



MARKOV REZSIMVÁLTÓ MODELLEK

Rezsimváltó modellek alkalmazásai magyar
idősorokon

Kivonat

A tanulmányban több Markov rezsimváltó modellt is alkottunk, amelyek összességében jól adták vissza az adatok alapján elvárt stilizált tényeket. A második fejezetben megalkotott egyszerű adósságmodell eredményei rámutattak, hogy érdemes a devizaadósságot csökkenteni, és bemutatták, hogy milyen főbb kockázati faktoroktól függhet a magyar államadósság alakulása. A Nelson-Siegel modell rezsimváltó variációinak vizsgálata során a dinamikus, változó belső paramétert használó Nelson-Siegel modell alkalmazása mellett döntöttünk.

Bebesi László, Bebes András

TARTALOMJEGYZÉK

Ábrajegyzék.....	ii
Táblázatjegyzék	iii
1 Bevezetés	1
2 Markov rezsinváltó VAR modell az államadósság modellezésére	3
2.1 Modellkeret.....	3
2.2 Eredmények	4
2.2.1 Adatok, feltevések	4
2.2.2 Államadósság-előrejelzések	5
3 Markov rezsinváltó hozamgörbe modellek	10
3.1 Modellkeret.....	10
3.2 A modellkeret és a no-arbitrage feltételek.....	12
3.3 Eredmények	15
4 Összefoglalás	18
Irodalomjegyzék	19
Függelék A: Becslési módszertan.....	22
A Markov Lánc Monte Carlo becslési eljárás.....	22
A Kim-szűrő.....	24
Függelék B: A modellek eredményei.....	27
Az adósságmodellhez tartozó táblák és eredmények	27
Monte Carlo kísérlet	29
Az AFNS és DNS modellkeretek vizsgálata rezsinváltás esetén.....	30
A kétországos rezsinváltó hozamgörbe modellhez kapcsolódó becslési eredmények..	33

ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra: A rezsimek feltételes bekövetkezési valószínűségei	6
2. ábra: Államadósság-pályák két rezsim esetén.....	7
3. ábra: Államadósság-pályák konjunktúrában.....	7
4. ábra: Államadósság-pályák recesszióban.....	8
5. ábra: Államadósság-pályák különböző elsődleges egyenlegek mellett.....	8
6. ábra: Államadósság-pályák különböző döntéshozói preferenciák mellett.....	9
7. ábra: Az MS-AFNS és az MS-DNS modell.....	15
8. ábra: A modell által adott (simított) állapotvalószínűségek	16
9. ábra: A modell által adott átlagos hozamgörbe értékek	16
10. ábra: A modell előrejelzései.....	17
11. ábra: A modell permanens értékei (Infláció, GDP).....	27
12. ábra: A becslési eredmények és az eredeti állapotok	30
13. ábra: A vizsgált 46 modell illeszkedése a Forint hozamokra (MAE)	31
14. ábra: A modellek előrejelző ereje (RMSE).....	32
15. ábra: A modellek előrejelző ereje (MAE).....	32
16. ábra: A becsült λ paraméterek időszora	33

TÁBLÁZATJEGYZÉK

1. táblázat: Az átmenetmátrix értékei	6
2. táblázat: Permanens értékek az egyes rezsimekben	6
3. táblázat: Az MS-VAR modell driftjének paraméterei.....	27
4. táblázat: Az MS-VAR modell hibatagjainak kovarianciái	28
5. táblázat: Az MS-VAR modell átmenetmátrixának paraméterei	28
6. táblázat: A Geweke-teszt értékei különböző paraméterek esetén (MS-VAR modell)	29
7. táblázat: A becsült és tényleges értékek.....	29
8. táblázat: Az átmenetmátrix (P) paraméterei.....	33
9. táblázat: A két országos hozamgörbe modell permanens értékei az egyes állapotok esetén.....	33
10. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet mátrixa az 1-es állapotban	34
11. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet mátrixa a 2-es állapotban	34
12. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet egyenletének kovariancia mátrixa az 1-es állapotban	35
13. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet egyenletének kovariancia mátrixa a 2-es állapotban	35

1 BEVEZETÉS

Mind alapvető elmélettel, mind formális tesztekkel könnyen alátámasztható érv az idősoelemzésben, hogy egy hosszabb minta esetén az adatgeneráló folyamat paraméterei időben megváltozhatnak, és nemlineáris hatások jelenhetnek meg. E hatások könnyen megjeleníthetők rezsimmáltó modellekkel, amelyek először Quandt (1972) munkájában jelentek meg a közgazdaság területén. A rezsimmáltó modellek két főbb csoportra oszthatók: (1) a küszöb („threshold”) modellek esetén a rendszer állapotai közötti váltás a megfigyelt változók egy adott, nem megfigyelhető szint fölé kerülésével történik meg (Tong 2012), (2) a Markov rezsimmáltó modellek esetén (J. D. Hamilton 1989; Kim és Nelson 1999) pedig a rezsimok egy Markov-lánc segítségével váltakoznak.

Jelen munkában Markov rezsimmáltó modellek alkalmazhatóságát vizsgáljuk hazai vonatkozású idősorokon. Számos közgazdasági elmélet foglalkozik a gazdasági szereplők viselkedésében bekövetkező hirtelen változásokkal, vagy éppen a folyamatok időbeni hirtelen megváltozásával, törések megjelenésével az idősorokban. Így a közgazdasági alkalmazásukat tekintve két fontosabb kutatási téma jelent meg a 90-es évek elején a Markov rezsimmáltó modellekre vonatkozóan:

- Hamilton (1989) úttörő jelentőségű munkája után elfogadott tény lett a makroökómia területén, hogy konjunktúra és recesszió idején az egyes fontosabb makro változók (infláció, munkanélküliség, hozamszintek stb.) viselkedése markánsan eltérhet. Így ezen üzleti ciklus modellek rezsimenként eltérő adatgeneráló folyamattal rendelkeznek. (Egy késői rezsimmáltó dinamikus faktor modellezésnél történő felhasználásáért lásd.: Camacho és szerzőtársai (2012))
- Hasonlóan a pénzügyek területén a volatilitás lecsengése a turbulens valamint a békésnek ítélt periódusokban eltérő viselkedést mutat; előbbiben a magas volatilitás gyors lecsengése tapasztalható, míg utóbbiban a alacsonyabb volatilitás magas perzisztenciával tapasztalható. A rezsimmáltó volatilitásra sok specifikáció elképzelhető, így például Hamilton és Susmel (1994) rezsimmáltó ARCH modellje, vagy Gray (1996) rezsimmáltó GARCH modellje.

A rezsimmáltó hozamgörbe modellekhez két fontosabb kutatási irány köthető. Egyrészt a hagyományos no-arbitrage modellek rezsimmáltással történő bővítése egy gyakori irány (egy rezsimmáltó Vasicek modellért lásd: Dai és szerzőtársai (2007), Egy rezsimmáltó CIR és Hull-White modellre jó példát nyújt: Elliot és Siu (2009)), másrészt az ÁKK-által használt Nelson-Siegel (1987) modell különböző változatait használja gyakran az irodalom (egy egyszerűbb Markov rezsimmáltó modellért lásd.: Hevia és szerzőtársai (2015)). A modellkeret felhasználása itt sokrétű, Christensen (2013) például az USD hozamgörbe vizsgálata során rámutat, hogy a nullához közeli, nulla alatti hozamok dinamikájának megértéséhez hasznos lehet két állapotot megkülönböztetni, a nulla közeli hozamszintek esetén a rövid lejáratú hozam („short rate”) mozgását segíthet leírni egy negyedik faktor (Svensson 1994). Szintén amerikai adatokon Levant és Ma (2013) egy Dinamikus Nelson-Siegel (DNS) modellt illeszt

Markov rezsimváltással. A tanulmányukban Christensennel (2013) szemben a válsághelyzetekben tapasztalható eltérő hozamgörbe formákat, ill. annak helyes megjelenítését emelik ki a modell főbb előnyeit említve. Rámutatnak, hogy a rezsimváltás segíthet megérteni a Nelson-Siegel modell belső paraméterének mozgását is¹. Zhu és Rahman (2015) a kiindulási alapul szolgáló DNS modellt makro változókkal bővítik, a modell előrejelző erejének növekedését kapva.

Jelen tanulmányban két modellt mutatunk be. A második fejezetben egy egyszerű Markov rezsimváltó vektor autoregresszív (MS-VAR) modellt becsülünk meg. E modell és a GDP arányos államadósságra vonatkozó egyszerű formula segítségével kapott modellkeret segítségével tudjuk bemutatni a rezsimváltó modellek néhány fontosabb jellemzőjét. A harmadik fejezetben egy Markov rezsimváltó dinamikus Nelson-Siegel (MS-DNS) modell mutatunk be. Bizonyos tekintetben az utóbbi modell a második fejezetben található MS-VAR modell egy lehetséges bővítése, ez utóbbi ugyanis már állapotter keretben jeleníti meg a modellt. Az MS-DNS modell bemutatása során két fontosabb problémára térünk ki: egyrésztől végzünk egy komparatív elemzést, amelyben megvizsgáljuk, hogy szükséges-e arbitrázsmentességre vonatkozó bővítését használni a modellben.

¹ A rezsimváltó belső paraméter (Nelson-Siegel modell) alkalmazásának lehetőségét részletesen bemutatjuk a tanulmány 3. fejezetében.

2 MARKOV REZSIMVÁLTÓ VAR MODELL AZ ÁLLAMADÓSSÁG MODELLEZÉSÉRE

2.1 MODELLKERET

A következőkben egy igen egyszerű MS-VAR modell kerül bemutatásra. E modell segítségével trajektóriákat generálunk, amelyek eredményeit beírva egy kisebb differencia egyenletbe, adott realizáció mellett kiszámolható a magyar GDP arányos államadósság értéke. A generált trajektóriák segítségével pedig mind pont, mind intervallum előrejelzés készíthető az utóbbi idősorra.

Legyen az alkalmazni kívánt VAR modell a következő alakú:

$$X_{t+1} = \mu_{S_t} + F_{S_t} X_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, R_{S_t}) \quad (2)$$

X_t jelöli a faktor értékeket, míg a modell paraméterei $\theta_i = \{R_i, F_i, \mu_i\}$, amelyek rezsimenként eltérnek ($i = 1, 2, \dots, n$ a rezsim indexe). S_t változó egy látens exogén faktor minden időszakra megadja, hogy milyen állapotban van a gazdaság. Az állapotonként eltérő, a rendszer dinamikáját leíró paraméterek tekinthetők úgy is, mint különböző egyensúlyi állapotok közötti ugrások, váltások. Ennek megfelelően a rendszer permanens értékei rezsimenként eltérnek, ezek megadhatók az alábbi formulával:

$$C_i = (I_m - F_i)^{-1} \mu_i \quad (3)$$

m jelöli a regresszorok számát, míg i jelöli az egyes rezsimeket.

A továbbiakban feltesszük, hogy az államadósság szintjének (D_t) nincs hatása az MS-VAR modellben felhasznált változók pályájára, hasonlóan exogén a központi költségvetés elsődleges egyenlege (E_t) is.

A (nominális) államadósságot megbontjuk egy forint (D_t^{HUF}) és egy deviza (D_t^{Dev}) részre, ezek mozgását a következő differencia egyenletek határozzák meg:

$$D_{t+1}^{HUF} = (1 + r_{t+1}) D_t^{HUF} + \gamma E_t \quad (4)$$

$$D_{t+1}^{Dev} = (1 + \Delta S_{t+1})(1 + r_{t+1}^{Dev}) D_t^{Dev} + (1 - \gamma) E_t \quad (5)$$

$$D_{t+1} = D_{t+1}^{HUF} + D_{t+1}^{Dev} \quad (6)$$

A (4)-es egyenlet szerint a következő időszaki forint adósságot az előző időszaki adósság értéke, a forint adósság átlagos kamata (r_{t+1}), valamint az államháztartás elsődleges egyenlege határozzák meg (E_t). Hasonlóan az (5)-ös egyenletben a devizaadósság mozgását a devizaadósság kamatai (r_{t+1}^{Dev}), a devizaárfolyam-változás (ΔS_{t+1}) és az államháztartás elsődleges egyenlege határozza meg. Itt $\gamma \in [0, 1]$ egy konstans exogén paraméter, ami egyfajta döntéshozói preferenciát tükröz. Amennyiben $\gamma < 0,5$, akkor az elsődleges egyenlegben keletkező többletet elsősorban

a deviza adósság leépítésére használja a fel a döntéshozó, ennek értéke a teljes adósság értékét érdemben képes befolyásolni (lásd. később).

$$Y_{t+1} = (1 + g_{t+1})(1 + \pi_{t+1})Y_t \quad (7)$$

A (7)-es egyenlet alapján a nominális GDP mozgását (Y_{t+1}) a reál GDP növekedés (g_{t+1}) és az infláció (π_{t+1}) határozza meg.

A (4)-(6)-os egyenleteket leosztva a (7)-es egyenlettel és bevezetve a GDP arányos államadósság értékeket ($d_t = \frac{D_t}{Y_t}$, $d_t^{HUF} = \frac{D_t^{HUF}}{Y_t}$, $d_t^{Dev} = \frac{D_t^{Dev}}{Y_t}$, $e_t = \frac{E_t}{Y_t}$), valamint a GDP arányos elsődleges egyenleget adódik a „szokásos” formula a GDP arányos államadósság (d) mozgására:

$$d_{t+1}^{HUF} = \frac{(1 + r_{t+1})}{(1 + g_{t+1})(1 + \pi_{t+1})} d_t^{HUF} + \gamma e_t \quad (8)$$

$$d_{t+1}^{Dev} = \frac{(1 + \Delta S_{t+1})(1 + r_{t+1}^{Dev})}{(1 + g_{t+1})(1 + \pi_{t+1})} d_t^{Dev} + (1 - \gamma)e_t \quad (9)$$

$$d_{t+1} = d_{t+1}^{HUF} + d_{t+1}^{Dev} \quad (10)$$

A (8)-(10)-es egyenletek által adott rendszer szerint a következő idősorok előrejelzése szükséges: reálgazdasági növekedés, inflációs folyamatok, devizaárfolyam változása, a deviza és forint adósság átlagos kamatai. Az így definiált modellt már sok helyen felhasználták a magyar szakirodalomban, így például az eurózóna adósságválság előtti alkalmazását adja ennek Ábel és Kóbor (2011), valamint a híres 2013 őszi lezajló Balatoni-Mellár-Oblath vita során is hasonló képleteket használtak a szerzők².

2.2 EREDMÉNYEK

2.2.1 Adatok, feltevések

A modell eredményeinek alapját az MS-VAR modell által készített realizációk adják. Az adatbázis a 2006. március és 2016. június közötti időszakot tartalmazza. A VAR modellben a következő változókat használtuk fel:

² A három szerző cikkei 2013 kora ősszel jelentek meg a portfolio.hu internetes portálon. E vita egy komoly rácsodálkozást jelentett közgazdász körökben a lineáris inhomogén differencia egyenletek világára. Mindhárom szerző a miniszterelnök által megfogalmazott 50 százalékos GDP arányos államadósság cél teljesülését vizsgálta. A „meglepő” eredményeket az okozta, hogy a három szerző által alkalmazott differencia egyenletek permanens értéke jó pár esetben e cél fölött volt, azaz bizonyos makro számokra adott feltevések esetén nem lehet elérni 50 százalék alatti adósság rátát a matematika jelen állása szerint. Mellár (2013) foglalta összes Oblath (2013) és Balatoni (2013) eredményeit, belátta, hogy a két szerző számítása ekvivalens volt, a törvényben előírt adósságszabály (amelyet Balatoni (2013) figyelembe vett) érdemben nem módosíthatja az Oblath (2013) által kapott eredményeket. Így a konklúzió adott: gyors adósság leépítéshez viszonylag gyors nominális GDP növekedés kell, és kicsi deficit (lásd. például az 1-es rezsimit az MS-VAR modellben, vagy Oblath (2013) számításait).

