

OPTIMÁLIS ADÓSSÁGPORTFÓLIÓ MODELL

MÓDSZERTANI BEMUTATÁS
BEBES ANDRÁS, TRAN DÁVID, BEBESI LÁSZLÓ

A módszertani bemutatás Eredmények című fejezetében, valamint a Függelék egyes részeiben ismertetett, az adósságportfólió szerkezetére vonatkozó eredmények nem képezik az Államadósság Kezelő Központ Zrt. hivatalos álláspontját az adósságfinanszírozás tekintetében. Az eredmények bemutatásának célja csupán az optimális adósságportfólió modellben rejlő lehetőségek illusztrálása.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	i
Ábrajegyzék.....	iii
Táblázatjegyzék.....	v
1 Előzmények.....	1
2 A modell működése.....	3
3 Matematikai módszerek.....	6
3.1 Árfolyamszámítás és kamatlábmodellek.....	6
3.2 Bayesi analízis.....	7
3.3 Markov-lánc Monte Carlo módszerek.....	8
3.3.1 Véletlen bolyongásos Metropolis Hastings algoritmus.....	8
3.3.2 Gibbs-mintavételezés.....	9
4 Modellkeret.....	10
4.1 Hozamgörbe modellek.....	10
4.1.1 A Nelson-Siegel hozamgörbe modell.....	11
4.1.2 A Fama-Bliss kötvényszelekciós algoritmus.....	12
4.1.3 Fama-Bliss hozamok.....	14
4.2 Modellillesztés.....	14
4.2.1 Állapottér modell.....	16
4.2.2 Kálmán-szűrő.....	17
4.2.3 Hamilton-szűrő.....	19
4.2.4 Kim-szűrő.....	22
4.2.5 Többdimenziós lineáris rendszerek paraméterbecslése.....	26
4.2.6 Paraméterbecslés az optimális adósságportfólió modellben.....	28
4.3 Költségmutatók.....	32
4.3.1 Likviditási korlát.....	34
4.3.2 Likviditási prémium.....	37
4.4 A kockázatok kezelése a modellben.....	40
4.4.1 Költségingadozás.....	41
4.4.2 Kamatkockázat.....	41
4.4.3 Megújítási kockázat.....	42
4.5 Egyéb felmerülő kérdések kezelése a modellben.....	44

4.5.1	Változó kamatozású piaci kötvények.....	44
4.5.2	A lakossági állampapírok	45
4.5.3	Kincstári Egységes Számla	45
4.6	Az optimalizálási folyamat.....	46
4.6.1	A finanszírozás modellezése.....	47
4.6.2	Optimális portfólió-szerkezetek meghatározása	52
5	Eredmények.....	58
5.1	Felhasznált adatok	58
5.2	A modellillesztés előzetes feltevései.....	60
5.3	A modellillesztés eredményei	61
5.4	Az előrejelzés eredményei	64
5.5	Optimális költség-kockázat front	67
6	Konklúzió.....	76
	Irodalomjegyzék.....	77
	Függelék A: Az optimális adósságportfólió modell sematikus működése	80
	Függelék B: Modellillesztés eredmények.....	81
	Függelék C: Optimális költség-kockázat frontok.....	83
	Függelék D: Optimális finanszírozási szerkezetek.....	86
	Függelék E: Egy kiválasztott optimális finanszírozási szerkezet mutatói	92
	Függelék F: Modell diagnosztika	94
	Modellillesztés	96
	Előrejelzés	98
	Optimalizálási folyamat	100
	Függelék G: Szószedet.....	105
	Értékpapír alapfogalmak	105
	Matematikai alapfogalmak	106
	A modellhez kapcsolódó alapfogalmak	108

Ábrajegyzék

1. ábra: A faktorsúlyok alakulása a lejárat függvényében ($\lambda = 1$)	12
2. ábra: Az elmúlt évek aukciós keresleti adatai havi frekvencián a különféle lejáratok szerint	35
3. ábra: A likviditási kockázati prémium alakulása a megfigyelt időszakban az egyes lejáratok esetén	38
4. ábra: A likviditási prémium alakulása a sikertelen ajánlatok esetén	39
5. ábra: Változó kamatozású 5 éves Magyar Államkötvények aukciós átlagárai ...	44
6. ábra: Swapgörbe becslése, 2019. május 31.....	45
7. ábra: Papírok kinnlevő és elérni kívánt állományai a példában	51
8. ábra: Kibocsátott és hiányzó arányok.....	52
9. ábra: A 2019. május végi adósságportfólió lejárat és típus szerinti bontása a modellben kezelt kategóriákba sorolva.....	58
10. ábra: A 2019. május végi adósságállomány lejárat szerkezete	59
11. ábra: Benchmark állampapírok hozamainak alakulása	59
12. ábra: Magyar CDS felár alakulása	60
13. ábra: A simított állapotvalószínűségek a megfigyelt időpontokban.....	62
14. ábra: A Nelson-Siegel lambda paraméterek alakulása a historikus adatokon az illesztés eredményeként.....	62
15. ábra: A magyar és euró hozamgörbe megfigyelt lejárataihoz tartozó RMSE és MAE értékek	63
16. ábra: Az előrejelzett időtávon az egyes rezsimek előfordulási valószínűségei	64
17. ábra: A főbb lejáratokhoz (0,25, 5, 10 év) tartozó legyezőábrák a vizsgált görbék esetén	65
18. ábra: Az egyes görbék rezsimenként eltérő hozamszintjei a különféle lejáratokon 2021 októberében (folytonos vonal), valamint a hozzájuk tartozó szórások (szaggatott vonal).....	65
19. ábra: A magyar és eurózóna infláció értékének várható alakulása.....	66
20. ábra: Az EUR/HUF keresztárfolyam alakulását szemléltető legyezőábra	67
21. ábra: Optimális finanszírozási szerkezetek az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint	67
22. ábra: Optimális költség-kockázat front az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül).....	69

23. ábra: A választott kompozit kockázati mérték szerinti optimális finanszírozások éves várható költségének megbontása költségtenyezők szerint (a kamatköltséget a jobb tengelyen ábrázoltuk)	71
24. ábra: Az optimális finanszírozási szerkezetek 1 éves refinanszírozási igényének alakulása a modellezés időhorizontján	72
25. ábra: Az egyes finanszírozási szerkezetek által kapott teljes portfólió időbeli jelenértékének a változása	73
26. ábra: Az egyes optimális finanszírozási szerkezetek mentén kialakuló minimális KESZ igény várható szintje	74
27. ábra: Az egyes optimális finanszírozási szerkezetek esetén kapott lejárat mutatók a vizsgált időszak végén	75
28. ábra: Az optimális adósságportfólió modell sematikus ábrája	80
29. ábra: Optimális finanszírozási szerkezetek a szórás mint kockázati mérték szerint	83
30. ábra: Optimális költség - szórás front (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)	83
31. ábra: Optimális finanszírozási szerkezetek az ATR (év) mint kockázati mérték szerint	84
32. ábra: Optimális költség - ATR front (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)	84
33. ábra: Optimális finanszírozási szerkezetek az 1 éves refinanszírozási arány mint kockázati mérték szerint	85
34. ábra: Optimális költség - 1 éves refinanszírozási arány front (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)	85
35. ábra: A választott finanszírozási szerkezet esetén kapott adósságállomány időbeli alakulása	92
36. ábra: A választott finanszírozási szerkezet esetén az egyes időtávokon vett refinanszírozási arányok alakulása	93
37. ábra: A választott finanszírozási szerkezet esetén a teljes időtávon várható költség dekompozíciója, valamint az egyes költségelemek CaR95 értékei	93

Táblázatjegyzék

1. táblázat: Havi likviditási korlátok (küszöbértékek) az egyes instrumentumok esetén különböző rezsimekben, milliárd Ft.....	36
2. táblázat: Kibocsátott mennyiség 2016 augusztusában (csereaukciókat beleszámolva), hetekre lebontva, milliárd Ft.....	37
3. táblázat: A befektetők által elvárt átlagos többlethozam (l_{rm}) rezsimenként, bázispontban megadva	40
4. táblázat: A kapott egyensúlyi értékek az egyes faktorok esetén, rezsimenként	61
5. táblázat: A Geweke-tesztstatisztika értékei.....	63
6. táblázat: Az átmenetmátrix (F) az 1-es rezsimek esetén, zárójelben az egyes értékekhez tartozó szórások.....	81
7. táblázat: Az átmenetmátrix (F) a 2-es rezsimek esetén, zárójelben az egyes értékekhez tartozó szórások.....	81
8. táblázat: Az átmenetegyenlet kovariancia mátrixa (Q) az 1-es rezsimek esetén..	82
9. táblázat: Az átmenetegyenlet kovariancia mátrixa (Q) a 2-es rezsimek esetén ...	82
10. táblázat: Az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint kapott optimális finanszírozási szerkezetek összetétele százalékpontban megadva. A fix arányok az adott devizanemen belül értendőek.....	91
11. táblázat: Az 51. optimális finanszírozási szerkezet végrehajtása során kapott év végi adósságportfólió-összetételek.....	92
12. táblázat: Stabilitás teszt - 50 futtatás	100
13. táblázat: Nadírpont.....	100
14. táblázat: Iterációk számának összehasonlítása.....	101
15. táblázat: Finanszírozási szerkezetek számának összehasonlítása	101
16. táblázat: Iterációk számának hatása 50 000 finanszírozási szerkezet esetén	102
17. táblázat: Előrejelzés újragenerálása	102
18. táblázat: Páronkénti összehasonlítások.....	103

1 Előzmények

Az államadósság-kezelés fő célja a hosszú távon alacsony költségek és vállalható kockázatok mellett való finanszírozás, és az olyan adósságszerkezet kialakítása, ami biztosítja ezt. Az Államadósság Kezelő Központ Zártkörűen Működő Részvénytársaság (ÁKK) ennek szellemében 2001-2003 között az akkor korszerűnek számító kockázatkezelési technikák felhasználásával kifejlesztett egy, az adósságportfólió főbb mutatói optimális értékeinek meghatározására (benchmarkokra) irányuló modellt, amelyet 2004 végétől az adósságkezelési stratégiája keretében az adósságszerkezet kialakításához használt. A 2007-2008-ban kezdődött válság hatásai következtében azonban az addig megbízható modell szélsőséges eredményeket adott, amelyek 2009-től már nem voltak elfogadhatók költség-kockázat szempontból. A hozam- és devizaárfolyamok volatilitása megnőtt, leszűkült a magyar forint- és deviza-forrásbevonás költsége közötti különbség, kikerült a tervezési időhorizontról a korábban hozamkonvergencia-feltételként a modellbe beépített EMU-csatlakozás, új kockázatként jelent meg a magas külföldi tulajdon a forintpiacon, és nem közvetlenül adósságkezelési okokból bekerült a portfólióba nagy mennyiségű, rövid futamidejű – de átmenetileg kedvező költségű – devizaadósság (az IMF-EU hitelcsomag). Ezen és hasonló változások miatt az akkori benchmark modell egyes eredményeinek alkalmazását az ÁKK 2009-től felfüggesztette. Új célként az ÁKK egy új, teljeskörű adósságportfólió modell megalkotását határozta el, amelynek megkezdésére a piacok stabilizálódását követően, 2013-ban nyílt lehetőség (Fegyveres 2014a). A modellalkotás első lépéseként az ÁKK feltérképezte egyes külföldi adósságkezelők módszereit benchmarkok meghatározására (Fegyveres 2013; Fegyveres és Bebes 2014; Fegyveres 2015b). A modellalkotást megelőzte a hozamgörbe modellezés és az adósságkezelés során figyelembe vehető kockázatok mérési módszertanának feltérképezése is (Bebes 2013; Fegyveres 2014b, 2015a).

