\left(\frac{\phi(\lambda_{t,E}^{új}, \lambda_{t,M}^{új})}{\phi(\lambda_{t,E}, \lambda_{t,M})}, 1\right)$.
- Ezt követően α valószínűséggel fogadjuk el az új értékeket. A λ paraméterek kezdeti értéke az első iterációban minden időszakban egységesen 1 volt.

7. A 2-6-os lépéseket addig ismételjük, amíg a konvergencia meg nem felel az elvárásainknak.

Általánosságban elmondható, hogy a mintavételezés eredményei akkor tekinthetők „jóknak”, ha a végeredményként kapott becslés nem függ a kezdeti értékek megválasztásától, az iterációk által kapott paraméter láncok középértéke nem tér el egymástól túlságosan. Így a Geweke (1991) statisztikával a lánc úgynevezett felfűtési periódusa utáni posterior paraméter értékeit és a lánc legutolsó paraméter értékeit lehet összehasonlítani. A teszt statisztika a következő alakban adható meg egy tetszőleges X paraméter láncra:

$$T = \frac{\bar{X}_a - \bar{X}_b}{\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} - \frac{s_b^2}{n_b}}} \sim N(0,1), \text{ ha } n_a, n_b \rightarrow \infty$$

$\bar{X}_a$ jelöli a paraméter lánc első „ a ” százalékának átlagát, míg $\bar{X}_b$ az utolsó „ b ” százalék átlagát, s_a^2 és s_b^2 jelöli az ezekhez tartozó varianciákat, a mintaelemszámokat n_a és n_b jelöli. Mivel a lánc elemei nem függetlenek, ezért a varianciákat korrigálni kell a minta spektrál sűrűségével, erről részletesebben lásd.: Geweke (1991). Nyilván a szimuláció, legyen az a Gibbs mintavételezés, vagy a λ paramétereknél alkalmazott véletlen bolyongásos Metropolis-Hastings eljárás akkor jó, ha a két minta átlaga nem tér el egymástól túlzottan, azaz a Geweke (1991) teszt nullhipotézise teljesül: a két minta átlag megegyezik. Jelen munkában a és b értékét 10 és 50 százalékának választjuk. A 6. táblázat az egyes paraméter csoportokra kapott értékeket foglalja össze. Helytakarékossági okokból csak az adott paraméter halmaz tesztstatisztikáinak bizonyos összefoglaló adatait közöljük. A tesztstatisztika eredményei azt mutatják, hogy a szimuláció konvergált, azaz a 100 ezer iteráció elégségesnek bizonyult.

	Átlag	Medián	Szórás	Minimum	Maximum	Elutasítás
μ	-0,058	-0,087	0,562	-1,042	0,774	0,000
F	0,013	0,000	0,741	-2,542	2,434	0,033
Q	-0,032	0,036	0,815	-2,214	2,462	0,033
R	0,001	0,000	0,042	-1,809	0,753	0,000
λ_M	-0,105	-0,041	0,322	-1,624	0,740	0,000
λ_E	-0,055	-0,087	0,189	-0,484	1,237	0,000

6. táblázat: a Geweke tesztstatisztika értékei

Az átlag, szórás, medián, minimum és maximum értékeket az adott paraméter csoportra lefuttatott tesztstatisztikák értékeiből számoltuk. Így például az F paraméter csoport esetén a 121 lánc 121 tesztstatisztikájából számoltuk ezen értékeket. Az „Elutasítás” azoknak a paramétereknek az arányát jelöli adott paraméter csoporton belül, amelyeknél 99 százalékos valószínűséggel el lehet vetni a két mintaátlag egyezőségét.