- dS : Az Euró/Forint árfolyam változása (forrás: MNB statisztika, napi devizaárfolyamok).
- $dGDP$: Reál GDP növekedés előző év azonos időszakához viszonyítva (forrás: MNB főbb számok).
- $dINF$: Inflációs növekedés (év/év alapú), forrás: MNB főbb számok.
- $3MH$: 3 hónapos forint hozampontok, forrás: ÁKK statisztikák.
- $SlopeH$: A magyar hozamgörbe 5 éves és 3 hónapos pontja közötti különbség, forrás: ÁKK statisztikák.
- $3ME$: 3 hónapos euró hozampontok, forrás: Bloomberg terminál. E változó pályájára az átmenetmátrixban nincs hatása a többi bevezetett változónak.

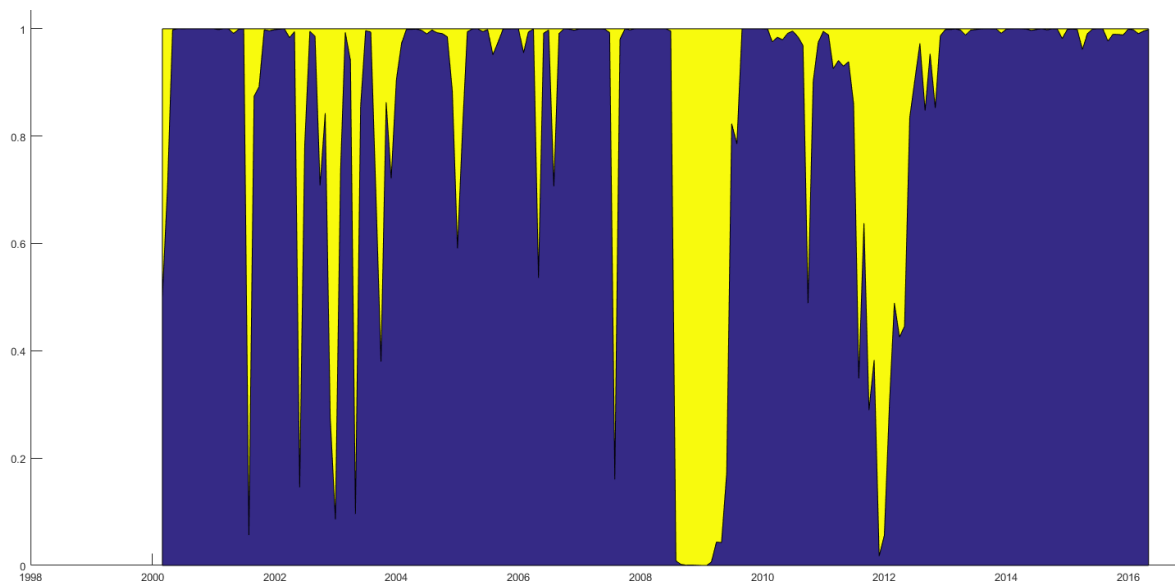
Az első három változó létjogosultsága a (8)-(10)-es egyenletek alapján nyilvánvaló. A magyar hozamgörbe meredekségét azért vettük bele az elemzésbe, hogy összetettebb mozgásokat is meg tudjunk jeleníteni a modellben. Mivel az ÁKK portfóliójának durationje 3 év körül volt a vizsgált időszakban (a válság után emelkedett 3 év fölé) ezért feltételezve azt, hogy az adósság lejárat szerkezete nem fog változni, a 3 éves hozamponttal jellemezzük a forint adósságra fizetett kamatokat. A devizaadósságra fizetett kamat a 3 éves forint és 3 hónapos euró hozampontok különbségének 60 százaléka, valamint a kockázatmentes euró hozamgörbe 3 hónapos pontjának az összege. Ez a korábbi tanulmányok (Bebesi 2016) ismeretében, nagyjából megfelel az euró adósság kamatjainak. (Elégséges csak az euró hozamgörbét modellezni, hiszen a magyar devizaadósság csaknem 100 százalékban euróban denominált az ÁKK portfóliójában levő devizawap ügyleteknek köszönhetően.)³

A modell megalkotása során továbbra is feltétel, hogy az elsődleges államháztartási deficit értéke exogén, és az államadósság szintjének nincs hatása az MS-VAR modellben használt változók pályájára. A vizsgálat során két rezsim létezését tételeztük fel, 10 ezer iteráció felhasználásával, a felfűtési periódus hossza 7 ezer iteráció volt.

2.2.2 Államadósság-előrejelzések

A modell eredmények részletes bemutatása a Függelék B: A modellek eredményei című részében található. Az 1. ábra mutatja a vizsgált időszak egyes hónapjaiban az adott állapotok feltételes valószínűségét.

³ E feltétel szerint ebben a modellkeretben mindig alacsonyabb lesz az euró adósság kamatterhe, mint a forintadósságé. Ugyanis, ha nem szélsőségesen csökkenő a hozamgörbe (pl. a 3 hónapos forint hozam 1%, miközben -1% a 3 éves forint hozam), akkor a magyar euró hozamok esetén reálisan a kockázatmentes euró hozamok fölötti felárral lehet számolni.



1. ábra: A rezsimek feltételes bekövetkezési valószínűségei, Forrás: saját szerkesztés. Megj.: A kék szín jelöli a $P(S_t = 1 | \mathcal{F}_t)$ valószínűséget, míg a sárga szín jelöli a $P(S_t = 2 | \mathcal{F}_t)$ valószínűséget.

Megállapítható, hogy a második rezsim elsősorban válság periódusokban jelenik meg, így 2008-2009 fordulóján, valamint 2012 elején lehet a második rezsim dominanciájáról beszélni. Kisebb mértékben még 2003 környékén jelenik meg a második rezsim amikor bizonyos monetáris és fiskális politikai döntések miatt volt kisebb turbulencia a magyar piacon. Az ábrával összhangban az eredményül kapott átmenetvalószínűség-mátrix is a második rezsim kisebb perzisztenciájára utal (1. táblázat).

	1	2
1	0,927 (0,882 ; 0,962)	0,073 (0,038 ; 0,118)
2	0,255 (0,175 ; 0,339)	0,745 (0,66 ; 0,825)

1. táblázat: Az átmenetmátrix értékei, Forrás: saját szerkesztés. Megjegyzés: Az átmenetmátrix értékei (félkövérrel kiemelve) alatt az adott paraméter eloszlásának 2,5 és 97,5 százalékos percentilisei láthatók.

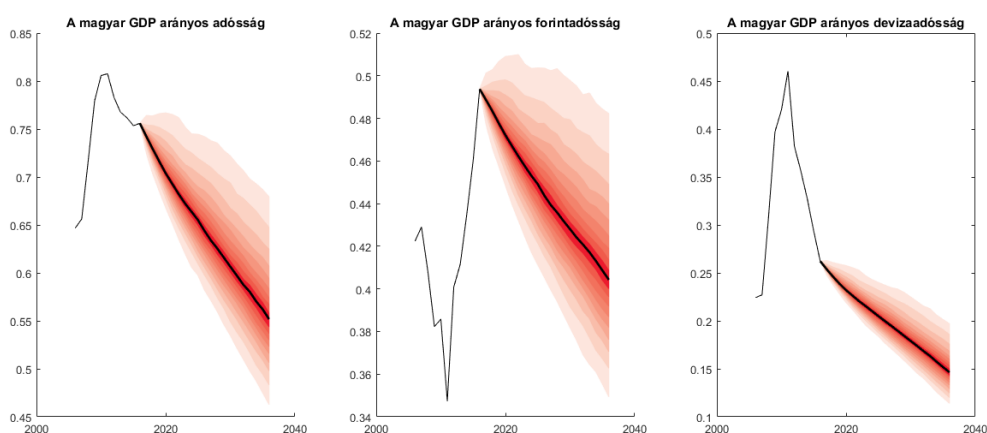
Az 1. táblázat alapján látható, hogy az első rezsim átlagos hossza mintegy 13 hónap, ezt ritkán szakítja meg a volatilis rezsim, ami átlagosan $(1/(1 - 0,745)) \approx 4$ hónapos hosszúságú. Az egyes rezsimeket a volatilitások mellett az azokhoz tartozó permanens értékek is elkülönítik egymástól. A 2. táblázatban jól látható az első állapotban egy magasabb inflációs környezetben megvalósuló konjunktúra, miközben a forint gyengén felértékelődik az euróval szemben (évente 1 százalékot). A második rezsimben recesszió van, jóllehet a hozamszint alacsonyabb, ami a vizsgált időszak specialitásának a következménye (az ECB gazdasági élénkítése kamatvágásokkal).

	dS	$dGDP$	$dINF$	$3MH$	$SlopeH$	$3ME$
rezsim 1	-0,106	1,678	2,582	3,755	-0,319	1,963
rezsim 2	0,264	-0,255	1,683	3,015	-0,226	0,818

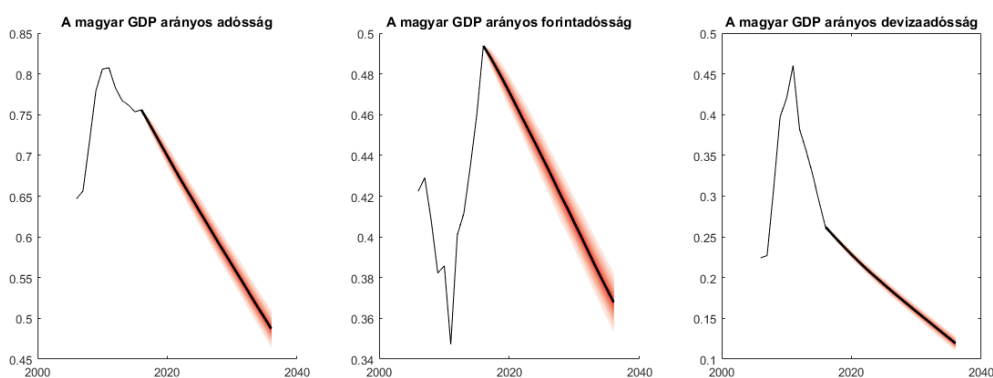
2. táblázat: Permanens értékek az egyes rezsimekben

A GDP arányos adósság értékeinek realizációihoz a kiinduló értékek a legutolsó ismert adatok voltak. Így az államadósság GDP arányos értéke a kiinduló pontban 75,6% volt, míg ennek 34,7%-a volt devizaadósság. A γ paraméter értékét 1/3-nak választottuk (mely szerint a döntéshozó elkötelezett a devizában denominált adósság leépítésében), az elsődleges egyenleg a feltevések szerint minden időszakban 1,2% volt. Mivel az MS-VAR modell havi adatokat használt egy késleltetés mellett⁴, ezért ezeket éves frekvenciára transzformáltuk. Az eredményeket a 2., 3., és 4. ábrák szemléltetik, az előrejelzés 20 évig tekint előre.

A 2. ábra mutatja be azt az előrejelzést, amikor mindkét rezsím lehetséges. A 3. ábra és a 4. ábra mutatja azokat az eseteket, amikor feltesszük, hogy nincs rezsímváltás: a 3. ábra esetén csak az első rezsím van érvényben (az időhorizont végéig), míg a 4. ábra esetén már rögtön az első időszaktól kezdve a második (válság) állapot kezdődik.

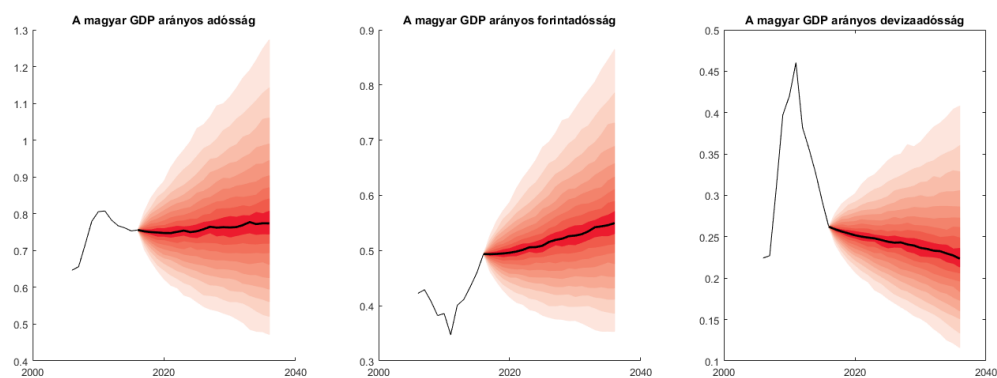


2. ábra: Államadósság-pályák két rezsím esetén



3. ábra: Államadósság-pályák konjunktúrában

⁴ Az információs kritériumok (Akaike, Hannan-Quinn) alapján két késleltetés használata lett volna indokolt, azonban mégis egy késleltetés használata mellett döntöttünk ez a specifikáció ugyanis numerikusan sokkal stabilabbnak bizonyult a becslés során, mint a több késleltetést alkalmazó modellek.

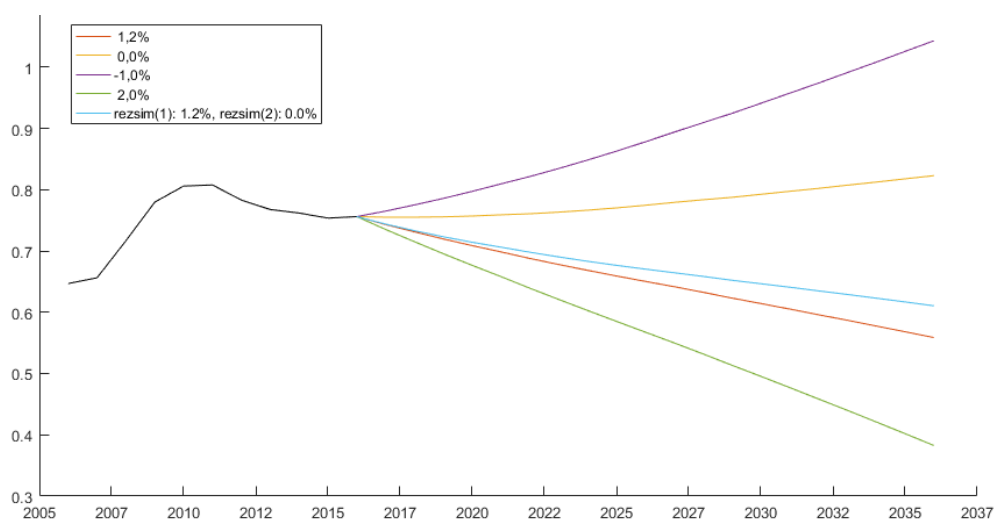


4. ábra: Államadósság-pályák recesszióban

A különbség szembeűnő a 3. ábra és a 4. ábra között. A 3. ábra szinte csak egy lineáris kivetítés, ez két okból állhat elő:

- A változók szórása nagyon alacsony (lásd.: Függelék B: A modellek eredményei: 4. táblázat).
- Nagyon kedvezők a makro mutatók permanens értékei: a (8)-as differencia egyenlet homogén tagjának együtthatója ekkor $\sim 0,99$, míg a (9)-es egyenleté $\sim 0,98$. Ez azt jelenti, hogy Magyarország 0 elsődleges egyenleggel is elkezdene „kinőni” az adósságát.