Az új modell első verziója 2015 év végére készült el (Bebes és Reguly 2015). Eközben folytatódott a hozamgörbe modellezési módszerek tesztelése és vizsgálata (Tran 2016), továbbá az ÁKK megvizsgálta azt is, hogy a hozamgörbe modellezése mellett még mely makro faktorok elemzése és modellezése szükséges (Bebesi 2016; Bebesi és Bebes 2016). 2016 szeptemberére elkészült a devizaadósság arányára vonatkozó első elemzés a modell eredményei alapján (Bebes, Tran és Bebesi 2016b), decemberre pedig a forintadósság fix-változó kamatozás szerinti arányára vonatkozó elemzés is (Bebes, Tran és Bebesi 2016a).

2017 szeptemberére a modell eredményei már kiterjedtek az ÁKK által az adósságportfólióra alkalmazott összes benchmarkra egy egységes szemléletben készült elemzésben (Bebes és Tran 2017a), év végére pedig a véglegesnek tekintett modell eredményeit bemutató elemzés (Bebes és Tran 2017b), valamint az előrejelzési módszertan véglegesítése is megtörtént (Bebesi és Bebes 2017).

2018-ban az Eötvös Loránd Tudományegyetem elvégezte a modellben alkalmazott módszerek megfelelőségének vizsgálatát.

Az új adósságportfólió modell tehát egy többéves kutató-fejlesztői munka eredményeként készült el az ÁKK-ban. Jelen anyag célja a modell részletes módszertani bemutatása.

2 A modell működése

Az optimális adósságportfólió modell kialakításakor az alapvető feladat volt egy olyan szimulációs rendszer létrehozása, melynek segítségével a gyakorlatban is alkalmazható, tudományos módszerekkel megalapozott benchmarkok határozhatók meg az adósság szerkezetére vonatkozóan, így támogatva a stratégiaalkotást. Az ÁKK középtávú (5 évre szóló) államadósság-kezelési stratégiát készít, ezért a modell időhorizontja is ennek megfelelő. Mindez tükrözi az adósságkezelés alapvető céljában is megfogalmazott hosszabb távú szemléletet, többek között a rövidtávon alacsony költségű, de magas kockázatú megoldások elkerülését.

Az adósság szerkezetét tekintve alapvetően a deviza-összetétel és a kamatozás módja szerinti összetétel alkot eltérő ismérvekkel rendelkező instrumentumcsoportokat, ezeken belül pedig a futamidő szerint lehet további elkülönítést tenni. Így tehát célszerű, hogy a modell határozza meg (1) a teljes adósságállományon belül a forint és deviza instrumentumok megfelelő arányát, (2) a forintadósságon belül a fix és változó kamatozású instrumentumok megfelelő arányát, valamint (3) a devizaadósságon belül is a fix és változó instrumentumok megfelelő arányát. Emellett a modell kialakítása idején lett stratégiai cél a lakossági értékesítés felfuttatása is, mert bár ezen állampapír szegmens költségesebb, a kamatkockázata és a megújítási kockázata alacsonyabb a lakossági termékek kamatmeghatározási módja, illetve a befektetői kör kedvezőbb adósságmegújítási hajlandósága miatt. Fontos cél továbbá az is, hogy a fenti arányszámok mellett a teljes adósságportfólió átlagos lejárat ideje növekedjen, hiszen egy hosszabban elnyújtott, kiegyensúlyozott lejárat szerkezet mellett az adósságportfólió sokkal kevésbé érzékeny egy esetleges gazdasági vagy piaci sokk rövidtávú hatásaira. Egy adott finanszírozási szerkezet esetén felmerülő költségek, valamint a várható kockázatok felmérése céljából szükséges mindezen mutatók meghatározása. Alapvető tény azonban, hogy a mutatószámok meghatározása és a lehetséges finanszírozási szerkezetek ezek mentén való összehasonlítása során nem adódik egyetlen, egyértelműen legjobb megoldás. A költségek csökkentése a legtöbb esetben a vállalt kockázat növekedésével jár együtt, és ez fordítva is igaz. Például az átlagos hátralévő futamidő eltúlzott növelése (a megújítási kockázat csökkentése érdekében) normális hozamgörbe esetén magasabb kamatozás melletti hosszú lejáratú kibocsátásokat igényel, egyben akár túlzottan rugalmatlanná teheti az adósságportfóliót egy esetlegesen a hozamszint csökkenésével járó, ezáltal a kamatköltséget mérséklő piaci hatás esetén, arról nem is beszélve, hogy az elsődleges állampapír piaci kereslet korlátai miatt további költségnövekedést is eredményezhet. Az optimális adósságportfólió modell végcélja ezek alapján a lehetséges finanszírozási szerkezetek¹ közül megtalálni azokat, amelyek egy bizonyos – a modell által szimulált – kockázati környezetben adott költségek mellett minimális kockázatot jelentenek. Az így kapott optimális hozam-kockázat frontról pedig már a döntéshozó preferenciáinak megfelelően – a reálisan elérhető eredmények közül –

¹ A szövegben használt egyes kifejezések bővebb definíciója a Függelék G: Szószedet című fejezetben található.

kiválasztható az optimális finanszírozási szerkezet, vagy ezeknek egy szűkebb halmaza, és ezekből meghatározható az optimális adósságszerkezet összetétele (konkrét célérték vagy céltartomány).

A modell működése alapvetően három fázisra bontható.

Az első fázis a modellillesztés, mely során a gazdaságot modellező Markov rezsimműtő állapotter modell paramétereit határozzuk meg. Ehhez a magyar állampapírhozam-idősorok a modellben való felhasználás céljára – a nyers adatok simításával – a Fama-Bliss-féle bootstrap módszer segítségével kerülnek meghatározásra, a többi felhasznált adatsornál (pl. makrogazdasági mutatók) nincs szükség további átalakításokra. Az így kapott adathalmazt az alább bemutatott Markov rezsimműtő állapotter modell használja fel, amely a paramétereket Gibbs-mintavételezési eljárás során, míg a faktorok értékét az így kapott paraméterek segítségével Kálmán- és Kim-szűrő felhasználásával készíti el. A modell alapfeltételezése, hogy a gazdaság különböző állapotokba kerülhet. A modellben kétféle rezsime különböztetünk meg: az egyiket a gazdaság „nyugalmi helyzetének” (vagy konjunktúrájának) modellezésére, míg a másikat a gazdaság „válság állapotának” modellezésére használjuk. A faktorokat meghatározó permanens értékek (hosszú távú várakozások), az átmenetmátrix, valamint a hibatagok más-más értékeket vesznek fel az egyes állapotokban. A faktorokat mozgó átmenetegyenlet hibatagjainak heteroszkedaszticitását állapotonként változó kovariancia mátrixszal kezeljük.

A második fázis a szcenáriók készítése. Ennek részeként kerülnek meghatározásra a gazdasági és piaci paraméterek realizációi (azaz számos lehetséges kimenetel) a modellillesztés eredményeként kapott paraméterekből a faktordinamika egyenlete alapján. Az induló finanszírozási szerkezetek véletlenszerű generálása (ami majd a harmadik, optimalizációs fázis kezdő pontalmazát határozza meg) is ebben a fázisban zajlik. A kibocsátások szimulálásához felhasznált teljes finanszírozási igény egy adott évben megegyezik az abban az évben lejáró adósságállomány, valamint az ÁKK finanszírozási tervében szereplő éves nettó finanszírozási igény (lényegében a költségvetési hiány) összegével. A kezdeti adósságállományból kiindulva az egyes finanszírozási szerkezetek és gazdaságrealizációk mentén meghatározásra kerülnek az egyes költség és kockázati mutatók. A vizsgált realizációk és finanszírozási szerkezetek száma tetszőlegesen változtatható a szimuláció kezdetén.

A harmadik fázisban az előre meghatározott optimalizálási célok – úgymint: a várható költségeknek, a költségek ingadozásának, valamint a refinanszírozási kockázatnak a minimalizálása; illetve az időszak végére kialakuló teljes adósságállomány átlagos átárazódási idejének maximalizálása – szerint kerül megállapításra az adott költség-kockázati térben hatékony finanszírozási szerkezetek halmaza. Az optimalizálás során használt iterációk száma tetszőlegesen megválasztható. Az eredményként kapott hatékony finanszírozási szerkezetekből kirajzolódik az adott időtávon elérhető adósságportfólió-szerkezetek halmaza is, ami alapul szolgál az adósság-benchmark célok meghatározásához.

Az optimális adósságportfólió működésének sematikus ábrája a Függelék A: Az optimális adósságportfólió modell sematikus működése című fejezetben található.

3 Matematikai módszerek

Ebben a fejezetben bemutatjuk a modell módszertani leírásához szükséges matematikai módszereket. A tanulmányban gyakran használt valószínűségelméleti, modellezési, valamint kötvényekkel kapcsolatos fogalmakat és definíciókat a Függelék G: Szószedet című fejezet tartalmazza.