FÜGGELÉK B: MODELL EREDMÉNYEK

	<i>B0H</i>	<i>B1H</i>	<i>B2H</i>	<i>B0E</i>	<i>B1E</i>	<i>B2E</i>	<i>GAPEU</i>	<i>CPIEU</i>	<i>GAPHUN</i>	<i>CPIHUN</i>	<i>dS</i>	μ
<i>B0H</i>	0,798 (0,063)	0,005 (0,047)	0,035 (0,035)	0,11 (0,07)	-0,136 (0,072)	0,062 (0,038)	0,038 (0,044)	0,003 (0,049)	-0,122 (0,038)	-0,076 (0,02)	-0,026 (0,021)	0,778 (0,357)
<i>B1H</i>	0,167 (0,061)	0,77 (0,04)	0 (0,03)	-0,043 (0,066)	0,201 (0,063)	-0,066 (0,03)	-0,007 (0,035)	0,014 (0,038)	0,185 (0,031)	0,129 (0,015)	0,065 (0,015)	-1,326 (0,272)
<i>B2H</i>	0,285 (0,099)	0,137 (0,07)	0,685 (0,047)	-0,102 (0,093)	0,526 (0,094)	-0,165 (0,051)	-0,032 (0,06)	0,285 (0,069)	0,265 (0,055)	0,04 (0,031)	0,177 (0,029)	-1,437 (0,479)
<i>B0E</i>	0 -	0 -	0 -	0,868 (0,052)	0,08 (0,06)	0,013 (0,029)	-0,028 (0,032)	-0,004 (0,034)	0 -	0 -	0 -	0,374 (0,182)
<i>B1E</i>	0 -	0 -	0 -	0,102 (0,051)	0,816 (0,052)	0,06 (0,023)	0,018 (0,025)	0,024 (0,025)	0 -	0 -	0 -	-0,398 (0,149)
<i>B2E</i>	0 -	0 -	0 -	0,021 (0,066)	0,04 (0,062)	0,808 (0,03)	-0,018 (0,034)	-0,053 (0,038)	0 -	0 -	0 -	-0,297 (0,195)
<i>GAPEU</i>	0 -	0 -	0 -	0,113 (0,045)	0,036 (0,047)	0,058 (0,021)	0,946 (0,022)	-0,007 (0,023)	0 -	0 -	0 -	0,051 (0,133)
<i>CPIEU</i>	0 -	0 -	0 -	0,035 (0,043)	0,027 (0,039)	0,041 (0,017)	0,001 (0,018)	0,954 (0,018)	0 -	0 -	0 -	0,175 (0,111)
<i>GAPHUN</i>	-0,01 (0,039)	-0,012 (0,024)	-0,024 (0,019)	0,131 (0,043)	0,139 (0,041)	0,012 (0,018)	-0,065 (0,02)	0,09 (0,021)	0,899 (0,016)	-0,064 (0,008)	-0,01 (0,007)	0,068 (0,198)
<i>CPIHUN</i>	0,146 (0,057)	-0,026 (0,037)	0,028 (0,027)	-0,164 (0,058)	-0,037 (0,058)	0,101 (0,027)	0,054 (0,031)	-0,069 (0,033)	0,001 (0,026)	0,946 (0,014)	-0,018 (0,014)	0,175 (0,29)
<i>dS</i>	-0,097 (0,097)	0,087 (0,083)	-0,099 (0,056)	0,148 (0,088)	0,03 (0,1)	-0,075 (0,065)	0,057 (0,074)	0,183 (0,089)	0,074 (0,076)	-0,068 (0,039)	-0,013 (0,043)	-0,057 (0,627)

7. táblázat: Az átmenet mátrix (F) és a drift (μ) paraméterei, Forrás: ÁKK adatok és saját számítások.