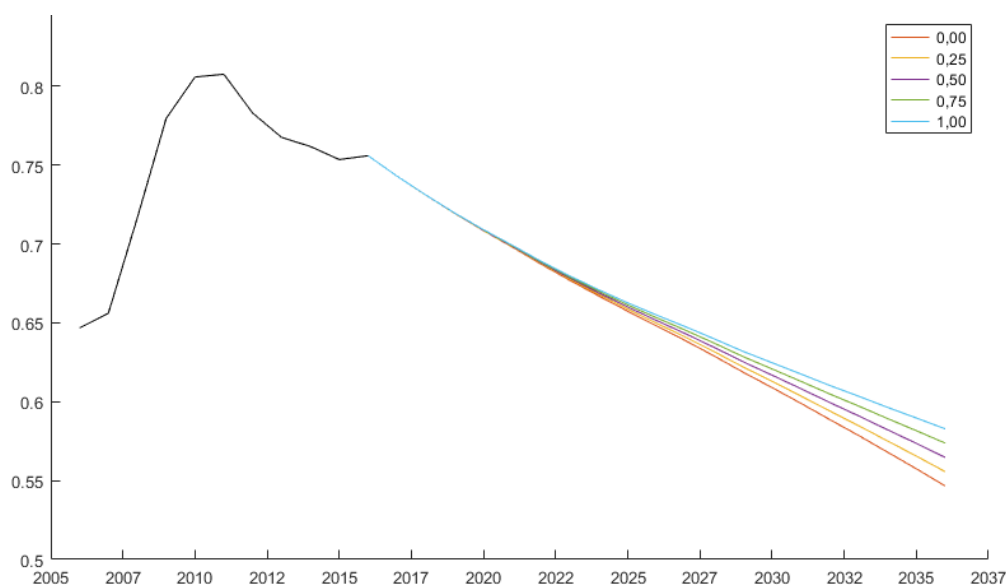
E hatások eredményeként a 3. ábra az időhorizont végére 45 – 50% közötti GDP arányos adósságot valószínűsít. Ez az eredmény lényegében az MNB-által a közelmúltban az államadósság pályájára adott előrejelzés értékével egyezik meg (lásd. MNB 2016, 5. fejezet). A kevésbé kedvezőbb második rezsimben az államadósság még növekedni is fog egy kis mértékben (4. ábra). Itt persze megkérdőjelezhető az a feltevés, hogy egy 1,2 százalékos elsődleges egyenleget mennyire lehet fenntartani egy a 2008-ashoz hasonló válság alatt; valószínűsíthető, hogy a valós helyzet ezen esetben sokkal rosszabb lenne. Annyi azonban bizonyos, hogy az államadósság pályáját övező bizonytalanság egyrészt a válságidőszakok megjelenéséből, másrészt a rezsimek közötti váltásból (vagy másképpen az adatgeneráló folyamat megváltozásából) származik.



5. ábra: Államadósság-pályák különböző elsődleges egyenlegek mellett

Az 5. ábra alapján a költségvetés elsődleges egyenlegének értéke alapjaiban határozza meg az államadósság pályáját. Jól látható, hogy már 0 százalék esetén is csak stagnálni tud az államadósság, az 5. realisztikus scenárió csak egy kicsivel rosszabb az alappályánál. Ez utóbbi esetben rezsimenként eltérő a költségvetés elsődleges egyenlege, konjunktúrában 1,2 százalék (GDP arányosan) és 0 százalék válságban. Ez az alappályánál 5 százalékkal magasabb adósságot eredményez.

Végezetül érdemes megvizsgálni a γ paraméter szerepét az előrejelzésben. A 6. ábra alapján a modell a devizaadósság leépítésének szükségességét támasztja alá ($\gamma = 0$ esetén az elsődleges egyenleg egésze a devizaadósság leépítésére fordítódik, 1-es értéknél pedig a forint adósság leépítésére koncentrál a döntéshozó). Ez az eredmény meglepő, hiszen a trajektóriák átlagát tekintve nagyjából 1 százalékkal alacsonyabbak a devizaadósság kamatai, mint a forint adósságé.



6. ábra: Államadósság-pályák különböző döntéshozói preferenciák mellett

Összegezve a fentebb látottakat kijelenthető, hogy a vizsgált modell jól mutat rá hazánk globális válságoktól való függésére és esetleges kihívásaira. Az MS-VAR modell jól mutatja be a kockázat forrásait:

- Minden rezsimben van az innovációknak egy bizonyos volatilitása.
- A rezsimváltások kockázatot jelentenek.

E két tényező megjelenése azt jelenti, hogy a modellben a kockázatot teljes egészében a jóval volatilisabb második rezsim esetleges megjelenése jelenti. A modell alkalmas arra, hogy az államadósság pályát övező kockázatok egy részét megjelenítse, ugyanakkor látni kell, hogy a 20 évre előre történő becslés rendkívül bizonytalan. Ilyen hosszú időszak alatt a legtöbb paraméter értéke megváltozhat, komoly változások következhetnek be az elsődleges egyenlegben is.

3 MARKOV REZSIMVÁLTÓ HOZAMGÖRBE MODELLEK

3.1 MODELLKERET

A továbbiakban a Bebesi és Bebes (2016) által használt modell egy bővítését mutatjuk be Markov rezsimek esetében. Ez a bővítés sok szempontból egy alternatívája a Markov rezsimek modellrel párhuzamosan fejlesztett sztochasztikus volatilitást használó dinamikus Nelson-Siegel modellnek (Bebesi 2016). Míg utóbbi modell a faktorokat mozgó átmenetegyenlet hibáinak heteroszkedaszticitását időben változó kovariancia mátrixszal kezeli, jelen esetben a heteroszkedaszticitás kezelése az állapotoként változó kovariancia mátrixszal történik. A két modellt nem lenne szükséges külön választani egymástól, lehetséges lenne a sztochasztikus volatilitás és rezsimek egy kombinációja is⁵, ez azonban csak tovább bonyolítaná a becslési eljárást, miközben még több paramétert vezetne be egy amúgy is sok paraméterrel rendelkező modellhez.

A Nelson-Siegel modellformulával összhangban a következőképpen adhatók meg a forint ($y_{t,M}$), euró ($y_{t,E}$) és CDS görbe ($y_{t,CDS}$) τ lejáratú pontjai:

$$y_{t,M}(\tau) = L_{t,M} + S_{t,M} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,M}}}{\tau/\lambda_{t,M}} \right) + C_{t,M} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,M}}}{\tau/\lambda_{t,M}} - e^{-\tau/\lambda_{t,M}} \right) + \varepsilon_{M,\tau} \quad (1)$$

$$y_{t,E}(\tau) = L_{t,E} + S_{t,E} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,E}}}{\tau/\lambda_{t,E}} \right) + C_{t,E} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,E}}}{\tau/\lambda_{t,E}} - e^{-\tau/\lambda_{t,E}} \right) + \varepsilon_{E,\tau} \quad (2)$$

$$\log(y_{t,CDS}(\tau)) = L_{t,CDS} + S_{t,CDS} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,CDS}}}{\tau/\lambda_{t,CDS}} \right) + \varepsilon_{CDS,\tau} \quad (3)$$

ahol $\varepsilon_{M,\tau} \sim N(0, \sigma_{\tau,M}^2)$, $\varepsilon_{E,\tau} \sim N(0, \sigma_{\tau,E}^2)$ valamint $\varepsilon_{CDS,\tau} \sim N(0, \sigma_{\tau,CDS}^2)$.

A CDS görbe esetén a CDS felárak logaritmusát modellezzük, ez biztosítja azt, hogy trajektória generálás során csak pozitív CDS felárakat adjon vissza a modell. A Nelson-Siegel modell egy hiányossága, hogy a hozamgörbe szintjét nem az empirikusan jobban indokolható rövid hozamok szintjével, hanem a hosszú hozamok szintjével jellemzi, a hozamgörbe meredeksége lényegében azt adja meg, hogy mennyivel módosul az adott hozampont a hosszú hozamokhoz képest. E probléma könnyen kiküszöbölhető elforgatás-mátrixok használatával. Nyholm (2015) munkájával összhangban a Nelson-Siegel modell faktorait elforgatjuk az euró és a forint

⁵ Ebben az esetben a sztochasztikus volatilitást mozgó paraméterek lennének eltérők rezsimeként, amely rezsimeként a volatilitás eltérő sebességű lecsengését, vagy éppen eltérő szintjét eredményezhetné. Jelen ismereteink szerint e modelleket inkább magasabb frekvenciájú adatokon alkalmazzák. Így például Goutte opcióárazásban használ hasonló modellt (Goutte 2013), illetve egy rövid hozamokra vonatkozó alkalmazását fejleszti ki az ötletnek Kalimipalli és Susmel (2004).

hozamgörbe esetén. A CDS görbe esetén a forgatást nem hajtjuk végre, ugyanis a legtöbb munkában az 5 éves CDS felár a benchmark, ami miatt inkább a hosszabb lejáratú CDS felárak mozgása az érdekes, és emiatt ez lehet a viszonyítási alap is. A forgatási mátrix legyen a következő: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Az első két faktor együttthatóját az E_t mátrixba rendezve és ezt elforgatva:

$$E_t(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} \right) \end{bmatrix}$$

$$E_t(\tau)A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} \right) \end{bmatrix}.$$

E függvényforma lehetővé teszi, hogy a meredekség faktor együttthatói a lejáratban növekedők legyenek (szemben az hagyományos Nelson-Siegel modellel), ami miatt egy közgazdaságilag jobban értelmezhető faktor struktúra jön létre. A görbület faktor együttthatóinak értéke változatlan marad. A modellbe esetlegesen beépített makro változókat ($Mac_{t,j} \quad j = 1, 2, \dots, m$) mérési hibával figyeljük meg ($\varepsilon_{Mac_j} \sim N(0, \sigma_{j,Mac}^2)$)

$$Mac_{t,j} = \widehat{Mac}_{t,j} + \varepsilon_{Mac_i}. \quad (4)$$

Az (1)-(2)-(3)-(4)-es egyenletek könnyen állapotter modellbe rendezhetők, így a következő alakú lesz a modell állapot egyenlete:

$$Y_t = H_t X_t + \theta_t \quad (5)$$

ahol $\theta_t \sim N(0, R_{S_t})$, $Y_t = [y_{t,M}, y_{t,E}, y_{t,CDS}, Mac_t]'$ míg $X_t = [L_{t,M}, S_{t,M}, C_{t,M}, L_{t,E}, S_{t,E}, C_{t,E}, L_{t,CDS}, S_{t,CDS}, Mac_t]'$. H_t pedig az X_t együttthatóit tartalmazó vektor, amely időben változó a $\lambda_{t,M}$, $\lambda_{t,E}$ és $\lambda_{t,CDS}$ paraméterek időbeni változása miatt.

A bevezetett faktorokat egy elsőrendű vektor autoregresszív (VAR(1)) dinamika mozgatja a következő alakban:

$$X_{t+1} = \mu_{S_t} + F_{S_t} X_t + \varepsilon_t \quad (6)$$

ahol $\varepsilon_t \sim N(0, Q_{S_t})$.

Az (5)-ös és (6)-os egyenletek alapján a modell rezsimműltó paraméterei a következők: R_{S_t} , μ_{S_t} , F_{S_t} és Q_{S_t} . Az állapotok közötti váltást meghatározó látens faktort S_t jelöli minden időpontra, e faktor esetén két lehetséges rezsimezt tételezünk fel, exogén rezsimműltás mellett. (Azaz a feltétel nélküli átmenetmátrix (P) állandó minden időszakban.)

A korábbi munkákkal összhangban a megszorítások a következők a bevezetett paraméterekre vonatkozóan:

- F_{S_t} : minden rezsime esetén feltesszük, hogy a hazai vonatkozású faktoroknak (makro változók, forint hozamgörbe és CDS faktorok), nincs hatása az eurózóna faktorok mozgására. Ezen felül a rendszer OLS becslése alapján 0-

nak választjuk minden rezsimre F_{S_t} azon értékeit, amik nem szignifikánsak 5 százalékos szignifikancia szinten.

- R_{S_t} : diagonális mátrix, azaz minden időszakban a hozampontok becslési hibái korrelálatlanok.

A modellhez felhasznált adatok megegyeznek a Bebesi (2016) által használtakkal, azzal a különbséggel, hogy ebben a modellben kevesebb hozampontot alkalmazunk. Erre a módosításra azért van szükség, hogy numerikusan könnyebben kezelhető legyen a probléma. (R_{S_t} determinánsa könnyen lehet nulla, ha 30-40-nél több 0,001 nagyságrendű elem van a diagonálisban.)

3.2 A MODELLKERET ÉS A NO-ARBITRAGE FELTÉTELEK

A modellkeret bemutatása után mindenképpen szükség van annak megvizsgálására, hogy a no-arbitrage feltétel hozzáadása a modellhez milyen előnyöket is tudna nyújtani jelen elemzés szempontjából. A Nelson-Siegel modell no-arbitrage bővítését Christensen, Diebold és Rudebusch (2011) alkotta meg, jelen tanulmányban nem célunk a levezetés részletes bemutatását megtenni, a szükséges módosító tag részletes (és kimerítő) levezetését adja Diebold és Rudebusch (2013). A modell arbitrázsmentessé tételében az intuíció a következő: legyen adott faktorok dinamikája a kockázatmentes mérték alatt (Q)⁶

$$dX_t = k_Q(m_Q - X_t)dt + \Sigma dW_t^Q.$$

Legyen a rövid kamatláb a faktorok (X_t) affin függvénye az alábbi alakban:

$$r_t = \rho_0(t) + \rho_1(t)'X_t.$$

Alkalmazva a szokásos árazó képletet a Q mérték alatt B ármérce folyamattal, felírható a T időszakban lejáró, t időszakban kibocsátott diszkont kincstárjegy fair ára

$$V(r(t), t, T) = B(t) \mathbb{E}_Q \left(\frac{1}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_Q \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right) = \exp(A(t, T)X_t + C(t, T)).$$

Felhasználva azt a tényt, hogy az ármércével (elemi bankbetét értékével, B) diszkontált érték folyamat ($V(r(t), t, T)/B(t)$) martingál, rövid egyenlet manipuláció után megkaphatók a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t, T)}{dt} &= \rho_1(t) + k_Q' A(t, T), & A(T, T) &= 0^7 \\ \frac{dC(t, T)}{dt} &= -A(t, T)' m_Q - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\Sigma' A(t, T) A(t, T)' \Sigma)_{j,j} \\ C(T, T) &= 0. \end{aligned}$$

Ezekből megfelelő paraméterezés mellett $A(t, T)$ -re visszakaphatók a Nelson-Siegel modell loadingjai, valamint a $C(t, T)$ tag hozzáadása (megfelelő megválasztása) a modellhez megteremti a no-arbitrage modellek (Vasicek, CIR stb.) és az ökonometria

⁶ Eszközárzás első tétele: A piac arbitrázsmentes, ha létezik kockázatmentes valószínűségi mérték.

⁷ Minden faktor loadingra vonatkozó peremfeltétel 0 késleltetésnél 0.

alapokon nyugvó empirikus hozamgörbe modellek közötti kapcsolatot (A 7. ábra mutatja a $C(t, T)$ két lehetséges értékét, valamint egy arbitrázsmentes és nem arbitrázsmentes modell által illesztett hozamgörbét). Így a Nelson-Siegel modell a következő alakot ölti a zéró kupon hozamokra:

$$y_t(T - t) = L_t + S_t \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\lambda}}{(T-t)/\lambda} \right) + C_t \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\lambda}}{(T-t)/\lambda} - e^{-(T-t)/\lambda} \right) - \frac{C(t, T)}{(T-t)}$$

ahol

$$C(t, T) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_t^T (\Sigma' A(t, T) A(t, T)' \Sigma)_{j,j} ds.$$

A Nelson-Siegel modell loadingjai pedig a differencia egyenletrendszer megoldásai

$$A(t, T) = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\lambda}}{(T-t)/\lambda} \right) & \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\lambda}}{(T-t)/\lambda} - e^{-(T-t)/\lambda} \right) \end{bmatrix}$$

Ez a megoldás könnyen elérhető, ha:

$$k_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

valamint m_Q és Σ értékei valós számok, paraméter korlátok nélkül.