3.1 Árfolyamszámítás és kamatlábmodellek

Egy tetszőleges kötvény árfolyama a kötvény pénzáramlásának (cash-flow-jának) jelenértéke, vagyis

$$PV(K) = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r_t)^t} = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t},$$

ahol a C_t jelöli a K kötvény t időpontbeli pénzáramlását, r_t a piaci kamatláb, míg r a *lejáratú hozam* (yield to maturity). Az elemi kötvény árfolyama így a

$$p(\tau) = \frac{C}{(1+r_\tau)^\tau}$$

képletből adódik, ahol τ a futamidő, C a névérték, r_τ pedig a hozam. A kamatozó kötvények árfolyama a fentiekből adódik, úgymint:

$$PV(K) = \sum_{t=1}^n p(t)C_t.$$

Az alábbiakban a kamatlábmodellezés alapvető fogalmait mutatjuk be röviden. A kamatlábmodellek egy adott időpontban a különböző lejáratokhoz tartozó hozamok alakulását jelenítik meg. Jelölje $p_t(\tau)$ a τ időtávra t időpontban számolt elemi kötvény árfolyamát, vagyis a $t + \tau$ időpontban 1 egységnyi kockázatmentes kifizetés jelenértékét. Definíció alapján elmondható, hogy $p_t(0) = 1$. Jelölje $y_t(\tau)$ a τ futamidejű elemi kötvény folytonos kamatozással számolt azonnali hozamát t -ben (ez a hozamgörbe), amelyből definíció szerint az alábbi összefüggés adódik:

$$p_t(\tau) = e^{-\tau y_t(\tau)}.$$

A forward görbét jelölje $f_t(\tau)$, amely a t időpontban $t + \tau$ időpontban kezdődő végtelenül rövid időszakra számolt határidős hozamokat jelenti, definíció szerint:

$$f_t(\tau) = \frac{-p'_t(\tau)}{p_t(\tau)}.$$

A fenti két egyenletből pedig felírható a forward görbe és a hozamgörbe közötti összefüggés:

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du.$$

Miután a fentiekben bemutatott három görbe ugyanazt az információt hordozza, így amennyiben az egyik adott, akkor a többi is számolható. Ezáltal a kamatlábak modellezéséhez elméletben tetszés szerint választható bármelyik. Az optimális adósságportfólió modell kialakítása során a hozamgörbe ($y_t(\tau)$) becslésével foglalkoztunk. Fontos megjegyezni, hogy a hozamgörbe közvetlenül nem figyelhető meg a piacon, így az csak a rendelkezésre álló diszkrét állampapír árfolyamokból/hozamokból becsülhető.

3.2 Bayesi analízis

A bayesi analízis keretein belül a modell vizsgált paraméterei véletlen változók, amelyek valószínűségi eloszlással bírnak. Mivel az abszolút folytonos eloszlást a sűrűségfüggvénye egyértelműen meghatározza, ezért a továbbiakban a sűrűségfüggvényre is használni fogjuk az eloszlás kifejezést. Ezen eloszlás jellemzi a paraméterek modellel kapcsolatos előzetes feltételezéseit. Vegyük példának az alábbi egyszerű lineáris regressziós modellt:

$$Y = HX + \varepsilon,$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_m),$$

ahol Y és ε $m \times 1$ vektorok, X $f_n \times 1$ regresszor vektor, H $m \times f_n$ méretű mátrix, míg a mérési hibák ε vektorának varianciájában I_m m dimenziós egységmátrix. Jelölje a paraméterek vektorát $\theta = [X \ \sigma^2]$. Ekkor az előzetes várakozásokat megtestesítő valószínűségi eloszlást, amely a megfigyelések vizsgálata előtti feltételezéseket tartalmazza, *a priori* eloszlásnak nevezik, jelölje ezt $g(\theta)$. Ez egy fontos különbség a klasszikus módszerekkel szemben, hiszen itt a szubjektív várakozások is megjelennek.

Y megfigyelését követően Bayes tételét alkalmazva a paraméterek eloszlását az *a priori* feltételezéseket és a megfigyeléseket ötvözve lehet frissíteni. Legyen $f(Y|\theta)$ az Y megfigyelésének eloszlása a paraméterek ismeretében, $h(Y, \theta)$ az adatok és a paraméterek együttes eloszlása, $f(Y)$ pedig az Y minta eloszlása. Legyen $p(\theta|Y)$ a paraméterek posteriori eloszlása az adatok ismeretében. Ekkor

$$h(Y, \theta) = f(Y|\theta)g(\theta) = p(\theta|Y)f(Y)$$

amelyből

$$p(\theta|Y) = \frac{f(Y|\theta)g(\theta)}{f(Y)}.$$

Miután az adatok rögzítettek, így $f(Y)$ konstans minden paraméterhalmazra. Felhasználva $f(Y|\theta)$ és a likelihood függvény, $L(\theta|Y)$ funkcionális ekvivalenciáját megmutatható, hogy

$$p(\theta|Y) \propto L(\theta|Y)g(\theta),$$

azaz a posterior eloszlás arányos a likelihood függvénnyel és az *a priori* eloszlással.

3.3 Markov-lánc Monte Carlo módszerek

Legyen adott egy S diszkrét halmaz ($S = \{0, 1, \dots, N\}$, állapothalmaz), ekkor S értékű valószínűségi változók egy $X_0, X_1, \dots$ végtelen sorozatát *Markov-láncnak* hívjuk, amennyiben a valószínűségi változók között fennáll az alábbi összefüggés:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

minden $n \geq 0$ egész számra és $j, i, i_0, \dots, i_{n-1} \in S$ állapotokra, vagyis teljesül a *Markov-tulajdonság*. A Markov-tulajdonság esetén az $(n+1)$ -edik pillanatbeli állapot meghatározásához elegendő ismernünk az n -edik állapotot, a korábbi állapotok ismerete nem változtatja meg az $i \rightarrow j$ átmenet valószínűségét. A $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ valószínűségek határozzák meg az i -ből j -be való átmenet valószínűségét az n -edik pillanatban, míg az ebből képzett mátrixot *átmenetvalószínűség mátrixnak* nevezzük.

A *Markov-lánc Monte Carlo (MCMC) módszerek* alatt algoritmusok egy olyan halmazát értjük, ahol egy tetszőleges eloszlásból mintavételezünk Markov-lánccok felhasználásával. Az MCMC algoritmusok fő célja olyan Markov-lánc építése, amelynek a kívánt eloszlás éppen a stacionárius eloszlása, ezért a folyamat realizációja egy úgynevezett burn-in periódust követően egyre inkább a kívánt eloszlás tulajdonságaival rendelkező mintát szolgáltatja.

3.3.1 Véletlen bolyongásos Metropolis Hastings algoritmus

Tegyük fel, hogy az $f(\phi)$ eloszlásból szeretnénk mintavételezni, ahol a $\phi: n \times 1$ jelöli a paramétervektort. Az $f(\phi)$ posterior eloszlásból közvetlenül nem tudunk mintavételezni, valamint a ϕ paraméter marginális feltételes eloszlásai sem ismertek. Azonban, amennyiben adott $\phi = \phi^*$ értékek mellett képesek vagyunk az $f(\phi^*)$ -t kiértékelni, akkor a Metropolis Hastings (MH) algoritmus használható $f(\phi)$ meghatározására. Most az algoritmus egy speciális esetét, a véletlen bolyongásos MH algoritmust mutatjuk be.

A véletlen bolyongásos MH algoritmus a „jelölt” eloszlást, vagyis a $q(\phi^{G+1} | \phi^G)$ -t (G index jelöli a ϕ paraméterből való mintavételt) a

$$\phi^{G+1} = \phi^G + \varepsilon$$

véletlen bolyongásként definiálja, ahol az $\varepsilon: n \times 1 \sim N(0, \Sigma)$. Ekkor $\phi^{G+1} - \phi^G = \varepsilon \sim N(0, \Sigma)$. Ebből és a normális eloszlás szimmetriájából következik, hogy $q(\phi^{G+1} | \phi^G) = q(\phi^G | \phi^{G+1})$, tehát az elfogadási valószínűség az alábbi egyszerű formában írható fel:

$$\alpha = \min\left(\frac{f(\phi^{G+1})}{f(\phi^G)}, 1\right).$$

Ekkor a véletlen bolyongásos MH algoritmus lépései a következők:

1. Alkalmas kezdőértékeket választunk a ϕ paraméterekhez, legyen ez ϕ^0 , valamint fixáljuk a Σ kovariancia mátrixot a véletlen bolyongáshoz.

2. Új paramétert generálunk az $\phi^{t+1} = \phi^t + \varepsilon$ segítségével, ahol ϕ^0 az első húzás eredménye.
3. Kiszámítjuk az elfogadási valószínűséget az $\alpha = \min\left(\frac{f(\phi^{t+1})}{f(\phi^t)}, 1\right)$ képlet alapján. Amennyiben $\alpha > u \sim U(0, 1)$, akkor megtartjuk ϕ^{t+1} -t, ellenkező esetben elvetjük.
4. A 2-3. lépéseket megismételjük $M + L$ -szer, és az eljárás végén az első L esetet eldobjuk. M értékével tetszőleges pontosságú illesztés elérhető, míg L értéke elég nagy ahhoz, hogy a konvergencia már megfelelő legyen.

Σ választása nagyon fontos, ugyanis ez a paraméter határozza meg, hogy az algoritmus mekkora paraméterteret derít fel. Σ magas értékei nagyobb elutasítási arányt eredményeznek, ezáltal a paraméterter nagyobb szelete kerül felderítésre.

3.3.2 Gibbs-mintavételezés

A Gibbs-mintavételezési eljárás egy Markov-lánc Monte Carlo (MCMC) szimulációs módszer együttes és marginális eloszlások közelítésére a feltételes eloszlásokból vett mintavételezéssel. Legyen adott n véletlen változó együttes eloszlása $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$. A cél a marginális sűrűségfüggvény $f(z_t)$ jellemzőinek (pl. várható érték, szórás) meghatározása. Amennyiben adott a feltételes sűrűségfüggvény, $f(z_t | z_{j \neq t})$, $t = 1, \dots, n$, valamint $z_{j \neq t} = \{z_1, \dots, z_{t-1}, z_{t+1}, \dots, z_n\}$, akkor a Gibbs-mintavételezés segítségével generálható $z_1^j, z_2^j, \dots, z_n^j$ minta $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ -ből anélkül, hogy ismernénk $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ -t vagy $f(z_t)$ -t ($t = 1, \dots, n$).

Alkalmas kezdőértékek mellett a mintavételezés lényege az alábbi algoritmus:

- Vegyünk z_1^1 mintát az $f(z_1 | z_2^0, \dots, z_n^0)$ feltételes eloszlásból.
- Ezután vegyünk z_2^1 mintát az $f(z_2 | z_1^1, z_3^0, \dots, z_n^0)$ feltételes eloszlásból.
- $\vdots$
- Végül vegyünk z_n^1 mintát az $f(z_n | z_1^1, z_2^1, \dots, z_{n-1}^1)$ feltételes eloszlásból.