	<i>B0H</i>	<i>B1H</i>	<i>B2H</i>	<i>B0E</i>	<i>B1E</i>	<i>B2E</i>	<i>GAPEU</i>	<i>CPIEU</i>	<i>GAPHUN</i>	<i>CPIHUN</i>	<i>dS</i>
<i>B0H</i>	0,310 (0,068)	-0,185 (0,081)	-0,095 (0,105)	0,041 (0,057)	-0,031 (0,068)	-0,041 (0,052)	-0,029 (0,052)	0,008 (0,03)	-0,001 (0,038)	0,007 (0,053)	0,250 (0,109)
<i>B1H</i>		0,350 (0,05)	0,140 (0,083)	-0,002 (0,059)	-0,013 (0,057)	0,022 (0,041)	0,003 (0,042)	-0,022 (0,024)	-0,004 (0,032)	0,002 (0,048)	-0,190 (0,106)
<i>B2H</i>			1,414 (0,14)	0,052 (0,089)	-0,080 (0,087)	0,002 (0,066)	-0,042 (0,066)	-0,009 (0,039)	-0,029 (0,051)	0,058 (0,074)	0,346 (0,168)
<i>B0E</i>				0,191 (0,047)	-0,121 (0,058)	-0,110 (0,051)	-0,040 (0,04)	-0,002 (0,027)	-0,007 (0,037)	0,013 (0,053)	0,025 (0,1)
<i>B1E</i>					0,185 (0,041)	0,101 (0,035)	0,046 (0,028)	0,008 (0,022)	0,010 (0,034)	-0,015 (0,051)	-0,053 (0,1)
<i>B2E</i>						0,427 (0,038)	0,017 (0,027)	0,005 (0,019)	0,010 (0,025)	0,006 (0,037)	-0,204 (0,089)
<i>GAPEU</i>							0,111 (0,025)	0,018 (0,016)	0,003 (0,025)	0,006 (0,037)	-0,070 (0,08)
<i>CPIEU</i>								0,100 (0,011)	0,002 (0,014)	0,016 (0,021)	-0,026 (0,049)
<i>GAPHUN</i>									0,092 (0,018)	-0,008 (0,03)	-0,032 (0,061)
<i>CPIHUN</i>										0,243 (0,039)	-0,206 (0,099)
<i>dS</i>											4,631 (0,299)

8. táblázat: A kovariancia mátrix (Q) paraméterei, Forrás: ÁKK adatok és saját számítások.

FÜGGELÉK C: ADATOK ÉS FORRÁSAIK

Változó	Leírás	Forrás
dS	Az MNB által publikált hivatalos Forint/Euró napi középárfolyamok havi frekvenciára transzformálva.	MNB
CPIHun	Harmonizált fogyasztói árindex (előző év azonos időszaka 100 %), szezonálisan és naptárhatással korrigált adatok.	Eurostat
CPIEur	Harmonizált fogyasztói árindex (előző év azonos időszaka 100 %), szezonálisan és naptárhatással korrigált adatok.	Eurostat
GAPh	Szezonálisan és naptárhatással korrigált GDP volumen index idősor, 2010=100, negyedéves frekvencián. A kibocsátási rést a Hodrick-Prescott-szűrő segítségével állítottuk, elő 1600-as simítási paraméterrel, ezt követően az adatokat havi frekvenciára transzformáltuk, amelyből kivontuk az eurózónára kapott kibocsátási rés idősort.	Eurostat
GAPe	Szezonálisan és naptárhatással korrigált GDP volumen index idősor, 2010=100, negyedéves frekvencián. A kibocsátási rést a Hodrick-Prescott-szűrő segítségével állítottuk, elő 1600-as simítási paraméterrel, ezt követően az adatokat havi frekvenciára átalakítottuk. /eurózóna: EA11-2000, EA12-2006, EA13-2007, EA15-2008, EA16-2010, EA17-2013, EA18-2014, EA19/.	Eurostat
Forint hozamok	Államadósság Kezelő Központ Zrt., Fama-Bliss adatbázis.	ÁKK
Euró hozamok	ECB hozamgörbe, AAA értékelésű kötvények hozamai.	ECB