Összegezve tehát a fentieket, az arbitrázsmentességi feltétel a Nelson-Siegel modell esetén egy, a dinamikát mozgó paraméterektől függő konstans tag hozzáadását jelenti a modellhez, ami kapcsolatot teremt az átmenet- és mérési egyenletek között. Jelen esetben ez a Markov rezsimműködésnél csak annyiban módosul, hogy rezsimenként fognak eltérni ezen módosító tagok, ez a több szerző (Christensen 2013; Sim és Ohnishi 2015) által is használt arbitrázsmentes Markov rezsimműködő modell (MS-AFNS)⁸.

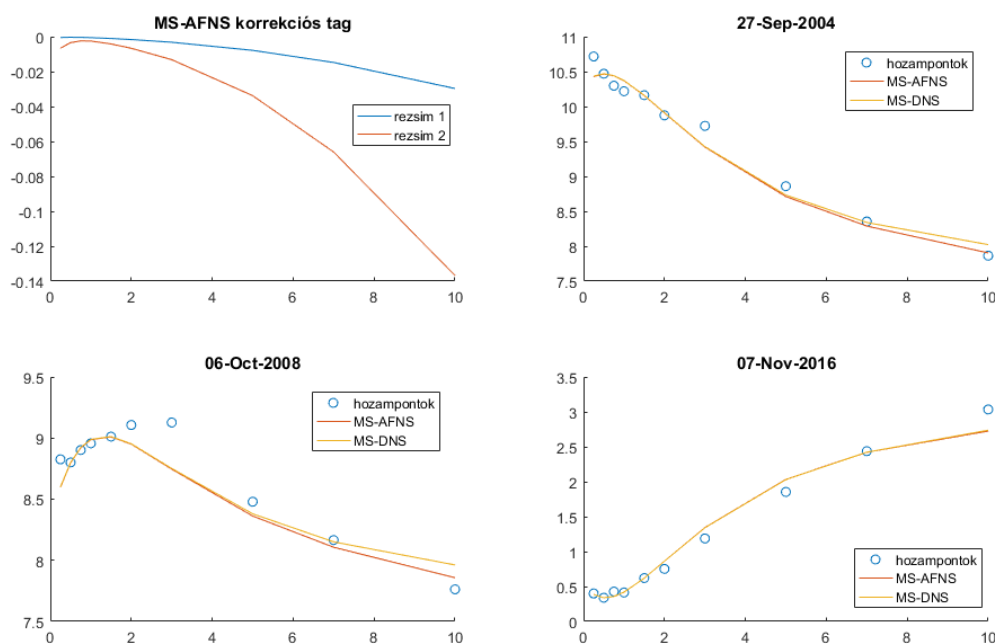
A DNS modell lényeges hiányossága, hogy nem zárja ki az arbitrázs lehetőségét a fentebb bemutatottak szerint. E modell ugyanis a fizikai dinamikáját becsüli meg a hozamokat mozgó faktoroknak, míg az arbitrázsmentes modellek esetén egy kockázatsemleges dinamika becslése után a kockázat piaci ára teremt kapcsolatot a kockázatsemleges és fizikai dinamika között. Ugyanakkor könnyen előfordulhat, hogy az empirikus eredmények cáfolják az arbitrázsmentesség restrikció bevezetésének szükségességét. Egyrészt előfordulhat, hogy „legendően” precíz illesztés esetén a DNS modell arbitrázsmentes abban az értelemben, hogy faktorainak értéke statisztikailag nem különbözik az arbitrázst megengedő modell faktorainak értékétől. (Ez $C(t, T)$ -re vonatkozóan azt jelenti, hogy ezen konstans tag minden lejáratra vonatkozóan statisztikailag nulla.)

⁸ A hozamgörbe modellezés jelenlegi állása szerint nem létezik olyan no-arbitrage NS modell, amely esetén a belső paraméter időben változó lenne, azaz felvehetne minden időszakban az előzőektől eltérő értéket. Ennek egy részleges feloldása lenne a rezsimenként változó belső paraméter alkalmazása.

A másik kérdés amely felmerül, az előrejelzések jósága. Amennyiben a hozamok előrejelzése a cél, akkor a kockázatsemleges dinamika nem lényeges, elégséges egy tetszőleges múltbeli mintán kiértékelni, az előrejelzések jóságát és ez alapján választani a modellek közül. (E cél esetén a mintán belüli illeszkedés kérdései is elhanyagolhatók.) Az előbbi két gondolat részletes vizsgálatát először Coroneo és szerzőtársai (2011) tették meg, az eredmények azt mutatják az USA adatain, hogy az elméleti bővítésnek nincs érdemi jelentősége, az általuk alkalmazott hipotézis vizsgálatban a Nelson-Siegel modell faktor loadingok értékei nem tértek el szignifikánsan egymástól. A szerzők által az USA adatain vizsgált mintán kívüli előrejelzés vegyes eredményeket mutatott, bizonyos hozampontok esetén a DNS, bizonyos esetekben az AFNS modell adott jobb előrejelzést. Ez az eredmény ellentmond Diebold és Rudebusch (2013) eredményeinek, akik sokat idézett könyvükben röviden foglalkoznak az AFNS és DNS modellek előrejelző képességével, az előrejelzések jóságára kapott eredményeik alapján egyértelműen az AFNS modellt favorizálják a dollár hozamgörbe esetében. Hasonló kérdéseket vizsgált Sim és Ohnishi (2015) a japán Yen hozamgörbén, az arbitrázsmentességi feltétel létjogosultságát megerősítő eredményekre jutva. A szerzőpáros Coroneo és szerzőtársaival (2011) szemben nem hajt végre hipotézis vizsgálatot a faktor loadingok egyezőségére vonatkozóan, ugyanakkor ők már rezsimváltó modellekkel foglalkoznak. A realizált mintán vizsgálják az MS-DNS és az MS-AFNS modell illeszkedését. Eredményeik szerint az MS-AFNS modell illeszkedése jobbnak tekinthető mind a mintán belül, mind az előrejelzéseket tekintve. Kiemelik, hogy az ezen modell által adott állapotok jobban közelítik a japán üzleti ciklusokat, mint az MS-DNS eredményei.

A fentebb bemutatottak alapján nehezen jelenthető ki, hogy melyik specifikáció lenne az alkalmasabb választás. Az AFNS tűnik az irodalom alapján jobb választásnak, ugyanakkor e modell illeszkedését még nem vizsgálták a forint hozamgörbe idősorain. Emiatt egy kísérletben a forint hozamgörbén megvizsgáljuk, hogy melyik modellválasztás tekinthető jobbnak. Elsősorban az előrejelző erő, másodsorban a mintán belüli illeszkedés a lényeges jelen esetben, ezért a faktor loadingok ekvivalenciájával nem foglalkozunk. Három modellt vonunk be a vizsgálatba: (1) MS-AFNS konstans λ -ákkal, (2) MS-DNS konstans λ -ákkal, (3) MS-DNS változó λ -ákkal Bebesi (2016) alapján. E modelleket havi adatokon becsültük, a 2004. szeptember és 2016. november között, 146 hónap adatait felhasználva. (Az eredményeket részletesen a Függelék B: A modellek eredményei rész tartalmazza.)

A Függelék B: A modellek eredményei részben látható eredmények alapján úgy döntöttünk, hogy a mintán belüli illeszkedést előtérbe helyezve nem próbálkozunk no-arbitrage restriktciók alkalmazásával, így egy változó belső paraméterű modellvariációt alkalmazunk a tanulmány további részében. Meglátásunk szerint ez jobban illeszkedik a forint hozamgörbére, ami a fejlett országok hozamgörbéinél jóval volatilisabb. Az eredmények azt mutatják, hogy jelen esetben a mintán belüli illeszkedés jelentősége nagyobb, mint fejlett piacok hozamgörbéire alkotott modellek esetén.

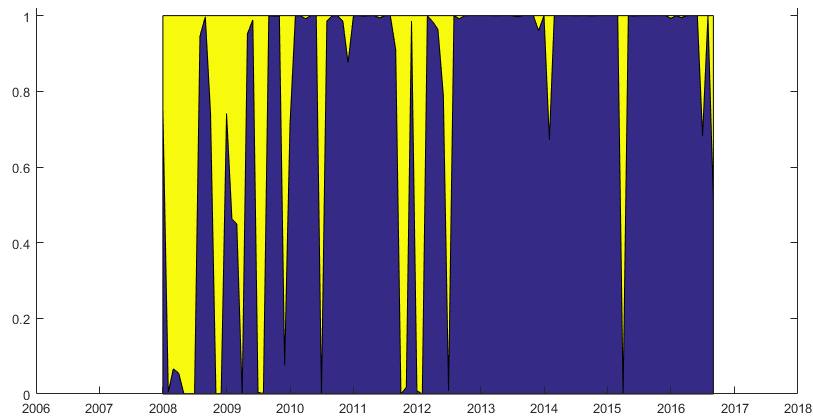


7. ábra: Az MS-AFNS és az MS-DNS modell (korrekciós tag, illesztett hozamgörbék), Forrást: saját számítások. Megj.: Az MS-AFNS és az MS-DNS konstans lambda paraméterekkel készültek, napi adatokon.

Végezetül érdemes a 7. ábra által szemléltetett illusztrációk segítségével megfigyelni a modellek közötti különbségeket. Az ábra bal felső sarkában láthatók a rezsimenként eltérő korrekciós tagok, amelyek értéke csupán maximum 10-15 bázispont, az ábra többi része az illesztett hozamgörbéket mutatja be.

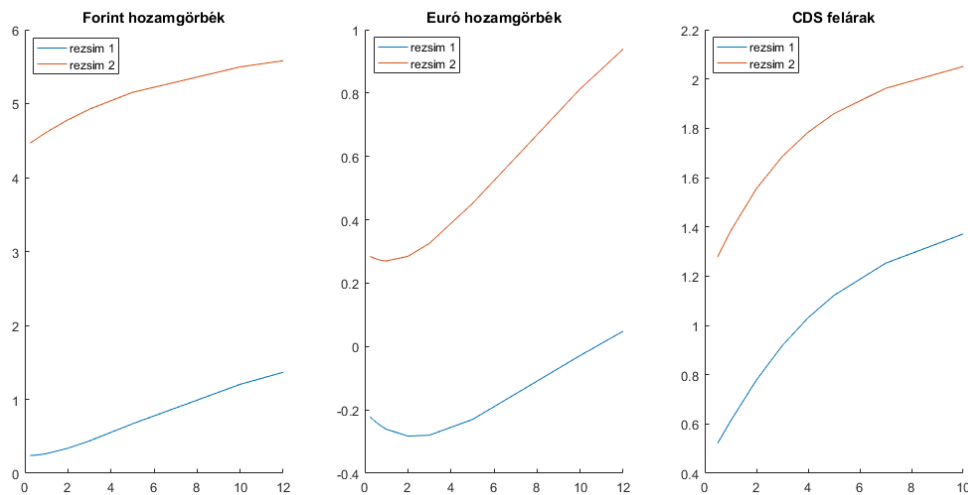
3.3 EREDMÉNYEK

Talán a modellel kapcsolatos legfontosabb eredmények az egyes állapotok elhelyezkedése a mintán belül és a feltétel nélküli átmenetvalószínűség mátrix értékei. Ez utóbbi mátrix megadja az egyes rezsimok várható hosszát, valamint az egyes állapotok számának egyensúlyi eloszlását állandósult állapotban. A 8. ábra mutatja ezen simított állapot valószínűségek értékeit. Jól látható, hogy turbulensebb periódusokban, így a 2008-as pénzügyi válság, valamint az eurózóna adósság válság alatt inkább a második, volatilisabb rezsim jelenik meg, míg nyugodtabb időszakokban az első állapot.

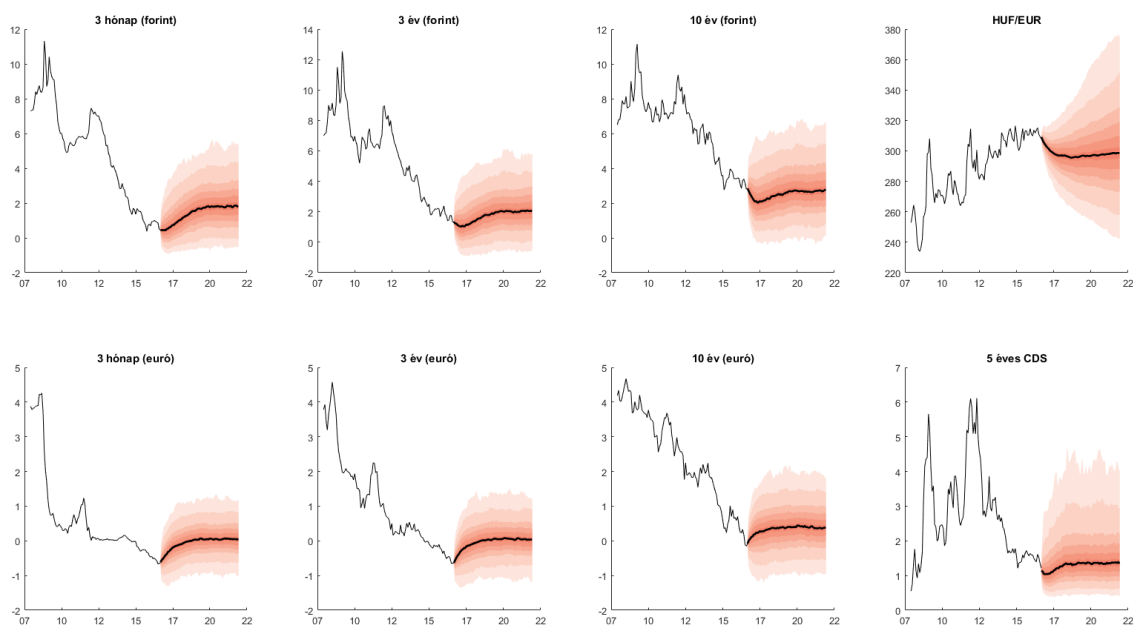


8. ábra: A modell által adott (simított) állapotvalószínűségek, Forrás: saját szerkesztés. Megj.: A kék szín jelöli : $P(S_t = 1 | \mathcal{F}_t)$ valószínűséget, míg a sárga szín jelöli a : $P(S_t = 2 | \mathcal{F}_t)$ valószínűséget.

A 9. ábra mutatja be az egyes állapotokhoz tartozó egyensúlyi hozamgörbéket. A különbség a két állapot között nyilvánvaló; a volatilisabb rezsim esetén a hozamok jóval magasabbak, miközben a CDS felárak permanens értéke is két-háromszoros az első rezsimhez képest. Itt persze nagy a szerepe a prior értékek megválasztásának. A 8. ábra és a 2016. novemberi hozamgörbe ismeretében érdemes lehet elgondolkozni az első állapotra jellemző hozamgörbe permanens értékére vonatkozó prior nagyobbra vételén, ezáltal elérhető volna a hosszú hozamok növekedése. Fontos kiemelni, hogy a 9. ábra csak „átlagokat” jelenít meg. Az átlagos értékek ugyanakkor sok tulajdonságot elfednek, így a Függelék B: A modellek eredményei rész táblázatai alapján a második rezsim jóval volatilisabb, ami akár 400-500 bázispontos 5 éves CDS felárakat is eredményezhet (10. ábra).



9. ábra: A modell által adott átlagos hozamgörbe értékek, Megj.: saját számítások.



10. ábra: A modell előrejelzései

A modell paraméter becsléseinek részleteit a Függelék B: A modellek eredményei részre hagyjuk, azok terjedelme miatt. A Függelékben az átmenet-egyenlet paramétereit, valamint a feltétel nélküli átmenet-valószínűség mátrix paraméter értékeit közöljük.