A fenti n lépés iterálása N -szer ($N \rightarrow \infty$) exponenciális sebességgel tart a keresett eloszláshoz, ezáltal a $z_1, \dots, z_n$ marginális eloszlások közelíthetők M értékéből számolt empirikus eloszlásból, $(z_1^j, z_2^j, \dots, z_n^j)$ ($j = L + 1, \dots, j = L + M$), ahol L elég nagy ahhoz, hogy a mintavételezés már konvergáljon a keresett eloszláshoz, míg M segítségével tetszőleges pontosság adható. Így tehát L jelenti a mintavételezés kezdeti lépéseinek számosságát, amelyeket az algoritmus végeztével a kezdőértékektől való függés csökkentése érdekében eldobunk („burn-in”), míg a maradék M értékéből számolt empirikus eloszlás határozza meg a kapott paraméterek posterior eloszlását.

A matematikai alapok leírása után áttérünk a modell konkrét megvalósításának bemutatására.

4 Modellkeret

4.1 Hozamgörbe modellek

Az adósságkezelők számára kiemelten fontos a hozamgörbe megismerése, valamint modellezése a hozamkörnyezetből és annak megváltozásából fakadó költség és kockázat tényezők miatt.

Az új portfóliómodell kialakításához az ÁKK részletesen megvizsgálta a nemzetközi gyakorlatban napjainkban használt hozamgörbe modelleket (Fegyveres és Bebes 2014; Fegyveres 2015b). A külföldi adósságkezelő intézmények és jegybankok által is használt hozamgörbe modelleket figyelembe véve az ÁKK a harmadfokú spline alapú módszer mellett a Nelson-Siegel-Svensson hozamgörbe modellcsaládon alapuló módszerekben rejlő lehetőségeket vizsgálta meg (Fegyveres 2014b), valamint összehasonlította a különféle modellcsaládokat alkalmazhatóságuk és jellemzőik szerint (Reguly 2015; Tran 2016).

Az empirikus hozamgörbe-modellek alapvetően két nagy csoportra bonthatók: az egyik a spline illesztésekkel operáló modellek, a másik a paraméteres modellek csoportja. A Nelson-Siegel hozamgörbe modellcsalád a paraméteres modellek csoportján belül az exponenciális függvényeket illesztő empirikus hozamgörbe modellek közé tartozik. Az empirikus hozamgörbe modellek esetén két dimenzió szerint vizsgálhatjuk az általunk megfigyelt rendszert. Az egyik dimenzió a keresztmetszeti, amely egy adott időpontban vizsgálja a hozamgörbe alakját, paramétereit, ezt a fajta modellezést nevezik statikus hozamgörbe-modellezésnek, míg a másik dimenzió a hosszmetzeti, amely idősorosan vizsgálja a hozamgörbe alakulását. A mindkét dimenziót figyelembe vevő modelleket nevezik dinamikus hozamgörbe-modelleknek.

A hozamgörbe-modell kiválasztása során külön hangsúly esik annak könnyű közgazdasági értelemben vett értelmezhetőségére, valamint fontos az is, hogy a kapott eredmények összhangban legyenek a gazdaságban megfigyelhető stilizált tényekkel, illetve a historikus adatokban rejlő további jellemzőkkel.

Nincsen egyetlen egyértelműen, minden szempontból legjobbnak számító hozamgörbe-modell. A spline modellcsalád ugyan rendkívül jó illeszkedést ad, azonban a kapott eredmények idősoros vizsgálata nehézkes. A Nelson-Siegel-Svensson modellcsalád – azon belül is a Nelson-Siegel háromfaktoros modell – ugyan rosszabb illeszkedést mutat, mint a harmadfokú spline modell, azonban paramétere (faktorai) a spline modellével szemben közgazdasági értelemben jól értelmezhetők, valamint ezen paraméterek idősorosan is vizsgálhatók. Diebold és Li (2006) munkájukban a háromfaktoros dinamikus Nelson-Siegel modellt vizsgálva arra jutnak, hogy hosszabb időtávon az előrejelzéseik jobban teljesítenek, mint más benchmark előrejelzések. M. de Pooter (2007) a modelleket vizsgálva arra a megállapításra jut, hogy a háromfaktoros Nelson-Siegel modell nemcsak a mintapontok illesztésénél pontos, hanem az előrejelző ereje is figyelemre méltó. E tulajdonságai alapján az új optimális

adósságportfólió modellben a Nelson-Siegel háromfaktoros modellt alkalmaztuk a forint, illetve a deviza hozamgörbe modellezésére.

Egy hozamgörbe-modell arbitrázsmentességi feltevése szavatolja, hogy a hozamok dinamikája minden időpontban konzisztens maradjon a hozamgörbe keresztmetszeti formájával. Azonban az arbitrázsmentességi feltétel jelentősen ronthatja az adott modell mintán belüli illeszkedését, mivel jelenleg csak fix belső paraméter esetre létezik a Nelson-Siegel modellnek arbitrázsmentes kiterjesztése (Christensen, Diebold és Rudebusch 2011). Ennek tudatában megkérdőjelezhető, hogy érdemes-e feltételezni az arbitrázsmentességet. Ugyanis egy jól viselkedő, az arbitrázsmentesnek feltételezett valóságot jól leíró modell explicit arbitrázsmentességi feltétel hiányában is közelítőleg arbitrázsmentes. Diebold és Rudebusch (2013) arra jutottak, hogy a dinamikus Nelson-Siegel arbitrázsmentességi feltételének hiánya nem jelent számottevő problémát, amellet, hogy a feltétel megléte nem feltétlenül javítja az előrejelzések erejét.

4.1.1 A Nelson-Siegel hozamgörbe modell

Nelson és Siegel 1987-ben mutatták be a róluk elnevezett hozamgörbe modellt, annak is háromfaktoros változatát (Nelson és Siegel 1987). Az elmúlt évtizedekben a modellnek számos bővített változata megjelent, azonban a háromfaktoros modell a mai napig széles körben alkalmazott. A modell a t időpontban vett τ lejáratú hozampontjaira a zéró-kupon hozamgörbét a következő alakban írja le:

$$y_t(\tau) = L_t + S_t \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} \right) + C_t \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} - e^{-\tau/\lambda_t} \right).$$

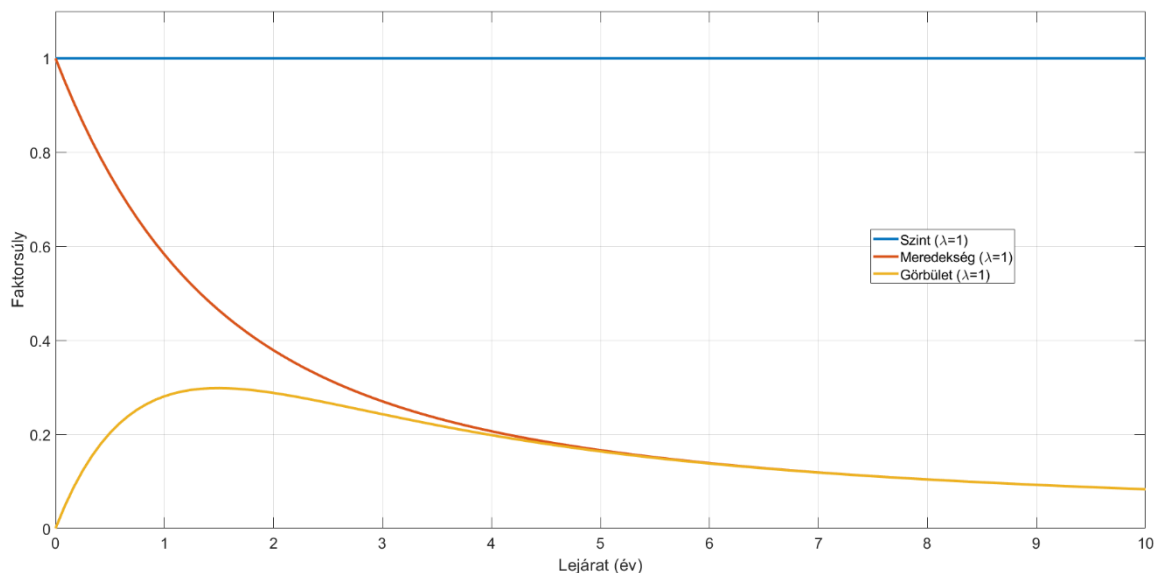
Az így felírt függvényformulának több előnyös tulajdonsága is akad. A paraméterek közgazdasági értelemben vett jó értelmezhetősége az egyik²:

- L_t interpretálható úgy, mint a hozamgörbe t pillanatában megfigyelhető szintje (*level*), amely a hosszú távú kamatláb paramétere, tekintve, hogy $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = L_t$.
- S_t a hozamgörbe t pillanatában megfigyelhető meredekségét (*slope*) adja meg, amelyből kiszámolhatók a rövid lejáratú hozamok a $L_t + S_t$ összefüggésből, ugyanis $\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = L_t + S_t$.
- C_t -t a hozamgörbe t pillanatában megfigyelhető görbületeként (*curvature*) szokták interpretálni.
- A λ_t paramétert exponenciális késleltetésnek nevezik, amelynek kis értékei gyors lecsengést eredményeznek, ezáltal a görbe jobban illeszkedik a hosszú lejáratokon, míg nagy értékei mellett a rövid lejáratokon jobb az illeszkedés. Emellett λ_t határozza meg a görbület faktor maximumának helyét is.

További előnye, hogy többféle hozamgörbe forma is generálható a függvényformula által, úgymint vízszintes, lineáris, vagy nem lineáris sebességgel növekvő vagy

² A faktorsúlyok alakulása a lejárat függvényében az 1. ábrán látható.

csökkenő, vagy akár U alakú is. A modellformula azonban takarékosnak is nevezhető, hiszen mindösszesen 3 faktort kell illeszteni, ez pedig meglehetősen sima függvényt eredményez, valamint megakadályozza a túlillesztést. Ezáltal megfelelő előrejelzések készítéséhez, emellett empirikusan jól követhető és megbízható illesztést ad.



1. ábra: A faktorsúlyok alakulása a lejárat függvényében ($\lambda = 1$)

A Nelson-Siegel modell paramétereit a simítatlan Fama-Bliss hozamokra illesztjük. A zéró-kupon hozamok előállítására nem paraméteres módszert ad a Fama-Bliss-féle (1987) eljárás.