9. táblázat: a modellben használt változók és hozampontok forrásai

IRODALOMJEGYZÉK

- Anderson, Bing, Peter J. Hammond és Cyrus A. Ramezani. 2010. „Affine Models of the Joint Dynamics of Exchange Rates and Interest Rates”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 45 (05): 1341–65.
- Athreya, Krishna B, Hani Doss és Jayaram Sethuraman. 1992. „A proof of convergence of the Markov chain simulation method”.
- Brandt, Michael W és Pedro Santa-Clara. 2001. „Simulated Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to Exchange Rate Dynamics in Incomplete Markets”. Working Paper 274. National Bureau of Economic Research.
- Brennan, Michael J és Yihong Xia. 2006. „International capital markets and foreign exchange risk”. *The Review of Financial Studies* 19 (3): 753–795.
- Carter, Chris K és Robert Kohn. 1994. „On Gibbs sampling for state space models”. *Biometrika* 81 (3): 541–553.
- Casella, George és Edward I George. 1992. „Explaining the Gibbs sampler”. *The American Statistician* 46 (3): 167–174.
- Chen, Yu-chin és Kwok Ping Tsang. 2013. „What does the yield curve tell us about exchange rate predictability?” *Review of Economics and Statistics* 95 (1): 185–205.
- Christensen, Jens H. E., Francis X. Diebold és Glenn D. Rudebusch. 2011. „The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models”. *Journal of Econometrics* 164 (1): 4–20.
- De Pooter, Michiel, Francesco Ravazzolo és Dick JC Van Dijk. 2007. „Predicting the term structure of interest rates: Incorporating parameter uncertainty, model uncertainty and macroeconomic information”.
- Diebold, Francis X, Canlin Li és Vivian Z Yue. 2006. „Global Yield Curve Dynamics and Interactions: A Generalized Nelson-Siegel Approach”. Working Paper, University of Pennsylvania.
- Fama, Eugene F. és Robert R. Bliss. 1987. „The Information in Long-Maturity Forward Rates”. *The American Economic Review* 77 (4): 680–692.
- Geweke, John F. 1991. „Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments”. Staff Report 148. Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Hördahl, Peter, Oreste Tristani és David Vestin. 2006. „A joint econometric model of macroeconomic and term-structure dynamics”. *Journal of Econometrics* 131 (1): 405–44.
- Joslin, Scott, Marcel Pribsch és Kenneth J Singleton. 2014. „Risk premiums in dynamic term structure models with unspanned macro risks”. *The Journal of Finance* 69 (3): 1197–1233.
- Julier, S és J Uhlmann. 1997. „A new extension of the kalman Filter to nonlinear systems. Int. Symp”. *Aerospace/Defense Sensing* 44: 46.
- Mouabbi, S. 2014. „An arbitrage-free Nelson-Siegel term structure model with stochastic volatility for the determination of currency risk premia”. Working papers 527. Banque de France.
- Nelson, Charles R. és Andrew F. Siegel. 1987. „Parsimonious Modeling of Yield Curves”. *The Journal of Business* 60 (4): 473–489.

- Pericoli, Marcello és Marco Taboga. 2012. „Bond risk premia, macroeconomic fundamentals and the exchange rate”. *International Review of Economics & Finance* 22 (1): 42–65.
- Reguly Ágoston. 2015. „A magyar állampapírok hozamgörbe modelljeinek illesztése globális optimalizáló módszerekkel és paraméteinek idősoros elemzése”. ÁKK belső tanulmány.
- Reppa Zoltán. 2009. „A joint macroeconomic-yield curve model for Hungary”. MNB Working Papers.
- Rudebusch, GlennD és Tao Wu. 2008. „A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy”. *Economic Journal* 118 (530): 906–26.
- Sugita, Katsuhiko. 2008. „Bayesian analysis of a vector autoregressive model with multiple structural breaks”. *Economics Bulletin* 3 (22): 1–7.
- Svensson, Lars EO. 1994. „Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994”. National bureau of economic research.
- Tran Dávid. 2016. „Empirikus hozamgörbe modellek”. ÁKK belső tanulmány.
- Villani, Mattias. 2009. „Steady-state priors for vector autoregressions”. *Journal of Applied Econometrics* 24 (4): 630–50.
- Yin, Weiwei és Junye Li. 2014. „Macroeconomic fundamentals and the exchange rate dynamics: A no-arbitrage macro-finance approach”. *Journal of International Money and Finance* 41: 46–64.