4 ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmányban több Markov rezsimmváltó modellt is alkottunk, amelyek összeségükben jól adták vissza az adatok alapján elvárt stilizált tényeket. A 2. rész eredményei rámutattak, hogy érdemes a devizaadósságot csökkenteni, bemutatták, hogy milyen főbb kockázati faktoroktól függhet a magyar államadósság alakulása. A 3. részben a Nelson-Siegel modell rezsimmváltó variációit vizsgáltuk. Az egy hozamgörbés modellek vizsgálata után a dinamikus, változó belső paramétert használó Nelson-Siegel modell alkalmazása mellett döntöttünk.

IRODALOMJEGYZÉK

Ábel István és Kóbor Ádám. 2011. „Növekedés, deficit és adósság-fenntartható keretben”. *Közgazdasági szemle* 58 (6): 511.

Athreya, Krishna B, Hani Doss és Jayaram Sethuraman. 1992. „A proof of convergence of the Markov chain simulation method”.

Balatoni András. 2013. „Mikor vezethetők ki a válságadók?” <https://www.portfolio.hu/gazdasag/mikor-vezethetok-ki-a-valsagadok.188363.html>.

Bebesi László. 2016. „A magyar hozamgörbe modellezése makro faktorokkal”. ÁKK belső tanulmány.

Bebesi László és Bebes András. 2016. „Devizaárfolyamok és hozamgörbék”. ÁKK belső tanulmány.

Camacho, Maximo, Gabriel Perez-Quiros és Pilar Poncela. 2012. „Markov-switching dynamic factor models in real time”. Working Papers 1205. Banco de España; Working Papers Homepage.

Carter, Chris K és Robert Kohn. 1994. „On Gibbs sampling for state space models”. *Biometrika* 81 (3): 541–553.

Casella, George és Edward I George. 1992. „Explaining the Gibbs sampler”. *The American Statistician* 46 (3): 167–174.

Christensen, Jens H. E. 2013. „A Regime-Switching Model of the Yield Curve at the Zero Bound”. Working Paper Series 2013–34. Federal Reserve Bank of San Francisco.

Christensen, Jens H. E., Francis X. Diebold és Glenn D. Rudebusch. 2011. „The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models”. *Journal of Econometrics* 164 (1): 4–20.

Coroneo, Laura, Ken Nyholm és Rositsa Vidova-Koleva. 2011. „How arbitrage-free is the Nelson–Siegel model?” *Journal of Empirical Finance* 18 (3): 393–407.

Dai, Qiang, Kenneth J Singleton és Wei Yang. 2007. „Regime shifts in a dynamic term structure model of US treasury bond yields”. *The Review of Financial Studies* 20 (5): 1669–1706.

Diebold, Francis X. és Glenn D. Rudebusch. 2013. *Yield Curve Modeling and Forecasting: The Dynamic Nelson-Siegel Approach*. Econometric and Tinbergen Institutes lectures. Princeton University Press.

Elliott, Robert J és Tak Kuen Siu. 2009. „On Markov-modulated exponential-affine bond price formulae”. *Applied Mathematical Finance* 16 (1): 1–15.

Frigyik, Bela, Amol Kapila és Maya Gupta. 2010. „Introduction to the Dirichlet Distribution and Related Processes”.

Geweke, John F. 1991. „Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments”. Staff Report 148. Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Goutte, Stéphane. 2013. „Pricing and hedging in stochastic volatility regime switching models”. *Journal of Mathematical Finance* 3 (01): 70.

Gray, Stephen F. 1996. „Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process”. *Journal of Financial Economics* 42 (1): 27–62.

Hamilton, James D. 1989. „A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle”. *Econometrica* 57 (2): 357–384.

Hamilton, James és Raul Susmel. 1994. „Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime”. *Journal of Econometrics* 64 (1–2): 307–33.

Hammersley, John M és Peter Clifford. 1971. „Markov fields on finite graphs and lattices”.

Hevia, Constantino, Martin Gonzalez-Rozada, Martin Sola és Fabio Spagnolo. 2015. „Estimating and forecasting the yield curve using a Markov switching dynamic Nelson and Siegel model”. *Journal of Applied Econometrics* 30 (6): 987–1009.

Kalimipalli, Madhu és Raul Susmel. 2004. „Regime-switching stochastic volatility and short-term interest rates”. *Journal of Empirical Finance* 11 (3): 309–329.

Kim, Chang-Jin. 1994. „Dynamic linear models with Markov-switching”. *Journal of Econometrics* 60 (1–2): 1–22.

Kim, Chang-Jin és Charles R. Nelson. 1999. *State-space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-sampling Approaches with Applications*. MIT Press.

Levant, Jared és Jun Ma. 2013. „A Dynamic Nelson-Siegel Yield Curve Model with Markov Switching”.

Mellár Tamás. 2013. „Kellemetlen tények, avagy mi jön ki az államadósság-matekból?” <https://www.portfolio.hu/gazdasag/kellemetlen-tenyek-avagy-mi-jon-ki-az-allamadossag-matekbol.188550.html>.

Nelson, Charles R. és Andrew F. Siegel. 1987. „Parsimonious Modeling of Yield Curves”. *The Journal of Business* 60 (4): 473–489.

Nyholm, Ken. 2015. „A rotated Dynamic Nelson-Siegel model with macro-financial applications”. European Central Bank.

Oblath Gábor. 2013. „Nem jön ki a matek - »kényelmetlen« tények a magyar gazdaságról”. <https://www.portfolio.hu/gazdasag/nem-jon-ki-a-matek-kenyelmetlen-tenyek-a-magyar-gazdasagrol.187586.html>.

Quandt, Richard E. 1972. „A new approach to estimating switching regressions”. *Journal of the American statistical association* 67 (338): 306–310.

Sim, Dara és Masamitsu Ohnishi. 2015. „Nelson-Siegel models with regime shifts: Is the deterministic adjustment term in the arbitrage-free models important?”

Svensson, Lars EO. 1994. „Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994”. National bureau of economic research.

Tong, Howell. 2012. *Threshold models in non-linear time series analysis*. Köt. 21. Springer Science & Business Media.

Zhu, Xiaoneng és Shahidur Rahman. 2015. „A regime-switching Nelson–Siegel term structure model of the macroeconomy”. *Journal of Macroeconomics* 44: 1–17.

FÜGGELÉK A: BECSLÉSI MÓDSZERTAN

Jelen munkában nem mutatjuk be részletesen a felhasznált Gibbs-féle mintavételezési algoritmust, helyette az algoritmus azon részeire koncentrálnunk, ahol az algoritmus érdemben módosul egy rezsinváltás nélküli modell változathoz képest.

A MARKOV LÁNC MONTE CARLO BECSLÉSI ELJÁRÁS

A modell becsléséhez Bayes statisztikai eszközöket alkalmazunk, adott paraméterek mellett a rendszert mozgó faktorokat a Kim-szűrő (Kim 1994) segítségével határozzuk meg. A Bayes-i statisztikában a cél valamely paraméter halmaza (θ) posterior eloszlásának meghatározása a minta (y) függvényében:

$$p(\theta|y) = p(\theta, y)/p(y)$$

felhasználva a Bayes tételt ez tovább alakítható a következő alakra:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}.$$

Mivel az adatok rögzítettek, ezért $p(y)$ egy konstans érték minden paraméter halmazra, így a paraméterek posterior eloszlása arányos a likelihood ($p(y|\theta)$) és prior eloszlások szorzatával ($p(\theta)$). Ebben a felírásban a prior eloszlás tekinthető az elemző kezdeti várakozásainak, ami aztán az adatok megismerése után frissítésre kerül. A helyes prior kiválasztás az optimalizálási tér szűkítésével jelentősen lecsökkentheti a számítási igényt. A paraméterek együttes eloszlásának ($p(\theta|y)$), vagy ezek különböző momentumainak meghatározása közel sem egyszerű (ez a gyakorlatban egy többszörös numerikus integrálást jelentene), ehelyett sokkal egyszerűbb ezek marginális eloszlásaiból mintát venni, azaz a $p(\theta_i|y, \theta_{-i})$ eloszlásokból realizációkat generálni. (Itt θ_i jelöli az i -edik paramétert, míg θ_{-i} az összes többi paramétert tartalmazó halmazt.) Megmutatható, hogy az iterációk számának növekedésével a feltételes eloszlások exponenciális sebességgel konvergálnak a paraméterek együttes eloszlásához. (E konvergencia egy eredménye a Hammersley & Clifford (1971) tételnek, a Markov láncokra vonatkozó egy alkalmazásáért lásd.: Athreya és szerzőtársai (1992), a Gibbs-mintavételezés egy intuitív magyarázatát adja: Casella és George (1992)). A jelen munkában több különböző Markov rezsinváltó modell is bemutatásra kerül, azonban függetlenül azok felírásának módjától, az alkalmazott algoritmus mindegyik esetében nagyon hasonló, hiszen az (A.1)-(A.2) állapotter modell becslését kell elvégezni.

A becsülni kívánt állapotter modell egyenletei legyenek a következők:

$$\text{Állapot egyenlet:} \quad Y_t = H_t X_t + \theta_t \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Átmenet egyenlet:} \quad X_{t+1} = \mu_{S_t} + F_{S_t} X_t + \varepsilon_t \quad (\text{A.2})$$

ahol $\theta_t \sim N(0, R_{S_t})$ valamint $\varepsilon_t \sim N(0, Q_{S_t})$. X_t jelöli a faktor értékeket adott t -időpontban, míg Y_t vektor tartalmazza ugyanebben az időpontban a modell alapjául szolgáló idősorokat. $S_t = 1, 2, \dots, n$ (n a lehetséges rezsimek száma) pedig egy látens faktor,

amelyet egy időben állandó $\mathbf{P}$ átmenet-valószínűség mátrix mozgat. A modell paraméterei így: $\Theta = \{H_j, F_i, \mu_i, Q_i, R_i, \mathbf{P}, S_j\}$, ahol $i = 1, 2, \dots, n$ és $j = 1, 2, \dots, T$. Látni kell, hogy H_t több bemutatott modell esetén is rögzített, vagy legalábbis csak néhány paraméter érték változása adja az időbeli változását. (Például a Nelson-Siegel modellek esetén a λ paraméterek időbeni változása.)

Az algoritmus a következő lépésekből áll:

1. Alkalmas kezdő pontokat választunk, azaz olyan kezdő paramétereket, amelyek benne vannak a paramétertérben. A stratégiánk a következő: a látens faktorokat láthatóvá tesszük, mégpedig úgy, hogy kihelyettesítjük az empirikus megfelelőikkel azokat, ezekre pedig megbecsüljük a modell átmenet egyenletét a legkisebb négyzetek módszerével. Amennyiben k állapota van a modellnek, akkor a mérési egyenlet és átmenet egyenlet hibáit azok abszolút eltérése szerint sorba rendezzük, és k csoportra osztjuk. Az így kapott periódusok empirikus kovariancia mátrixai (diagonális mátrixok) adják az adott állapotok prior kovariancia mátrixait. A kezdeti paraméterek ismeretében, alkalmas priorok mellett már lefuttatható a Kim-szűrő.
2. Második lépésben adott Θ paraméterek mellett lefuttatjuk a Kim-szűrőt (lásd. lentebb), ez megadja a faktor értékeket.
3. A Kim-szűrőből kapott $P(S_t = j | \mathcal{F}_t)$ valószínűségekkel a Kim és Nelson (1999) által bevezetett simítási eljárás segítségével véletlen állapotokat (S_j , $j = 1, 2, \dots, T$) generálunk. E módszer sok tekintetben a Carter és Kohn-féle (1994) mintavételezés egy többállapotos modellekre adott módosításának tekinthető.
4. Az állapot-valószínűségek kiszámolása (ez a Kim-szűrő eredménye) és a véletlen állapotok generálása után új átmenet mátrixot generálunk alkalmas priorok mellett. Az átmenetmátrix elemeit a Dirichlet-eloszlásból generáljuk, speciálisan két állapot esetén a Béta-eloszlásból. Legyen az átmenetmátrix $\mathbf{P}$. Adott átmenetmátrix esetén kiszámolhatók az állandósult állapotbeli valószínűségek (π) az alábbi sajátérték feladatként:

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

Ebből elemenkénti szorzással meghatározható a prior állapot-átmenet mátrix adott T megfigyelésre:

$$M_{prior} = \mathbf{P} \circ (\mathbf{1} \otimes (\pi * T))$$

ahol a $\circ$ jelöli az elemenkénti szorzást, míg $\otimes$ Kronecker szorzatot. Jelölje M_{emp} a realizációból számolt empirikus állapot-átmenet mátrixot!⁹ Ekkor soronként új átmenet mátrixok generálhatók (Jelölje itt most i alsó index az egyes négyzetes mátrixok sorait!):

$$\mathbf{P}_i^{új} = \text{Dirichlet}(M_{i,emp} + M_{i,prior})$$

⁹ Intuitíven: M_{prior} és M_{emp} a megfigyelések számával „felszorozott” átmenetmátrixok. Így például M_{emp} első sorának első eleme azt mondja meg az elemzőnek, hogy a rendszer hányszor maradt az 1. állapotban, úgy, hogy az 1. állapotból indult. Hasonlóan az 1. sor második eleme azt mutatja meg, hogy a rendszer hányszor került át az első állapotból a másodikba a vizsgált mintában. Nyilván a vizsgált mátrixok diagonálisában lehet nagyobb értékeket várni (a rezsimek egy bizonyos perzisztenciát mutatnak).

A Dirichlet eloszlás egy részletes és intuitív vizsgálatát adják Frigyk és szerzőtársai (2010).

5. A fennmaradó paraméterek $(H_j, F_i, \mu_i, Q_i, R_i)$ generálását mutatja be Bebesi (2016), az itt alkalmazott modellekre a tanulmány becslési eljárásai minimális módosításokkal alkalmazhatók. Fontos látni, hogy H egyik modell esetén sem állapotfüggő; a TVP-VAR modell esetén ez tartalmazza magukat a regresszorokat, míg a hozamgörbe modellek esetén ebben találhatóak a faktor loadingok. A többi változóra vonatkozó véletlen realizáció és így marginális eloszlás generálása az állapotok ismeretében történik.
6. A 2-5-ös lépéseket addig ismételjük, amíg a konvergencia meg nem felel az elvárásainknak.

Általánosságban elmondható, hogy a mintavételezés eredményei akkor tekinthetők „jóknak”, ha a végeredményként kapott becslés nem függ a kezdeti értékek megválasztásától, az iterációk által kapott paraméter láncok középértéke nem tér el egymástól túlságosan. Így a Geweke-statisztikával (1991) a lánc „burn-in” periódus utáni posterior paraméter értékeit és a lánc legutolsó paraméter értékeit lehet összehasonlítani. A teszt statisztika a következő alakban adható meg egy tetszőleges X paraméter láncra:

$$T = \frac{\bar{X}_a - \bar{X}_b}{\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} - \frac{s_b^2}{n_b}}} \sim N(0,1), \text{ ha } n_a, n_b \rightarrow \infty$$

$\bar{X}_a$ jelöli a paraméter lánc első „ a ” százalékának átlagát, míg $\bar{X}_b$ az utolsó „ b ” százalék átlagát, s_a^2 és s_b^2 jelöli az ezekhez tartozó varianciákat, a mintaelemszámokat n_a és n_b jelöli. Mivel a lánc elemei nem függetlenek, ezért a varianciákat korrigálni kell a minta spektrál sűrűségével (Geweke 1991). Nyilván a szimuláció, legyen az a Gibbs-mintavételezés, vagy a λ paramétereknél alkalmazott véletlen bolyongás Metropolis-Hastings eljárás akkor jó, ha a két minta átlaga nem tér el egymástól túlzottan, azaz a Geweke-teszt (1991) nullhipotézise teljesül: a két mintaátlag megegyezik. Jelen munkában a és b értékét 10 és 50 százaléknak választjuk.