4.1.2 A Fama-Bliss kötvényszelekciós algoritmus

A Fama-Bliss kötvényszelekciós algoritmus célja, hogy az aktuális hozamgörbe kellő simasági tulajdonsággal rendelkezzen, ezáltal az eljárás mögött nem valamilyen matematikai modell áll, hanem praktikus megfontolás az alkalmas hozamgörbe kialakítására. Az eljárás eredményeként a környezetétől eltérő állampapírok kikerülnek az elemzésből.

Az *eredeti algoritmus* négy lépésben szűri le azoknak az állampapíroknak a listáját, amelyekből később a hozamgörbe kiszámítására lehetőség nyílik. A szerzők által alkalmazott eljárásba csak teljeskörűen adózó, opciókat nem tartalmazó, nem visszahívható kötvények vonhatók be. Kikerülnek még a vizsgálatból azok a kötvények, melyek hátralévő futamideje 1 év alá csökkent, míg a leghosszabb lejáratú kötvény minden esetben bekerül az elemzésbe. Amennyiben több állampapír van azonos lejáratúval, akkor ezek mindig bekerülnek a vizsgálatba. Nem megengedett azonban, hogy egy héten belüli, de nem azonos lejáratúból több állampapír is legyen. Az eljárás lépései innentől röviden a következők:

Az első lépés a kiválasztásra megfontolandó állampapírok kezdeti halmazát hivatott kialakítani. A kiválasztás a lejáratig számított hozamokból (YTM) kalkulált átlagokon alapul. Adott állampapír bekerül az induló halmazba, ha a lejáratig hátralévő idő alapján öt megelőző 3 és utána következő 3 állampapír hozamából alkotott átlagok

között található az adott állampapír YTM értéke, vagy legalább a két átlaghoz közel van³. A leghosszabb lejáratú állampapír minden esetben bekerül a kezdeti halmazba.

A második lépésben a nagy ellentétes irányú ugrást okozó állampapírok kiszelektálásra kerülnek, egy ilyen éles „megfordulást” a szerzők úgy definiálnak, mint a diszkontgörbe megváltozásainak egy olyan sorozatát, ahol a megváltozás mértéke minden esetben nagyobb, mint 0,2%, ellentétes előjellel. Azonos lejáratú állampapírok esetén külön kell kezelni az egy időpontban lejáratú állampapírokat, vagyis mindkét állampapírra megvizsgálni, hogy egyik vagy másik bekerül-e egy ilyen sorozatba. A kitörlendő állampapírokat az ilyen sorozatok végéről indulva válogatjuk ki, így egy ilyen sorozatból kikerül a sorozatba bekerülő utolsó állampapírtól számított második, negyedik stb.⁴ A második lépés után bennmaradt állampapírok segítségével új diszkontgörbe számolható.

A harmadik lépésben az első és második lépések során kiszelektált állampapírokat vizsgálják meg, hogy visszakerülhetnek-e szelekciós halmazba. A bekerülési kritérium rendkívül hasonló az első lépésben alkalmazottéhoz, azzal a különbséggel, hogy a lejáratig számított hozam helyett ezúttal a diszkontgörbét kell vizsgálni. Az éppen vizsgált állampapírral azonos lejáratú állampapírok nem kerülhetnek be a mozgóátlagokba. A maximum megengedett eltérés a harmadik lépésben is ugyanakkora, mint az elsőben.

A negyedik lépésben a harmadik lépés után a kiválasztási halmazban lévő állampapírokra alkalmazzák még egyszer a második lépést.

A modellben *a konkrét megvalósítás során* csak diszkont kincstárjegyeket (DKJ) és fix kamatozású kötvényeket tekintünk, ami az eredeti Fama-Bliss szelekcióhoz képest szigorítás. Az első lépésben további preferenciákat is definiálnak a szerzők arra az esetre, ha egy héten belüli lejáratra több kötvény is lenne. A kötvények alacsony száma miatt azonban a magyar kötvények vizsgálata során nincs szükség további döntési kritériumokra (több kötvény azonos vagy egy héten belüli lejáratúval, mert a magyar állampapírpiacon ez nem jellemző). Emellett a 2. lépés futtatása után az általunk alkalmazott módszer némileg eltér az eredeti Fama-Bliss szelekciótól, ugyanis az eredeti módszerben javasolt diszkontgörbe helyett mi forwardgörbét számolunk, amely kevesebb számolást jelent, ezáltal rövidítve a futásidőt. A kötvényszelekciós algoritmusban a 2. és 3. lépés két simasági kritériumot definiál. Az általunk alkalmazott módozatban az első és második lépésben kikerült állampapírokat egyenként helyezzük vissza a kiválasztási halmazba, és minden visszahelyezést követően megvizsgáljuk, hogy az így kibővített kör megfelel-e az említett két simasági kritériumnak, és amennyiben igen, akkor az instrumentum visszakerül az elemzésbe⁵. A végeredmény

³ A szerzők itt maximum 0,2 százalékpontos eltérést engedélyeznek mindkét átlag irányában, 0,0%-os alsó korláttal.

⁴ Az első lépés átlagainak vizsgálata során a leghosszabb lejáratú állampapírral (az utolsó kivételével) kezdődik meg a kiszelektálás. Azaz a leghosszabb lejáratú állampapír kerül ki először a vizsgálatból, és ezt követően újra kiszámításra kerülnek az átlagok. A tapasztalatok azt mutatják, hogy a hosszabb lejáratú állampapíroktól indulva simább YTM görbe nyerhető, mint ha a rövid oldalról indulna az eljárás.

⁵ Megvan annak az elvi lehetősége, hogy a vizsgált állampapír visszakerül, azonban egy másik kikerül az elemzésből.

a ciklus végén egy olyan forward hozamgörbe, ami megfelel a bevezetett két kritériumnak.

Lényeges eltérés továbbá, hogy a tűréshatárt a nagy irányváltások esetén (a 2. pontban meghatározott feltétel) a lejáratok ismeretében értelmeztük, azaz egyharmad év alatt engedtünk meg maximum 0,2 százalékpontos irányváltásokat a forward görbében. Az első és utolsó megfigyelések esetén, ahol csak egy átlag számolható, ott a meglevő átlagtól való távolságot vizsgáljuk, itt a tűréshatár mértéke előre beépített szorzót kap, így nagyobb eltérést is megengedünk. Azt tapasztaltuk, hogy a tűréshatár növelése és a fent leírt eltérések az eredeti Fama-Bliss szelekciótól a magyar adatokra egy jól használható algoritmust adnak. Ez rendre kiveszi a nem jól „viselkedő” árjegyzéseket, miközben még mindig meghagy annyi állampapírt az elemzésben, amire egy hozamgörbe jól illeszthető.

4.1.3 Fama-Bliss hozamok

A módszer során az állampapírokat az adott napon lejáratuk szerint növekvő sorba kell rendezni, és a lejáratok közötti forward log-hozamok segítségével lehet felépíteni a hozamgörbét, a legrövidebb lejáratról indulva. A DKJ-khoz kiszámolható az adott napon az adott lejáratokhoz tartozó log-hozam az előző lejáratok közötti forward log-hozamok és piaci árjegyzések ismeretében. A nulla időpont és első lejárat közötti forward log-hozam lesz a log-hozam görbe első pontja az adott lejáraton. Ezt követően a kamatozó kötvények kuponjai – amennyiben azok az utolsó DKJ lejárat előtt esedékesek – beárazhatók az addigi lejáratok közötti forward log-hozamok lineáris interpolációjával. A kötvények lejáratához tartozó cashflow-jából, valamint a jegyzett árak ismeretében meghatározható az újabb lejáratához tartozó log-hozam. Amennyiben több kupon vagy tőketörlesztés is az eddigi leghosszabb lejárat utánra esik, akkor ezekre a pénzáramokra egy forward log-hozamot definiálunk a kötvény lejáratához tartozóan. Az így kapott hozamok a simítatlan Fama-Bliss log-hozamok, a becsült hozamgörbe pedig hiba nélkül árazza a mintában szereplő állampapírokat.

4.2 Modellillesztés

Az optimális adósságportfólió szerkezetek vizsgálatához az ÁKK által kezelt adósságportfólió valamennyi sajátosságát, valamint a vizsgált változók közötti összefüggéseket is realisztikusan megjelenítő modellre van szükség. Emellett elvárás, hogy a vizsgált paraméterek összességét a rendszer egységesen kezelje.

Ehhez egyrészt szükség van a forint instrumentumok árazására, amihez elengedhetetlen a forint hozamgörbe becslése. Az ÁKK által kibocsátott devizakötvények árazásához pedig szükség van egy, a magyar euró hozamgörbét leíró modellre is, amelyet Bebesi és Bebes (2016) munkája nyomán a kockázatmentes euró hozamgörbe és a magyar CDS felárak összegeként értelmezzünk. Az adósságportfólióban szereplő inflációhoz kötött forint és euró kötvények kamatának becsléséhez szükség van a hazai, valamint az eurózána inflációját leíró modellre,

valamint a deviza kitettség költségeinek forintban történő meghatározásához az EUR/HUF keresztárfolyam modellezésére is.

A fentiekben bemutatott paraméterek kezelésére egy olyan dinamikus Nelson-Siegel modellt alakítottunk ki, amely képes a paraméterek közötti összefüggések bemutatásán túl számszerűsíteni egy nagyobb gazdaság (EU) folyamatainak egy Magyarországhoz hasonló kis nyitott gazdaságba átgyűrűző hatásait is. A modellben így a két vizsgált hozamgörbe (forint, euró) kapcsolata aszimmetrikus, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy a forint hozamgörbe alakulása nincs hatással az euró hozamgörbe alakulására, míg fordítva igen.

A fent leírt elvárásoknak megfelelő modellnek egyszerre minimum 11 idősor mozgásának együttes vizsgálatára van szüksége, emellett az idősor viszonylagos rövide, valamint a gazdasági környezet változékonysága miatt nagyfokú rugalmasság is elvárt a modellel szemben. Jelenlegi ismereteink szerint egy ilyen komplexitású modell illesztésére a legkorszerűbb módszert a bayesi statisztikai eszközök, valamint a Kálmán-szűrő (1960) Hamilton (1989) és Kim (1999) által javasolt változatai jelentik.

A fenti elvárásokkal, valamint a Nelson-Siegel modellformulával összhangban az alábbi hozamgörbe egyenletekkel írhatóak le a forint ($y_{t,M}(\tau)$), euró ($y_{t,E}(\tau)$) valamint a magyar CDS ($y_{t,CDS}(\tau)$) görbe τ lejáratú pontjai:

$$y_{t,M}(\tau) = L_{t,M} + S_{t,M} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,M}}}{\tau/\lambda_{t,M}} \right) + C_{t,M} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,M}}}{\tau/\lambda_{t,M}} - e^{-\tau/\lambda_{t,M}} \right) + \varepsilon_{t,M},$$

$$y_{t,E}(\tau) = L_{t,E} + S_{t,E} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,E}}}{\tau/\lambda_{t,E}} \right) + C_{t,E} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,E}}}{\tau/\lambda_{t,E}} - e^{-\tau/\lambda_{t,E}} \right) + \varepsilon_{t,E},$$

$$\log(y_{t,CDS}(\tau)) = L_{t,CDS} + S_{t,CDS} \left(\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_{t,CDS}}}{\tau/\lambda_{t,CDS}} \right) + \varepsilon_{t,CDS},$$

ahol $\varepsilon_{t,M} \sim N(0, \sigma_{t,M}^2)$, $\varepsilon_{t,E} \sim N(0, \sigma_{t,E}^2)$, valamint $\varepsilon_{t,CDS} \sim N(0, \sigma_{t,CDS}^2)$, $t = 1, \dots, n$. A CDS görbe esetén a felárak logaritmusát modellezzük a negatív felárak elkerülése érdekében.

Nyholm (2015) munkája nyomán a Nelson-Siegel szint és meredekség faktorait elforgatjuk az euró és forint hozamgörbe esetén, mégpedig úgy, hogy a hozamgörbe szint paramétere a rövid hozamok szintjét jellemezze, ezáltal ugyanis egy a hozamgörbe szempontjából kényelmesebb, átláthatóbb faktorstruktúrát kapunk. (A CDS görbe esetén erre nincs szükség, ugyanis a legtöbb helyen az 5 éves CDS felár az elfogadott benchmark, miáltal a hosszabb futamidejű CDS értékek illesztése indokolt a modell szempontjából.) Legyen a forgatási mátrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor az első két faktort az E_t mátrixba rendezve

$$E_t(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} \end{bmatrix},$$

ezt elforgatva pedig

$$E_t(\tau)A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \frac{1 - e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} \end{bmatrix},$$

faktorok adódnak. A továbbiakban tehát a szint faktor a rövid hozamokra utal, míg a szint és a meredekség faktorok összege a hosszú hozamokat modellezi. E függvényforma lehetővé teszi, hogy a meredekség faktor együttthatói a lejáratban növekedők legyenek, ami egy közgazdaságilag jobban értelmezhető faktorstruktúrát eredményez. A görbület faktor változatlan marad.

A modellbe épített makro változókat mérési hibával figyeljük meg:

$$mac_{t,j} = \widehat{mac}_{t,j} + \varepsilon_{mac_j},$$

ahol $\varepsilon_{mac_j} \sim N(0, \sigma_{j,mac}^2)$, $j \in \{cpi_{hun}, cpi_{eu}, eur/huf\}$, vagyis a magyar és eurózóna infláció, valamint az EUR/HUF keresztárfolyam. A fenti függvényformulák segítségével egy állapottér modell illeszthető a rendszerre. Az alábbiakban az állapottér modelleket, valamint a vizsgálatukhoz használható szűrőket mutatjuk be általánosságban Kim és Nelson (1999) munkája szerint, majd pedig az általunk definiált rendszer bemutatása következik.

4.2.1 Állapottér modell

Az állapottér modellek jól használhatók olyan dinamikus, lineáris rendszerek leírására, amelyeket közvetlenül nem megfigyelhető paraméterek hajtanak meg. Egy állapottér modellt alapvetően két egyenlettel lehet felírni: az egyik a mérési egyenlet (measurement equation), amely a megfigyelt adatok, illetve a közvetlenül nem megfigyelhető faktorok közötti kapcsolatot írja le, míg az átmenet- vagy állapotegyenlet (transition vagy state equation) a faktorok dinamikáját írja le, legtöbbször egy elsőrendű differenciálegyenlet formájában. A faktorok jelentik azt a legkisebb paraméterhalmazt, amellyel a rendszer leírható bármely adott pillanatban.

Vegyünk egy általános állapottér modellt a következő felírásban:

$$\begin{aligned} Y_t &= H_t X_t + \theta_t, \\ X_t &= \mu + F X_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \begin{pmatrix} \theta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} &\sim N\left(0, \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Y_t egy $m \times 1$ vektor, amely a t időpontban megfigyelt változókat tartalmazza. X_t egy $f_n \times 1$ vektor, amely a közvetlenül nem megfigyelhető változókat (faktorokat) tartalmazza. Az m jelenti a megfigyelt idősorok számát, míg n az egyes idősorok hosszát, f_n pedig a rendszert leíró faktorok számát (f_n nem függ az idősor hosszától!). H_t egy $m \times f_n$ méretű mátrix, amely az adatok és faktorok közötti kapcsolatot írja le

(ez általában időfüggetlen változó, azonban a későbbiekben a modell sajátosságai miatt időfüggővé szükséges tenni, ezért a jobb érthetőség kedvéért itt is így definiáljuk). F ($f_n \times f_n$) a faktorok fejlődését leíró átmenetmátrix, míg μ ($f_n \times 1$) a faktorok drift tényezőit tartalmazó vektor. R és Q a megfelelő méretű kovariancia mátrixok. A dinamikus rendszerek ilyen formában történő felírására alkalmazható algoritmus a Kálmán-szűrő.

4.2.2 Kálmán-szűrő

Az általános állapotter modellek meg nem figyelhető paramétereinek becslésére használható módszer a Kálmán-szűrő. A Kálmán-szűrő egy rekurzív eljárás, amely a t időpontig rendelkezésre álló információ alapján ad becslést t időpontban a vizsgált paraméterekhez (ez a fenti felírásban az X_t paramétervektor). A Kálmán-szűrő lényegében olyan algoritmus, ahol a rendszer lineáris vetületének szekvenciális frissítésével érünk el jobb illeszkedést.

Az eljárás során így minden időpontban optimális becslés kapható X_t -re vonatkozóan, feltételezve, hogy a μ , F , R valamint Q paraméterek értéke ismert. A megfelelő információs térben a módszer két szakaszra bontható, az alapvető szűrőre (ezt hívják Kálmán-szűrőnek), valamint a simításra (Kálmán-simítás), amelyek során a legkisebb négyzetes hibát adó becslés kapható. Az alapvető szűrő alkalmazása során X_t a t -ig rendelkezésre álló információ alapján, míg a simítás során a teljes minta alapján kerül becslésre.

Az algoritmus – amennyiben H_t rendelkezésre áll a t . időpont elején, valamint Y_t a t . időpont végén – felbontható egy úgynevezett predikciós vagy előrejelző, illetve frissítési vagy korrekciós fázisokra. A predikciós fázis során a t . időpontban számolunk egy optimális becslést X_t -re az addig rendelkezésre álló információk alapján, míg a frissítési fázis a t . időpont végén történik, amikor Y_t láthatóvá válik, így pedig az előrejelzési hiba kiszámítható lesz, amely segítségével egy jobb becslés adható X_t -re. A fenti jelölésekkel az algoritmus a következőképpen néz ki:

- Predikciós fázis

$$X_{t|t-1} = \mu + F X_{t-1|t-1},$$

$$P_{t|t-1} = F P_{t-1|t-1} F' + Q,$$

$$\eta_{t|t-1} = Y_t - H_t X_{t|t-1},$$

$$f_{t|t-1} = H_t P_{t|t-1} H_t' + R$$

- Frissítési fázis

$$X_{t|t} = X_{t|t-1} + (P_{t|t-1} H_t' f_{t|t-1}^{-1}) \eta_{t|t-1},$$

$$P_{t|t} = (I_{f_n} - P_{t|t-1} H_t' f_{t|t-1}^{-1} H_t) P_{t|t-1},$$

ahol I_{f_n} egy ($f_n \times f_n$) méretű egységmátrix. A fentiek során az alábbi jelöléseket használtuk: legyen $\mathcal{F}_t$ a t -ig rendelkezésre álló információs halmaz, ekkor $X_{t|t-1} = E(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$, vagyis X_t feltételes várható értéke a $t - 1$ -ig rendelkezésre álló információk

alapján. $P_{t|t-1} = E\left((X_t - X_{t|t-1})(X_t - X_{t|t-1})'\right)$ vagyis X_t feltételes kovariancia mátrixa a $t - 1$ -ig rendelkezésre álló adatok alapján. $X_{t|t} = E(X_t|\mathcal{F}_t)$, valamint $P_{t|t} = E\left((X_t - X_{t|t})(X_t - X_{t|t})'\right)$ ugyanezek a t -ig rendelkezésre álló információk alapján. $Y_{t|t-1}$ a $t - 1$ -ig rendelkezésre álló információk alapján kapott előrejelzés, míg $\eta_{t|t-1} = Y_t - Y_{t|t-1}$ az előrejelzési hiba, $f_{t|t-1} = E(\eta_{t|t-1}^2)$ pedig az előrejelzési hiba feltételes varianciája. Az előrejelzési hibában található új információ súlyát az úgynevezett Kálmán-nyereségnek nevezett változó határozza meg, amelyet a továbbiakban a $K_t = P_{t|t-1}H_t'f_{t|t-1}^{-1}$ jelöléssel jelzünk. Látható, hogy a Kálmán-szűrő fő ereje az előrejelzés további javítása az előrejelzési hibában rejlő többletinformáció által.

A simítási szakasz a szűrés lefuttatása után végezhető el. Míg a szűrés eljáráshoz alkalmas kezdőértékek választása mellett a $t = 1$ -ből halad az utolsó időpontig ($t = n$), addig a simítás a szűrés szakasz során kapott $X_{n|n}$ valamint $P_{n|n}$ becsléseket kiindulópontként véve a $t = n - 1, \dots, 1$ időpontokon halad végig. Az alábbi egyenleteket használva kerülnek meghatározásra a simított paraméterek:

$$\begin{aligned} X_{t|n} &= X_{t|t} + P_{t|t}F'P_{t+1|t}^{-1}(X_{t+1|n} - FX_{t|t} - \mu), \\ P_{t|n} &= P_{t|t} + P_{t|t}F'P_{t+1|t}^{-1}(P_{t+1|n} - P_{t+1|t})P_{t+1|t}^{-1}FP_{t|t}. \end{aligned}$$

A simítás során további pontosság érhető el, hiszen felhasználjuk a teljes mintában rejlő információt a becslésünkhöz.