A KIM-SZŰRŐ

A Kim-szűrőt a már bemutatott (F.1)-(F.2)-es egyenletekkel megadott modellre vezetjük be. A Kim-szűrő három főbb részre osztható, ezek a következő pontok alapján:

1. Kálmán-szűrő futtatása, ez megadja a faktor értékeket különböző állapotok mellett.
2. A Hamilton-szűrő futtatása, ez a szükséges állapot valószínűségeket adja meg.
3. A Kim-féle átlagolás (vagy a szakirodalomban „collapsing”) futtatása, amely a végleges faktor értékeket állítja elő. Jelölje innentől j az adott állapothoz tartozó faktor értéket illetve paraméter halmazt. A Kálmán-szűrőhöz

hasonlóan a Kim-szűrő esetén is lehetőség van a látens faktorok simítására erről részletesebben lásd: Kim és Nelson (1999).

A Kim-szűrő lépései részletesen a következők:

1. Alkalmas kezdeti faktor értékeket ($X_{0|0}^j$) és kezdeti kovariancia mátrixokat ($P_{0|0}^j$) választunk és opcionálisan a szűrőt az egyensúlyi állapot valószínűségekből indítjuk ($P(S_0 = j)$).
2. Lefuttatjuk a Kálmán-szűrőt minden indulási i és érkezési j állapotra. Ez k állapot esetén k^2 szűrő lefuttatását jelenti. A Kálmán-szűrő egyenletei a következő módon adhatók meg jelen esetben ($i, j \in 1, 2, \dots, k$) :

$$X_{t|t-1}^{(i,j)} = \mu_j + F_j X_{t-1|t-1}^i \quad (\text{A.3})$$

$$P_{t|t-1}^{(i,j)} = F_j P_{t-1|t-1}^i F_j' + Q_j \quad (\text{A.4})$$

$$\eta_{t|t-1}^{(i,j)} = Y_t - H_j X_{t|t-1}^{(i,j)} \quad (\text{A.5})$$

$$f_{t|t-1}^{(i,j)} = H_j P_{t|t-1}^i H_j' + R_j \quad (\text{A.6})$$

$$X_{t|t}^{(i,j)} = X_{t|t-1}^{(i,j)} + P_{t|t-1}^{(i,j)} H_j' [f_{t|t-1}^{(i,j)}]^{-1} \eta_{t|t-1}^{(i,j)} \quad (\text{A.7})$$

$$P_{t|t}^{(i,j)} = \left(I - P_{t|t-1}^{(i,j)} H_j' [f_{t|t-1}^{(i,j)}]^{-1} H_j \right) P_{t|t-1}^{(i,j)} \quad (\text{A.8})$$

3. Ezt követően ki kell értékelni a Kálmán-szűrő egyes értékeit mind a k^2 állapotban a Hamilton-szűrő (1989) segítségével, adott paraméterek mellett. Ennek lépései a következők minden t időpontra (A továbbiakban jelölje $\mathcal{F}_t$ filtráció a t időpontig felgyülemlett információt):

- a. Ismerte a $P(S_{t-1} = j | \mathcal{F}_{t-1})$ valószínűségeket¹⁰ és az átmenetmátrix értékeit ($P(S_t = j | S_{t-1} = i)$) kiszámítható a következő valószínűség:

$$P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1}) = P(S_t = j | S_{t-1} = i) P(S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})$$

- b. A fentebb bemutatott Kálmán-szűrő egyenletei segítségével kiértékeljük a k^2 darab likelihood értéket (minden induló és érkező állapothoz tartozó függvényértéket meghatározunk). A továbbiakban legyen a likelihood függvény L :

$$L(Y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, \mathcal{F}_{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |f_{t|t-1}^{(i,j)}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta_{t|t-1}^{(i,j)} f_{t|t-1}^{(i,j)} \eta_{t|t-1}^{(i,j)}\right)$$

- c. Adott időszakra az előző időszak információk alapján a valószínűségek súlyozott átlagaként meghatározható a Likelihood függvény értéke a teljes rendszerre:

$$L(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k L(Y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, \mathcal{F}_{t-1}) P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})$$

- d. Az adott időszaki információk megismerése után a $P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t)$ valószínűség a következő módon számolható:

¹⁰ Feltettük, hogy $P(S_0 = j | \mathcal{F}_0) = P(S_0 = j)$ ismert, így az első iterációban ez már használható.

$$\begin{aligned}
& P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t) \\
&= \frac{L(Y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, \mathcal{F}_{t-1}) P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})}{L(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})} \\
& P(S_t = j | \mathcal{F}_t) = \sum_{i=1}^k P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

4. A Hamilton-szűrőből (1989) kapott valószínűségekkel ki lehet számolni az egyes állapotok faktor értékeit, valamint megadhatók a végleges faktorértékek és azok kovariancia mátrixai

$$\begin{aligned}
X_{t|t}^j &= \frac{\sum_{i=1}^k P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t) X_{t|t}^{(i,j)}}{P(S_t = j | \mathcal{F}_t)} \\
P_{t|t}^j &= \frac{\sum_{i=1}^k P(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t) \left(P_{t|t}^{(i,j)} + (X_{t|t}^j - X_{t|t}^{(i,j)}) (X_{t|t}^j - X_{t|t}^{(i,j)})' \right)}{P(S_t = j | \mathcal{F}_t)}
\end{aligned}$$

valamint:

$$X_{t|t} = \sum_{j=1}^k P(S_t = j | \mathcal{F}_t) X_{t|t}^j.$$

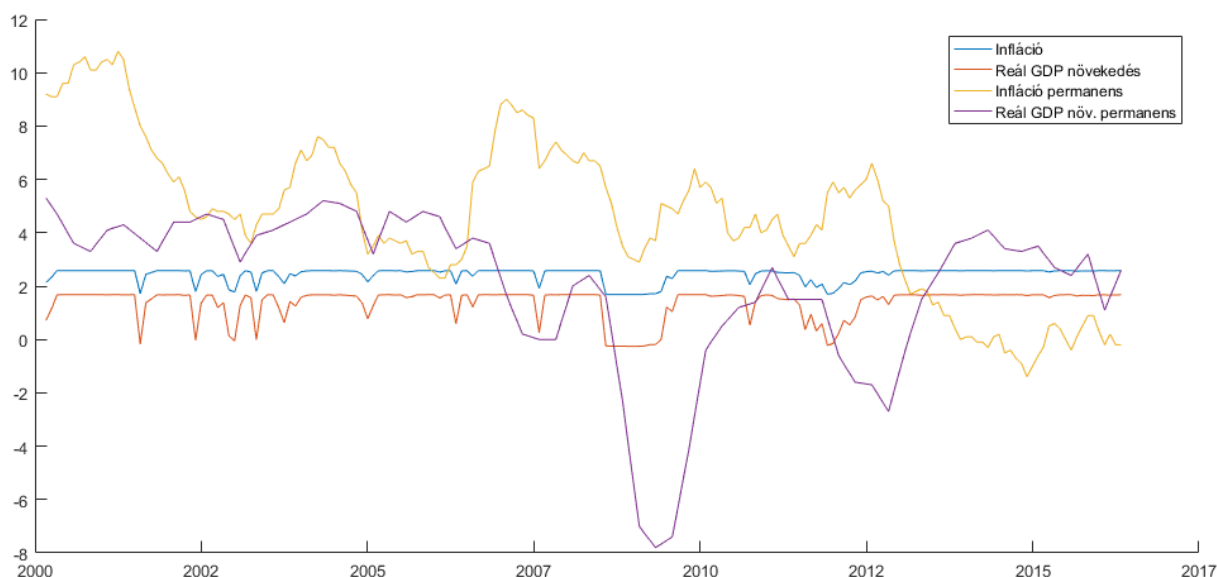
A szűrő utolsó lépése tehát az állapotok súlyozott átlagát veszi, és ezzel adja meg a kérdéses faktor értékeket. Az 1-4. lépésekben bemutatott eljárás alkalmazható endogén rezsimváltás esetére is, ekkor egyszerűen csak a fenti konstans átmenetmátrixok helyett egy állapot függő (Z) átmenetmátrix szerepel azaz

$$P_{i,j}(Z) = p_{i,j}(Z) = P(S_t(Z) = j | S_{t-1}(Z) = i).$$

Szintén egy speciális eset áll elő akkor, ha rezsimváltó VAR modell használata történik, ekkor nincs állapotter alak. Ebben az esetben nincs szükség a Kim-szűrő 2. lépésére, a Kálmán-szűrő likelihood-ja helyett elégséges, ha az adott időszak likelihoodja szerepel a modellben.

FÜGGELÉK B: A MODELLEK EREDMÉNYEI

AZ ADÓSSÁGMODELLEKHEZ TARTOZÓ TÁBLÁK ÉS EREDMÉNYEK



11. ábra: A modell permanens értékei (Infláció, GDP)

Az MS-VAR modell prior értékeinek alapját a rendszer OLS becslésének értékei jelentették (a legvolatilisabb és legkevésbé volatilis időszakokra külön-külön). Az F és μ paraméterek prior értékeihez tartozó varianciák rendre 0,2 és 1 értékek voltak.

rezsím 1	dS	$dGDP$	$dINF$	$3MH$	$SlopeH$	$3ME$
μ_1	0,107	0,088	0,025	0,011	0,152	0,015
	(-0,62;0,82)	(-0,23;0,41)	(-0,35;0,37)	(-0,26;0,22)	(-0,17;0,48)	(0;0,03)
rezsím 2	dS	$dGDP$	$dINF$	$3MH$	$SlopeH$	$3ME$
μ_2	0,349	0,332	0,184	0,213	0,040	0,067
	(-0,67;1,22)	(-0,18;0,76)	(-0,34;0,72)	(-0,42;0,84)	(-0,54;0,66)	(0;0,13)

3. táblázat: Az MS-VAR modell driftjének paraméterei, Forrás: Saját szerkesztés. Megjegyzés: A paraméter érték alatt zárójelben a 2,5 %-os, valamint a 97,5 százalékos percentilis szerepel.

rezsim 1	<i>dS</i>	<i>dGDP</i>	<i>dINF</i>	<i>3MH</i>	<i>SlopeH</i>	<i>3ME</i>
<i>dS</i>	0,403 (0,32 , 0,54)	0,003 (-0,03 , 0,043)	-0,010 (-0,05 , 0,037)	0,011 (-0,02 , 0,043)	0,022 (-0,02 , 0,061)	0,000 (-0,01 , 0,009)
<i>dGDP</i>		0,124 (0,1 , 0,158)	-0,001 (-0,03 , 0,024)	0,001 (-0,01 , 0,017)	0,006 (-0,01 , 0,026)	-0,001 (-0,01 , 0,004)
<i>dINF</i>			0,171 (0,13 , 0,22)	0,003 (-0,02 , 0,022)	0,003 (-0,02 , 0,028)	0,001 (0 , 0,007)
<i>3MH</i>				0,076 (0,06 , 0,096)	-0,003 (-0,02 , 0,014)	0,001 (0 , 0,004)
<i>SlopeH</i>					0,099 (0,08 , 0,13)	0,001 (0 , 0,005)
<i>3ME</i>						0,009 (0,01 , 0,012)
rezsim 2	<i>dS</i>	<i>dGDP</i>	<i>dINF</i>	<i>3MH</i>	<i>SlopeH</i>	<i>3ME</i>
<i>dS</i>	1,851 (1,4 , 2,621)	-0,026 (-0,25 , 0,228)	-0,008 (-0,25 , 0,251)	0,077 (-0,22 , 0,408)	0,010 (-0,25 , 0,245)	-0,015 (-0,09 , 0,065)
<i>dGDP</i>		0,308 (0,22 , 0,587)	0,026 (-0,08 , 0,185)	0,014 (-0,13 , 0,22)	-0,011 (-0,14 , 0,145)	0,006 (-0,03 , 0,043)
<i>dINF</i>			0,474 (0,35 , 0,761)	0,022 (-0,15 , 0,216)	-0,009 (-0,14 , 0,141)	0,011 (-0,03 , 0,054)
<i>3MH</i>				0,933 (0,7 , 1,37)	-0,034 (-0,22 , 0,151)	-0,001 (-0,06 , 0,06)
<i>SlopeH</i>					0,547 (0,41 , 0,82)	-0,007 (-0,05 , 0,033)
<i>3ME</i>						0,072 (0,06 , 0,096)

4. táblázat: Az MS-VAR modell hibatagjainak kovarianciái, Forrás: Saját szerkesztés. Megjegyzés: A paraméter érték alatt zárójelben a 2,5 %-os, valamint a 97,5 százalékos percentilis szerepel.

rezsim 1	<i>dS</i>	<i>dGDP</i>	<i>dINF</i>	<i>3MH</i>	<i>SlopeH</i>	<i>3ME</i>
<i>dS</i>	0,170 (-0,06 , 0,415)	0,054 (-0,06 , 0,163)	-0,086 (-0,21 , 0,048)	0,010 (-0,07 , 0,096)	0,006 (-0,1 , 0,103)	0,000 -
<i>dGDP</i>	-0,017 (-0,14 , 0,112)	0,911 (0,84 , 0,972)	-0,038 (-0,11 , 0,036)	0,009 (-0,04 , 0,058)	-0,026 (-0,08 , 0,032)	0,000 -
<i>dINF</i>	0,018 (-0,12 , 0,18)	-0,072 (-0,17 , 0,015)	0,909 (0,82 , 0,984)	0,031 (-0,05 , 0,091)	-0,026 (-0,11 , 0,055)	0,000 -
<i>3MH</i>	-0,057 (-0,2 , 0,109)	0,064 (-0,01 , 0,14)	0,023 (-0,06 , 0,108)	0,936 (0,87 , 0,992)	-0,009 (-0,09 , 0,058)	0,000 -
<i>SlopeH</i>	-0,006 (-0,23 , 0,228)	0,022 (-0,08 , 0,117)	-0,020 (-0,19 , 0,108)	0,060 (-0,04 , 0,153)	0,854 (0,72 , 0,983)	0,000 -
<i>3ME</i>	-0,001 (-0,17 , 0,151)	0,010 (-0,06 , 0,098)	0,089 (0,01 , 0,17)	0,080 (0,01 , 0,134)	-0,027 (-0,1 , 0,058)	0,993 (0,99 , 0,995)
rezsim 2	<i>dS</i>	<i>dGDP</i>	<i>dINF</i>	<i>3MH</i>	<i>SlopeH</i>	<i>3ME</i>
<i>dS</i>	-0,014 (-0,29 , 0,257)	-0,057 (-0,19 , 0,077)	-0,125 (-0,29 , 0,029)	0,021 (-0,19 , 0,224)	0,060 (-0,11 , 0,229)	0,000 -
<i>dGDP</i>	0,052 (-0,14 , 0,247)	0,978 (0,87 , 1,06)	0,012 (-0,11 , 0,138)	0,054 (-0,09 , 0,202)	0,010 (-0,12 , 0,113)	0,000 -
<i>dINF</i>	-0,180 (-0,46 , 0,077)	0,028 (-0,13 , 0,19)	0,875 (0,72 , 1,001)	-0,041 (-0,23 , 0,15)	0,011 (-0,15 , 0,176)	0,000 -
<i>3MH</i>	0,001 (-0,23 , 0,218)	-0,119 (-0,25 , 0,001)	0,044 (-0,09 , 0,192)	0,929 (0,77 , 1,063)	-0,025 (-0,18 , 0,107)	0,000 -
<i>SlopeH</i>	0,168 (-0,12 , 0,454)	-0,137 (-0,33 , 0,012)	0,039 (-0,12 , 0,198)	0,161 (-0,04 , 0,377)	0,844 (0,58 , 1,001)	0,000 -
<i>3ME</i>	0,331 (0,09 , 0,581)	-0,052 (-0,17 , 0,054)	-0,075 (-0,25 , 0,06)	0,140 (0,02 , 0,269)	-0,038 (-0,18 , 0,094)	0,919 (0,83 , 0,979)

5. táblázat: Az MS-VAR modell átmenetmátrixának paraméterei, Forrás: Saját szerkesztés.