A fentiekben feltételeztük, hogy a μ , F , R valamint Q paraméterek értékei ismertek. Ez azonban a gyakorlatban meglehetősen ritkán teljesül, ezért a Kálmán-szűrő működéséhez az ismeretlen paramétereket szükséges megbecsülni. A becsült paramétereket aztán ismertnek feltételezve már futtatható az algoritmus a $t = 1, \dots, n$ időpontokra. Szükséges továbbá alkalmas kezdőértékek választása is az eljárás indításához.

Alkalmas kezdőérték választás lehet az X_t folyamat feltétel nélküli várható (egyensúlyi, vagy permanens) értéke és kovariancia mátrixa. Amennyiben az X_t folyamat stacioner, akkor a feltétel nélküli várható értéke az alábbiak szerint vezethető le:

$$E(X_t) = \mu + FE(X_{t-1}) + E(\varepsilon_t),$$

így

$$X_{0|0} = \mu + FX_{0|0}$$

amelyből

$$X_{0|0} = (I_{f_n} - F)^{-1}\mu,$$

ahol I_{f_n} az $f_n \times f_n$ méretű egységmátrix. A stacioner X_t folyamat feltétel nélküli kovariancia mátrixa pedig a következőképpen vezethető le:

$$\begin{aligned} Cov(X_t) &= FCov(X_{t-1})F' + Cov(\varepsilon_t), \\ P_{0|0} &= FP_{0|0}F' + Q, \end{aligned}$$

$$\text{vec}(P_{0|0}) = \text{vec}(FP_{0|0}F') + \text{vec}(Q) = (F \otimes F)\text{vec}(P_{0|0}) + \text{vec}(Q),$$

$$\text{vec}(P_{0|0}) = (I_{f_n^2} - F \otimes F)^{-1} \text{vec}(Q),$$

ahol $\otimes$ a Kronecker szorzat, míg $\text{vec}(A)$ az A mátrix vektorizáltja, vagyis az $A: k \times k$ mátrixból készít $k^2 \times 1$ méretű vektort az oszlopok egymás alá rendezésével. A $\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A)\text{vec}(B)$ összefüggés ismert a matematikából.

4.2.3 Hamilton-szűrő

A lineáris modelleknek számos előnye van, többek között könnyen átláthatók, könnyebben becsülhetők, valamint előrejelezhetők, emellett közgazdaságilag is könnyebb interpretálni egy lineáris rendszert. Ezzel szemben a nemlineáris rendszerek esetén sokszor nehéz azokat interpretálni, valamint az előrejelzéshez a változók feltételezett eloszlásainak magasabb rendű momentumainak megadása is okozhat komolyabb problémát. Azonban a megfigyelt adatok közötti összefüggések általában jóval bonyolultabbak annál, hogy a rendszer leírása az egyszerű lineáris kereteken belül megoldható legyen. Emellett az is megállapítható, hogy az adatgeneráló folyamat paraméterei időben változhatnak (pl. strukturális törések miatt). A lineáris modellek egyértelmű előnyei miatt sokszor mégis ésszerűbb megmaradni a linearitás adta kereteken belül.

Az időben változó paraméterek vizsgálatára megadható véges sok állapot (rezsim), amelyek között az átmenetvalószínűségek segítségével minden időpontra becslés adható. Az ilyen típusú modelleket hívjuk Markov rezsimváltó modelleknek, amelyeket Hamilton (1989) vizsgált először közgazdasági problémákban. Komoly jelentőségű munkája nyomán az ökonómia területén mára elfogadott tény, hogy az egyes fontosabb makro változók (pl. hozamszintek, infláció) viselkedése jelentősen eltér konjunktúra és recesszió idején. Az ilyen üzleti ciklus (business cycle) modellek rezsimenként eltérő adatgeneráló folyamattal rendelkeznek. Az alábbiakban Hamilton állapotfüggő Markov rezsimváltó modelljét mutatjuk be egy egyszerűbb példán, ahol az állapot és a megfigyelési folyamat azonos, míg a cél a rendszer paraméterei mellett a gazdasági állapotot leíró látens folyamat becslése.

Vegyük a következő M állapotú elsőrendű Markov rezsimváltó modellt:

$$Y_t = \mu_{S_t} + \phi(Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2),$$

$$\mathbf{P}(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M,$$

$$\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1,$$

$$\mu_{S_t} = \sum_{i=1}^M \mu_i S_{it},$$

$$\sigma_{S_t}^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 S_{it},$$

ahol $S_{kt} = \begin{cases} 1, & \text{ha } S_t = k \\ 0, & \text{ha } S_t \neq k \end{cases}$ p_{ij} jelenti az i állapotból a j állapotba való áttérés valószínűségét, amely jelen modellfelírás szerint független az időváltozótól. Az S_t változó egy látens faktor amely minden időszakra megadja, hogy milyen állapotban van a gazdaság. $S_t = k$ ($k \in \{1, \dots, M\}$) azt jelenti, hogy a gazdaság a k . rezsimben van. Ahhoz, hogy egy ilyen formában felírt rendszer paramétereit megkapjuk, maximum likelihood becslést (MLE) alkalmazhatunk. Amennyiben S_t ismert volna minden $t = 1, \dots, n$ esetén, akkor Y_t feltételes sűrűségfüggvénye az $\mathcal{F}_{t-1}$ információhalmaz ismeretében:

$$f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t, S_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{S_t}^2}} e^{-\frac{((Y_t - \mu_{S_t}) - \phi(Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}))^2}{2\sigma_{S_t}^2}}.$$

Így a fenti Markov rendszer paramétereinek log-likelihood becslését a

$$\log(L_1) = \sum_{t=1}^n \log(f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t, S_{t-1}))$$

adná, ahol L_1 jelöli a likelihood függvényt abba az esetben, amikor S_t ismert minden $t = 1, \dots, n$ esetén.

Azonban mivel S_t, S_{t-1} közvetlenül nem megfigyelhető paraméterek, így $f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ megoldásához (Y_t feltételes sűrűségfüggvénye a $\mathcal{F}_{t-1}$ ismeretében) az alábbi két lépéssel juthatunk el. Első lépésben felírjuk Y_t, S_t valamint S_{t-1} együttes sűrűségfüggvényét $\mathcal{F}_{t-1}$ ismeretében

$$f(Y_t, S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t, S_{t-1}) p(S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}),$$

ahol $p(S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})$ jelöli az S_t valamint S_{t-1} együttes sűrűségfüggvényét $\mathcal{F}_{t-1}$ ismeretében ($p(S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})$). A második lépésben pedig kiintegráljuk S_t -t és S_{t-1} -t mégpedig úgy, hogy szummázunk S_t és S_{t-1} összes lehetséges értékére:

$$\begin{aligned} f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{S_t=1}^M \sum_{S_{t-1}=1}^M f(Y_t, S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sum_{S_t=1}^M \sum_{S_{t-1}=1}^M f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t, S_{t-1}) p(S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}). \end{aligned}$$

Ebben az esetben, ha L_2 jelöli a likelihood függvényt, akkor a log-likelihood függvény a következőképpen alakul:

$$\log(L_2) = \sum_{t=1}^n \log \left(\sum_{S_t=1}^M \sum_{S_{t-1}=1}^M f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t, S_{t-1}) p(S_t, S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \right).$$

Az $f(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$ feltételes sűrűségfüggvény meghatározásához a teljes időhorizonton ($t = 1, \dots, n$) a fentiek ismeretében már csak a $p(S_t, S_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})$ feltételes valószínűség meghatározására van szükség, ehhez használható a Hamilton-szűrő (Hamilton 1989, 1994; Kim és Nelson 1999). A rekurzív eljárás alapuló algoritmus az alábbi két lépés szerint működik.

Alkalmas kezdőértékek mellett az algoritmus az első lépésben a $p(S_t, S_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})$ értéket határozza meg, feltételezve, hogy a t . időpont elején a $\mathbf{P}(S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1})$ ismert minden $i = 1, \dots, M$ esetén. Ekkor minden $i, j = 1, \dots, M$ esetén

$$p(S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{P}(S_t = j|S_{t-1} = i)p(S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1})$$

kiszámolható.

A második lépésben, amikor az Y_t a t . időpont végén ismertté válik, akkor a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_t) &= \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1}, Y_t) = \frac{f(Y_t, S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1})}{f(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})} \\ &= \frac{f(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i)\mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1})}{\sum_{S_t=1}^M \sum_{S_{t-1}=1}^M f(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i)\mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_{t-1})} \end{aligned}$$

formula segítségével megadható

$$\mathbf{P}(S_t = j|\mathcal{F}_t) = \sum_{S_{t-1}=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i|\mathcal{F}_t).$$

Így a fenti két lépést iterálva $t = 1, \dots, n$ megkapható a $\log(L_2)$.

A simított valószínűségekért az algoritmust követően itt is elvégezhető a teljes információ ($\mathcal{F}_n$) alapuló simítása, vagyis a $p(S_t = j|\mathcal{F}_n)$ értékeinek kiszámolása minden t időpont esetére. A Hamilton-szűrő végén az n . időpontban kapott valószínűségből, $\mathbf{P}(S_n|\mathcal{F}_n)$ értékét kezdőértéknek véve, az eljárás irányát megfordítva elvégezhető a simítás az alábbi két egyenlet segítségével:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i|\mathcal{F}_n) &= \mathbf{P}(S_{t+1} = i|\mathcal{F}_n)\mathbf{P}(S_t = j|\mathcal{F}_n, S_{t+1} = i) \\ &= \mathbf{P}(S_{t+1} = i|\mathcal{F}_n)\mathbf{P}(S_t = j|\mathcal{F}_t, S_{t+1} = i) \\ &= \frac{\mathbf{P}(S_{t+1} = i|\mathcal{F}_n)\mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i|\mathcal{F}_t)}{\mathbf{P}(S_{t+1} = i|\mathcal{F}_t)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(S_{t+1} = i|\mathcal{F}_n)\mathbf{P}(S_t = j|\mathcal{F}_t)\mathbf{P}(S_{t+1} = i|S_t = j)}{\mathbf{P}(S_{t+1} = i|\mathcal{F}_t)} \end{aligned}$$

és

$$\mathbf{P}(S_t = j|\mathcal{F}_n) = \sum_{S_{t+1}=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i|\mathcal{F}_n).$$