Megjegyzés: A paraméter érték alatt zárójelben a 2,5 %-os, valamint a 97,5 százalékos percentilis szerepel.

	átlag	medián	szórás	minimum	maximum	elutasítás
F_1	-0,259	-0,014	0,794	-2,475	1,346	0,028
F_2	-0,010	0,000	0,656	-2,699	1,838	0,028
μ_1	0,484	0,369	0,620	-0,110	1,645	0,000
μ_2	-0,292	-0,007	0,760	-1,820	0,177	0,000
R_1	0,425	0,271	0,611	-0,678	1,626	0,000
R_2	-0,113	0,061	0,673	-1,734	0,954	0,000

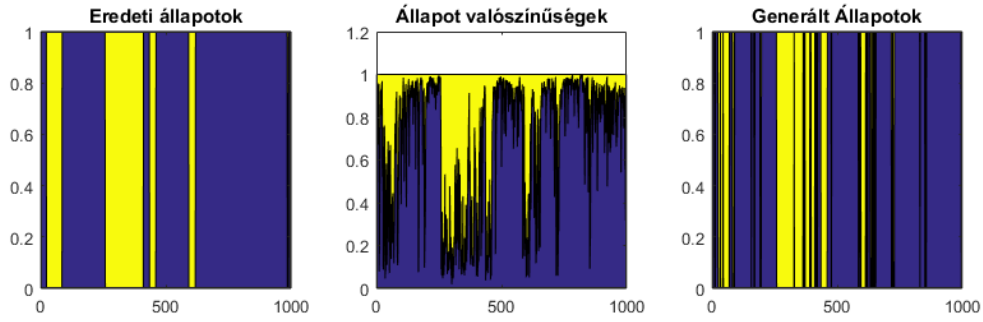
6. táblázat: A Geweke-teszt értékei különböző paraméterek esetén (MS-VAR modell), Forrás: Saját szerkesztés. Megjegyzés: A paraméterek nagy száma miatt, csak az egyes paraméter halmazokhoz tartozó tesztstatisztikák összefoglaló adatait közöljük. Az elutasítás azon paraméterek arányát mutatja be az adott paraméter halmazon belül, ahol 99 százalékos valószínűséggel elutasítottuk a konvergenciát (null hipotézis). Ez alapján az átmenetmátrixban 1 paraméter esetén nem teljesült a konvergencia mindkét rezsim esetén. Ennek ellenére a modell eredményeket megtartjuk.

Monte Carlo kísérlet

A felhasznált algoritmus tesztelése érdekében egy szimulációs példát készítünk. Egy kétváltozós MS-VAR dinamikát határozunk meg, ezt követően az a cél, hogy a becsléssel, minél jobban visszkapjuk az eredeti állapotokat és paraméter értékeket. A szimuláció során két mesterséges változó mozgását vizsgáltuk, egy 1000 időszak hosszú idősoron. A 7. táblázat mutatja a prior és posterior paraméter értékeket, valamint a tényleges adat generáló folyamat értékeit, a 12. ábra mutatja a kapott állapot valószínűségeket az eredeti állapotokkal. Az eredmények alapján állítható, hogy a modell viszonylag jól képes elválasztani az egyes állapotokat, a becslési eredmény szerint közel 92 százalékban helyesen határozta meg a modell állapotok elhelyezkedését, ahogy azt a 12. ábra is szemlélteti, hogy a tényleges és becsült érték nagyon szoros kapcsolatban állnak egymással. Bizonyos paraméterek esetén vannak becslési bizonytalanságok, amik ugyanakkor könnyen adódhatnak a minta rövidségéből.

Tényleges		Prior (OLS becslés)		Posterior	
F_1		F_1		F_1	
0,800	0,100	0,858	0,000	0,852	0,036
0,100	0,850	0,000	0,864	0,057	0,946
F_2		F_2		F_2	
0,900	0,050	0,863	0,000	0,904	0,031
0,050	0,750	0,000	0,848	0,019	0,841
R_1		R_1		R_1	
0,100	0,033	0,082	0,000	0,072	0,020
0,033	0,133	0,000	0,116	0,020	0,104
R_2		R_2		R_2	
0,225	0,075	0,439	0,000	0,259	0,030
0,075	0,300	0,000	0,541	0,030	0,314
C_1		C_1		C_1	
1,000	3,000	0,709	2,571	0,740	1,917
C_2		C_2		C_2	
2,000	4,000	0,389	2,076	0,293	0,972

7. táblázat: A becsült és tényleges értékek, Megj.: A C változó az állapotonkénti permanens értékeket jelenti.



12. ábra: A becslési eredmények és az eredeti állapotok

AZ AFNS ÉS DNS MODELLKERETEK VIZSGÁLATA REZSIMVÁLTÁS ESETÉN

A tanulmány 3.2-es részében említettekkel összhangban a vizsgált három féle modell specifikációt különítünk el:

1. MS-AFNS konstans λ paraméterekkel,
2. MS-DNS konstans λ paraméterekkel,
3. MS-DNS időben változó λ paraméterekkel.

Mindhárom modellben közös, hogy a faktorok (X) mozgása megegyezik, és a már bemutatott (A.2) egyenlettel adható meg:

$$\text{Átmenet-egyenlet:} \quad X_{t+1} = \mu_{S_t} + F_{S_t} X_t + \varepsilon_t \quad (\text{A.2})$$

ahol: $\varepsilon_t \sim N(0, Q_{S_t})$. A modellek mérési egyenletei viszont eltérnek:

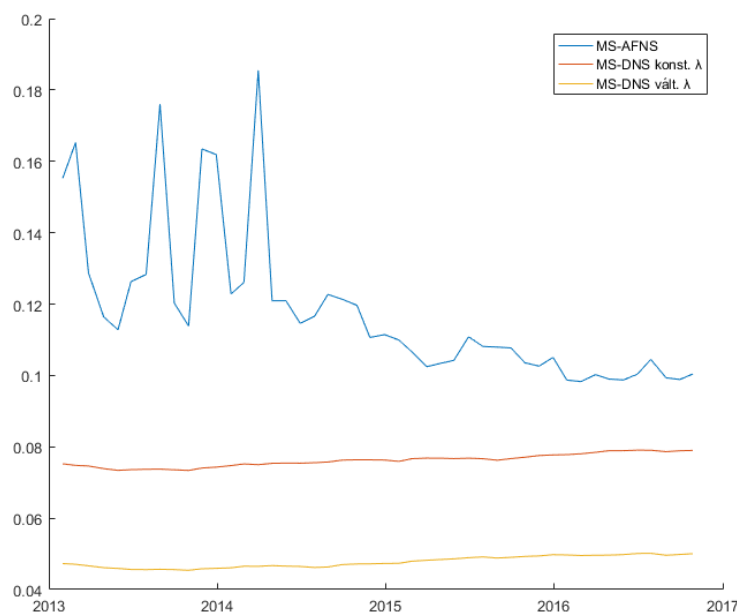
$$\text{MS-AFNS:} \quad Y_t = H X_t + C_{S_t}(\tau) + \theta_t \quad (\text{B.1})$$

$$\text{MS-DNS konst. } \lambda: \quad Y_t = H X_t + \theta_t \quad (\text{B.2})$$

$$\text{MS-DNS vált. } \lambda: \quad Y_t = H(\lambda_t) X_t + \theta_t \quad (\text{B.3})$$

A (B.1) egyenletben $C_{S_t}(\tau)$ jelöli a 3.2-es részben bemutatott korrekciós tagot, míg (B.1) és (B.2) esetén az állandó λ feltevés miatt, H is állandó. A (B.3) modell esetén H időben változik, értékét az időben változó λ paraméter adja meg. A paraméter becslésére alkalmazott eljárás ugyanaz, mint ami Bebesi (2016) tanulmányában található.

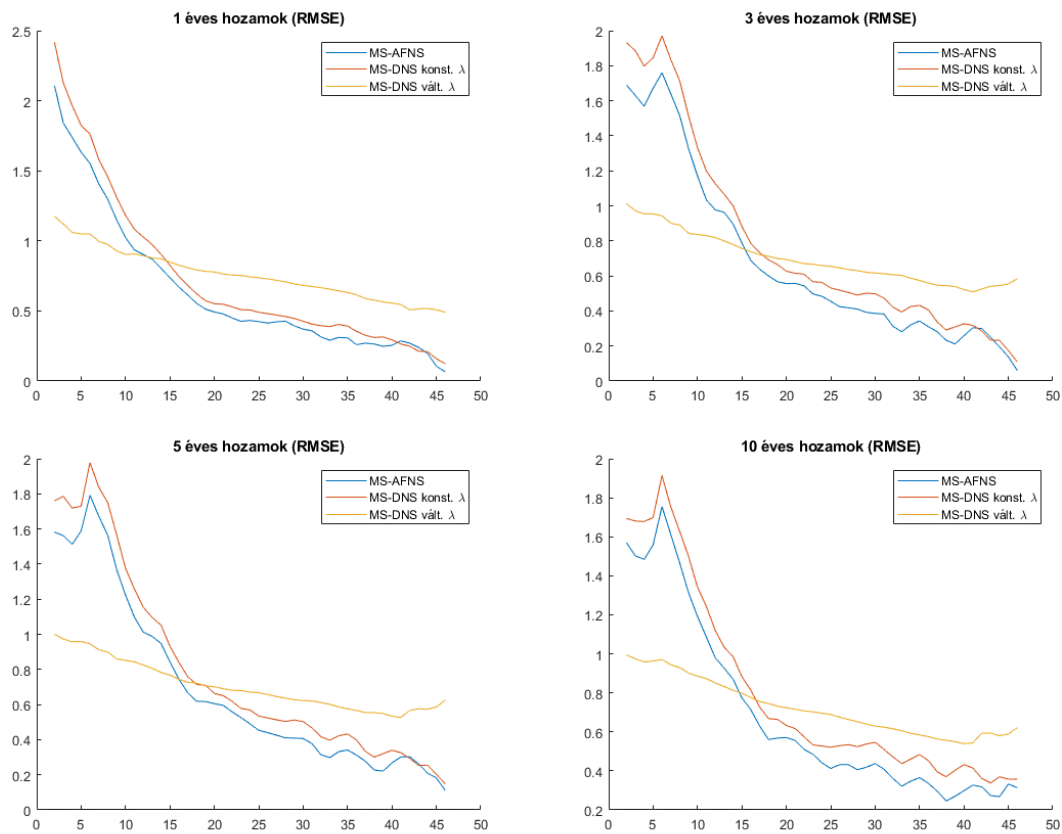
Az előrejelzés jóságának és az illeszkedés minőségének vizsgálatát végeztük el e három modellen. Mivel „ablakolással” folyamatosan 100 időszakra újra becsültük a modelleket, ezért a kapott 46 modell eredményeit részletekbe menően itt nem közöljük, helyette a következő ábrákon és táblázatokon tudjuk összefoglalni tapasztalatainkat.



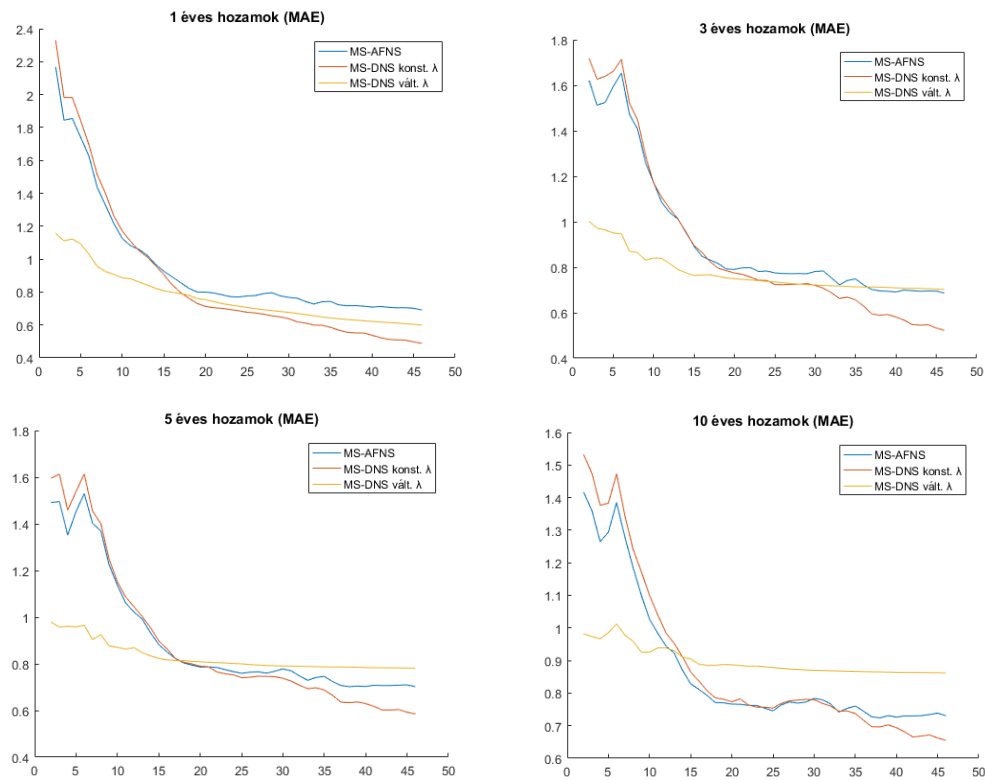
13. ábra: A vizsgált 46 modell illeszkedése a Forint hozamokra (MAE), Forrás: saját szerkesztés. Megj: Az ábra a vizsgált 46 időszakra vonatkozóan (adott időszakhoz az a modell tartozik, amelyet az előző 100 időszak adatai alapján becsültünk), mutatja a becsült és tényleges hozamok közötti átlagos abszolút hibát. Az ábrán szereplő időpontok a 100 időszakból álló becslési időhorizont utolsó napját mutatják.

A 14. ábra és a 15. ábra adott időhorizontra vonatkozóan mutatja be az egyes modellek előrejelző erejét. A benchmark előrejelzés itt a véletlen bolyongás folyamat, ami alapján a várható előrejelzésünk az utolsó időszak ismert érték lenne. E benchmark hibájának (MAE és RMSE) hányadosaként adjuk meg a 3 modell becslésének pontosságát. Az 1 alatti érték jelöli a véletlen bolyongásnál jobb előrejelzést. Érdekes látni az ábrákon azt, hogy a 20 időszaknál távolabbi időszakra történő előrejelzés (x tengely) már nem értékelhető ki megfelelően. Ugyanis például a 46 időszakra előre tekintő becslés esetén már csak egy becslés jósága alapján értékeljük ki a modell előrejelzésének jóságát.

Megállapítható, hogy a MS-DNS változó λ modell jobban teljesít a forint hozamokon, mint a másik két alternatív modell. Nagyjából a véletlen bolyongás folyamat 90 százalékát képes az egyes időhorizontokon elérni a vizsgált 4 hozampont mellett. Ez azt mutatja, hogy ennek a modellnek előrejelző ereje van. Ugyanakkor ez az előrejelző erő jócskán elmarad a Bebesi (2016) által bemutatott modell előrejelző képességétől. Itt feltehető, hogy az euró hozamgörbe beépítése a modellbe, esetleg az inflációs folyamatok megjelenítése tovább növeli a predikciós erejét az adott modellnek. (Akár annyira, hogy a kapott 90 százalékos érték elérje a véletlen bolyongás folyamat hibájának 70 százalékát.) Annyi azonban a fentiekből jól látható, hogy a változó λ paraméter használata nemcsak a mintán belüli illeszkedést növeli, hanem hasznos lehet az előrejelzésben is. További bővítése lehetne ezen vizsgálatnak, ha a két hozamgörbés modellkeret illeszkedés vizsgálata és előrejelzéseinek értékelése is megtörténne.

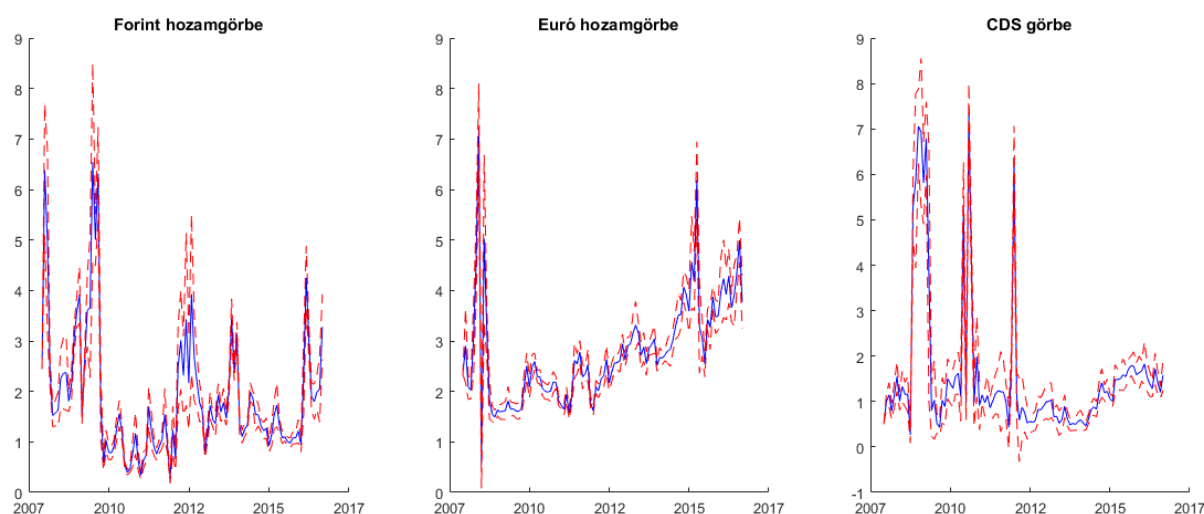


14. ábra: A modellek előrejelző ereje (RMSE), különböző időhorizontok és hozampontok esetén, Forrás: saját szerkesztés. A táblázatban a 46 időszak átlagos értékei szerepelnek.



15. ábra: A modellek előrejelző ereje (MAE), különböző időhorizontok és hozampontok esetén, Forrás: saját szerkesztés. A táblázatban a 46 időszak átlagos értékei szerepelnek.

A KÉTORSZÁGOS REZSIMVÁLTÓ HOZAMGÖRBE MODELLHEZ KAPCSOLÓDÓ BECSLÉSI EREDMÉNYEK



16. ábra: A becsült λ paraméterek időszora (kézzel a becsült értékek, pirossal a becslés konfidencia intervallumai 99%-os bizonyosság mellett)

	1	2
1	0,832 (0,710;0,902)	0,168 (0,098;0,290)
2	0,278 (0,209;0,384)	0,723 (0,616;0,791)

8. táblázat: Az átmenetmátrix (P) paraméterei

	L_M	S_M	C_M	L_E	S_E	C_E	CPI_E	CPI_M	dS	L_{CDS}	S_{CDS}
C_1	0,24 (-0,2;0,71)	2,3 (1,51;2,79)	-2,34 (-2,64;-1,86)	-0,2 (-0,63;0,26)	0,93 (0,4;1,51)	-1,53 (-2,06;-0,9)	0,47 (-0,03;0,98)	0,43 (0,09;0,78)	0 (-0,02;0,01)	0,53 (-0,64;2,11)	-1,38 (-3,41;0,63)
C_2	4,41 (3,94;4,73)	1,68 (1,19;2,04)	-0,26 (-0,51;-0,04)	0,3 (-0,13;0,67)	1,69 (1,24;2,08)	-2,08 (-2,44;-1,62)	1,66 (1,2;2,02)	3,1 (2,79;3,33)	0 (-0,01;0,01)	0,82 (-1,84;3,64)	-0,68 (-3,39;2,18)

9. táblázat: A két országos hozamgörbe modell permanens értékei az egyes állapotok esetén

F_1	L_M	S_M	C_M	L_E	S_E	C_E	CPI_E	CPI_M	dS	L_{CDS}	S_{CDS}
L_M	0,87	-	-	0,2	-	-	0,11	-0,01	-	0,1	0,12
	(0,74;1,02)	-	-	(0,03;0,39)	-	-	(-0,02;0,23)	(-0,12;0,08)	-	(-0,1;0,31)	(-0,03;0,25)
S_M	-0,09	0,75	-	-	0,15	-	0	0,06	-0,01	-	-
	(-0,24;0,06)	(0,62;0,9)	-	-	(0,01;0,3)	-	(-0,15;0,13)	(-0,07;0,18)	(-0,19;0,16)	-	-
C_M	0,03	-	0,82	-	-	-0,15	0,12	-0,07	-	0,1	0,12
	(-0,14;0,21)	-	(0,68;1,01)	-	-	(-0,33;0,03)	(-0,05;0,28)	(-0,21;0,09)	-	(-0,11;0,32)	(-0,09;0,28)
L_E	-	-	-	0,9	0,01	0,02	0,02	-	-	-	-
	-	-	-	(0,74;1)	(-0,09;0,12)	(-0,07;0,1)	(-0,09;0,1)	-	-	-	-
S_E	-	-	-	0,03	0,87	-0,05	-	-	-	-	-
	-	-	-	(-0,09;0,18)	(0,74;0,99)	(-0,16;0,05)	-	-	-	-	-
C_E	-	-	-	-	0,02	0,85	0	-	-	-	-
	-	-	-	-	(-0,16;0,19)	(0,71;0,97)	(-0,14;0,15)	-	-	-	-
CPI_E	-	-	-	-0,04	0,01	0,04	0,92	-	-	-	-
	-	-	-	(-0,17;0,08)	(-0,09;0,13)	(-0,05;0,13)	(0,83;1,01)	-	-	-	-
CPI_M	0,06	0,06	-	-	-	0,04	-	0,93	-	-	-
	(-0,08;0,2)	(-0,07;0,18)	-	-	-	(-0,09;0,15)	-	(0,86;1,01)	-	-	-
dS	-	-0,01	-0,02	-	-	-	0,03	-0,02	-0,07	-	0,01
	-	(-0,19;0,16)	(-0,07;0,04)	-	-	-	(-0,04;0,11)	(-0,06;0,03)	(-0,28;0,11)	-	(-0,04;0,08)
L_{CDS}	-0,01	-	-0,01	0,01	0,02	-	-0,02	-	0,07	0,82	0,02
	(-0,11;0,09)	-	(-0,08;0,05)	(-0,12;0,14)	(-0,1;0,15)	-	(-0,06;0,03)	-	(-0,14;0,32)	(0,56;1)	(-0,06;0,11)
S_{CDS}	0	-0,03	-	-	0,03	0,05	-0,01	-	-	0,04	0,89
	(-0,13;0,14)	(-0,14;0,09)	-	-	(-0,11;0,17)	(-0,08;0,16)	(-0,06;0,05)	-	-	(-0,12;0,21)	(0,77;1,01)

10. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet mátrixa az 1-es állapotban

F_2	L_M	S_M	C_M	L_E	S_E	C_E	CPI_E	CPI_M	dS	L_{CDS}	S_{CDS}
L_M	0,91	-	-	0,08	-	-	0,08	0,01	-	0,02	0,03
	(0,79;1,04)	-	-	(-0,06;0,21)	-	-	(-0,05;0,2)	(-0,08;0,09)	-	(-0,11;0,15)	(-0,07;0,13)
S_M	-0,05	0,81	-	-	0,09	-	-0,02	-0,04	0	-	-
	(-0,19;0,1)	(0,68;0,95)	-	-	(-0,06;0,22)	-	(-0,16;0,11)	(-0,14;0,04)	(-0,16;0,16)	-	-
C_M	0,03	-	0,87	-	-	-0,05	0,07	-0,01	-	0,02	0,02
	(-0,13;0,19)	-	(0,76;1)	-	-	(-0,19;0,09)	(-0,09;0,22)	(-0,12;0,11)	-	(-0,13;0,18)	(-0,11;0,14)
L_E	-	-	-	0,92	-0,01	0,02	0	-	-	-	-
	-	-	-	(0,82;1)	(-0,1;0,1)	(-0,07;0,1)	(-0,09;0,09)	-	-	-	-
S_E	-	-	-	0,01	0,9	-0,03	-	-	-	-	-
	-	-	-	(-0,11;0,14)	(0,78;1)	(-0,13;0,08)	-	-	-	-	-
C_E	-	-	-	-	0	0,87	-0,01	-	-	-	-
	-	-	-	-	(-0,15;0,13)	(0,75;0,97)	(-0,13;0,12)	-	-	-	-
CPI_E	-	-	-	0	0	0,03	0,92	-	-	-	-
	-	-	-	(-0,11;0,11)	(-0,11;0,11)	(-0,07;0,12)	(0,83;1,01)	-	-	-	-
CPI_M	0,05	0,06	-	-	-	0,03	-	0,93	-	-	-
	(-0,1;0,19)	(-0,07;0,18)	-	-	-	(-0,09;0,15)	-	(0,86;1,01)	-	-	-
dS	-	-0,04	-0,01	-	-	-	0,02	-0,01	0,01	-	0,01
	-	(-0,12;0,04)	(-0,09;0,05)	-	-	-	(-0,06;0,09)	(-0,06;0,03)	(-0,15;0,16)	-	(-0,03;0,06)
L_{CDS}	-0,01	-	-0,01	0,02	0,02	-	0,04	-0,01	0,02	0,81	0,02
	(-0,11;0,1)	-	(-0,09;0,06)	(-0,1;0,13)	(-0,09;0,14)	-	(-0,06;0,12)	(-0,06;0,05)	(-0,14;0,18)	(0,65;0,96)	(-0,06;0,09)
S_{CDS}	0	-0,03	-	-	0,03	0,05	-	-	-	0,03	0,89
	(-0,13;0,15)	(-0,14;0,08)	-	-	(-0,1;0,16)	(-0,06;0,16)	-	-	-	(-0,11;0,17)	(0,78;1)

11. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet mátrixa a 2-es állapotban

Q_1	L_M	S_M	C_M	L_E	S_E	C_E	CPI_E	CPI_M	dS	L_{CDS}	S_{CDS}
L_M	0,07 (0;0,13)	-0,05 (-0,09;0,02)	-0,03 (-0,08;0,01)	0 (-0,01;0,01)	-0,01 (-0,04;0,01)	0,02 (-0,01;0,06)	0,01 (-0,01;0,04)	0,01 (-0,05;0,05)	0 (-0,03;0,01)	0 (-0,02;0,02)	0 (-0,04;0,05)
S_M		0,21 (0,11;0,32)	0 (-0,06;0,06)	0 (-0,01;0,03)	0,02 (-0,02;0,08)	-0,06 (-0,1;0)	-0,01 (-0,03;0,02)	0 (-0,08;0,06)	0 (-0,02;0,02)	0 (-0,03;0,04)	0,02 (-0,03;0,08)
C_M			0,29 (0,25;0,35)	0 (-0,04;0,02)	-0,02 (-0,06;0,07)	0,02 (-0,07;0,09)	0,01 (-0,04;0,04)	-0,01 (-0,11;0,06)	0 (-0,01;0,06)	0 (-0,02;0,03)	-0,01 (-0,14;0,08)
L_E				0,01 (0;0,03)	-0,01 (-0,02;0)	0 (-0,02;0,01)	0 (-0,01;0,01)	-0,01 (-0,02;0,01)	0 (-0,02;0)	0 (0;0,01)	0 (-0,02;0,01)
S_E					0,08 (0,06;0,15)	-0,05 (-0,1;-0,01)	0 (-0,01;0,02)	0,02 (-0,03;0,06)	0 (-0,01;0,04)	0 (-0,01;0,02)	0,01 (-0,03;0,04)
C_E						0,15 (0,09;0,28)	0,01 (-0,02;0,04)	0,03 (-0,03;0,11)	0 (-0,01;0,01)	0 (-0,03;0,02)	-0,04 (-0,13;0,03)
CPI_E							0,05 (0,03;0,09)	0,02 (-0,01;0,07)	0 (-0,02;0,01)	0 (-0,02;0,02)	0 (-0,02;0,03)
CPI_M								0,21 (0,17;0,3)	0 (-0,02;0,01)	0 (-0,02;0,03)	-0,02 (-0,09;0,05)
dS									0,01 (0;0,05)	0 (-0,01;0,02)	0,01 (-0,01;0,02)
L_{CDS}										0,02 (0,01;0,05)	0 (-0,04;0,03)
S_{CDS}											0,15 (0,11;0,28)

12. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet egyenletének kovariancia mátrixa az 1-es állapotban

Q_2	L_M	S_M	C_M	L_E	S_E	C_E	CPI_E	CPI_M	dS	L_{CDS}	S_{CDS}
L_M	0,3 (0;0,52)	-0,08 (-0,22;0,02)	0,09 (-0,07;0,28)	-0,01 (-0,04;0,03)	0,01 (-0,04;0,07)	0,01 (-0,06;0,09)	-0,01 (-0,06;0,05)	0,02 (-0,06;0,12)	0 (-0,06;0,05)	0 (-0,05;0,05)	0,01 (-0,07;0,09)
S_M		0,47 (0,35;0,79)	-0,09 (-0,32;0,13)	0,02 (-0,03;0,07)	0 (-0,07;0,07)	-0,04 (-0,15;0,04)	0,02 (-0,04;0,08)	0,01 (-0,11;0,12)	0 (-0,07;0,08)	0 (-0,07;0,07)	-0,01 (-0,14;0,11)
C_M			1,33 (1,16;1,7)	-0,03 (-0,09;0,05)	-0,02 (-0,13;0,08)	-0,01 (-0,18;0,13)	-0,03 (-0,14;0,06)	-0,02 (-0,16;0,11)	-0,01 (-0,1;0,08)	0,01 (-0,1;0,11)	0,06 (-0,06;0,23)
L_E				0,06 (0,04;0,12)	-0,01 (-0,05;0,01)	0 (-0,03;0,04)	0,01 (-0,02;0,04)	0 (-0,04;0,05)	0 (-0,02;0,02)	0 (-0,03;0,02)	-0,01 (-0,05;0,02)
S_E					0,14 (0,11;0,22)	-0,04 (-0,11;0,01)	-0,01 (-0,04;0,02)	0,01 (-0,05;0,06)	0 (-0,03;0,03)	0 (-0,02;0,04)	0 (-0,04;0,05)
C_E						0,28 (0,21;0,47)	0,01 (-0,03;0,06)	0,04 (-0,02;0,12)	-0,01 (-0,04;0,02)	-0,02 (-0,05;0,01)	-0,02 (-0,09;0,03)
CPI_E							0,11 (0,08;0,17)	0,02 (-0,01;0,08)	0 (-0,03;0,02)	0 (-0,03;0,02)	-0,01 (-0,05;0,03)
CPI_M								0,32 (0,26;0,55)	-0,01 (-0,08;0,06)	0 (-0,08;0,06)	-0,02 (-0,12;0,09)
dS									0,04 (0,02;0,16)	0 (-0,05;0,05)	0,01 (-0,06;0,08)
L_{CDS}										0,06 (0,03;0,16)	0,01 (-0,07;0,08)
S_{CDS}											0,22 (0,15;0,4)

13. táblázat: A két országos hozamgörbe modell átmenet egyenletének kovariancia mátrixa a 2-es állapotban