A Hamilton-szűrő indításához szükséges még $\mathbf{P}(S_0)$, vagyis a kiinduló állapotvalószínűségek meghatározása. $\mathbf{P}(S_0)$ kezdőértékeként érdemes az egyensúlyi állapotvalószínűségek vektorát választani. Legyen ez π_t , ekkor

$$\pi_t = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(S_t = 1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(S_t = M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1t} \\ \vdots \\ \pi_{Mt} \end{bmatrix}.$$

Valamint legyen az átmenetvalószínűségek mátrixa a következő:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix},$$

ahol p_{ij} az i állapotból a j állapotba való átmenet valószínűségét értjük. Jelölje továbbá

$$\mathbf{1}_M = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{0}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

a csupa egyesekből vagy nullákból álló $M \times 1$ vektorokat, valamint az $M \times M$ egységmátrixot. Ekkor $\mathbf{P}\mathbf{1}_M = \mathbf{1}_M$, illetve $\pi_t' \mathbf{1}_M = 1$. Továbbá az egyensúlyi állapotvalószínűségek definíciója alapján tudjuk, hogy $\pi_{t+1} = \pi_t$ és $\pi_{t+1} = \mathbf{P}'\pi_t$ emiatt pedig a $\pi_t = \mathbf{P}'\pi_t \Rightarrow (\mathbf{I}_M - \mathbf{P}')\pi_t = \mathbf{0}_M$. Ekkor felírható a következő összefüggés:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M - \mathbf{P}' \\ \mathbf{1}_M' \end{bmatrix} \pi_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis az $A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M - \mathbf{P}' \\ \mathbf{1}_M' \end{bmatrix}$ jelölést bevezetve

$$A\pi_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_t = (A'A)^{-1}A' \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ 1 \end{bmatrix},$$

így az egyensúlyi állapotvalószínűségek értékét az $(A'A)^{-1}A'$ mátrix utolsó oszlopa adja.

Fontos lehet egy rezsinváltó modell esetén, hogy az egyes rezsimekben várhatóan mennyi időt töltünk. Ennek megállapításához nyújt információt a $\mathbf{P}$ átmenetvalószínűség mátrix főátlója. Jelölje D_j azt az időt, amit a tetszőleges j rezsimben töltünk. Ekkor a j rezsimben töltött idő várható értéke

$$\begin{aligned} E(D_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{P}(D_j = k) \\ &= \mathbf{P}(S_{t+1} \neq j | S_t = j) + 2\mathbf{P}(S_{t+1} = j, S_{t+2} \neq j | S_t = j) + \cdots \\ &\quad + l\mathbf{P}(S_{t+1} = j, \dots, S_{t+l-1} = j, S_{t+l} \neq j | S_t = j) + \cdots \\ &= (1 - p_{jj}) + 2p_{jj}(1 - p_{jj}) + 3p_{jj}^2(1 - p_{jj}) + \cdots = \frac{1}{1 - p_{jj}}. \end{aligned}$$

4.2.4 Kim-szűrő

A Kim-szűrő (1994) a fent ismertetett Hamilton-féle Markov rezsinváltó modellek kiterjesztése általános állapotter modell formában. Kim a Kálmán-szűrő során bemutatott szűrő és simítási algoritmusokat terjeszti ki Markov rezsinváltó állapotter modellek esetére. A rendszer állapotter felírása egy rugalmas rendszert ad, a Kim-szűrő pedig ezáltal számos új modellosztály számára nyújthat megoldást.

Az alábbiakban a Kim-szűrő részletes bemutatása Kim és Nelson (1999) munkájára épül. A rendszer specifikációjához vegyük egy dinamikus rendszer következő állapotter reprezentációját, amely rezsimváltó mind a mérési, mind az átmenetegyenletében.

$$\begin{aligned} Y_t &= H_{S_t} X_t + \theta_t, \\ X_t &= \mu_{S_t} + F_{S_t} X_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \begin{pmatrix} \theta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} &\sim N \left(0, \begin{pmatrix} R_{S_t} & 0 \\ 0 & Q_{S_t} \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

ahol a mérési egyenlet írja le megfigyelt változók ($Y_t; m \times 1$) dinamikáját a faktorok ($X_t; f_n \times 1$) függvényében, és H_{S_t} $m \times f_n$ dimenziójú mátrix. Az átmenetegyenlet a közvetlenül meg nem figyelhető faktorok dinamikáját írja le egy elsőrendű differenciálegyenlet formájában, ahol az F_{S_t} $f_n \times f_n$ dimenziójú átmenetmátrix (i, j) . eleme az X_{t-1} j . paraméterének az X_t i . paraméterére vetített hatását jeleníti meg, míg a $f_n \times 1$ dimenziójú ε_t az X_t -re ható sokkokat. Így R_{S_t} $m \times m$ és Q_{S_t} $f_n \times f_n$ a megfelelő kovarianciamátrixok.

A H_{S_t} , μ_{S_t} , F_{S_t} , R_{S_t} , Q_{S_t} paraméterekről elmondható, hogy függenek egy közvetlenül nem megfigyelhető, M lehetséges állapotú, elsőrendű Markov rezsimváltó paramétertől, S_t -től ($S_t \in \{1, 2, \dots, M\}$), amelynek átmenetvalószínűségeit a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}$$

mátrix adja meg, ahol a $p_{ij} = \mathbf{P}(S_t = j | S_{t-1} = i)$ az i . rezsimből a j . rezsimbe való átlépés valószínűségét adja meg, tehát $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1$ minden i -re. A vizsgált S_t -től függő paramétereket úgy érdemes elképzelni, hogy bármely paraméter (i, j) . elemének értékét (amennyiben ismert) az S_t állapotváltozó szerint a következő egyenlet írja le:

$$f_{i,j,S_t}^k = f_{i,j,1}^k S_{1t} + \cdots + f_{i,j,M}^k S_{Mt},$$

ahol a k index jelöli a választott paramétert ($k \in \{H, \mu, F, R, Q\}$), míg $S_{lt} = \begin{cases} 1, & \text{ha } S_t = l \\ 0, & \text{ha } S_t \neq l \end{cases}$ ahol $l \in \{1, 2, \dots, M\}$.

A rendszer paramétereinek becsléséhez először tegyük fel, hogy ezek a paraméterek ismertek. Jelölje $\mathcal{F}_{t-1}$ továbbra is a $t-1$. időpontig rendelkezésre álló információs halmazt. Ekkor a Kálmán-szűrő szerint az a feladat, hogy a rendelkezésre álló információk alapján előrejelezzük a következő időpontban X_t értékét, amely azonban most már függ az S_t állapotváltozótól is, így jelölje

$$X_{t|t-1}^{(i,j)} = E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i)$$

X_t feltételes várható értékét az $\mathcal{F}_{t-1}$ információs halmaz, valamint $S_t = j$, $S_{t-1} = i$ változók ismeretében, illetve jelölje az előrejelzés feltételes kovarianciamátrixát a

$$P_{t|t-1}^{(i,j)} = E \left((X_t - X_{t|t-1}^{(i,j)}) (X_t - X_{t|t-1}^{(i,j)})' \middle| \mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i \right).$$

Ekkor a fentiek során definiált rendszerre a Kálmán-szűrőt a következő hét egyenlet definiálja, ahol az első négy a predikciós, az utolsó kettő a korrekciós fázist jelenti, míg az ötödik a Kálmán-nyereség a t . időpontban $S_{t-1} = i$, $S_t = j$ állapotok ismeretében:

$$\begin{aligned} X_{t|t-1}^{(i,j)} &= \mu_j + F_j X_{t-1|t-1}^{(i)}, \\ P_{t|t-1}^{(i,j)} &= F_j P_{t-1|t-1}^{(i)} F_j' + Q_j, \\ \eta_{t|t-1}^{(i,j)} &= Y_t - H_j X_{t|t-1}^{(i,j)}, \\ f_{t|t-1}^{(i,j)} &= H_j P_{t|t-1}^{(i,j)} H_j' + R_j, \\ K_t^{(i,j)} &= P_{t|t-1}^{(i,j)} H_j' \left(f_{t|t-1}^{(i,j)} \right)^{-1}, \\ X_{t|t}^{(i,j)} &= X_{t|t-1}^{(i,j)} + K_t^{(i,j)} \eta_{t|t-1}^{(i,j)}, \\ P_{t|t}^{(i,j)} &= \left(I_{f_n} - K_t^{(i,j)} H_j \right) P_{t|t-1}^{(i,j)}. \end{aligned}$$

Az $X_{t|t}^{(i)} = E(X_t | \mathcal{F}_t, S_t = i)$ jelenti X_t feltételes várható értékét $\mathcal{F}_t$ és $S_t = i$ ismeretében, míg a $P_{t|t}^{(i)} = E \left((X_t - X_{t|t}^{(i)}) (X_t - X_{t|t}^{(i)})' \middle| \mathcal{F}_t, S_t = i \right)$ jelöli X_t feltételes kovarianciamátrixát. Az $\eta_{t|t-1}^{(i,j)}$ az Y_t feltételes előrejelzési hibája a $t - 1$. időpontig rendelkezésre álló információ, valamint $S_{t-1} = i$, $S_t = j$ állapotok ismeretében, $f_{t|t-1}^{(i,j)}$ pedig $\eta_{t|t-1}^{(i,j)}$ feltételes kovarianciamátrixa.

A fenti szűrőben azonban minden lépés során egy M -szeres növekmény látható a vizsgálandó esetek számában, így könnyen belátható, hogy az algoritmus ilyen formában nem használható, mivel már a 10. időpontban több mint ezerrel több a vizsgálandó esetek száma. Kim a probléma feloldására az $X_{t|t}^{(i,j)}$ és $P_{t|t}^{(i,j)}$ M^2 számú posteriort a megfelelő módon „összerogyasztja” (collapse) az $X_{t|t}^{(j)}$ és $P_{t|t}^{(j)}$ M számúra. Ehhez az alábbi közelítéseket alkalmazza:

$$\begin{aligned} X_{t|t}^{(j)} &= \frac{\sum_{i=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t) X_{t|t}^{(i,j)}}{\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_t)}, \\ P_{t|t}^{(j)} &= \frac{\sum_{i=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t) \left(P_{t|t}^{(i,j)} + \left(X_{t|t}^{(j)} - X_{t|t}^{(i,j)} \right) \left(X_{t|t}^{(j)} - X_{t|t}^{(i,j)} \right)' \right)}{\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_t)}. \end{aligned}$$

A közelítéseket használva jelentősen csökkenthető a fenti algoritmus számításigénye, kezelhetővé válik a probléma. Az algoritmus használhatóvá tételéhez már csak a megfelelő valószínűségek becslésére van szükség, ehhez pedig a Hamilton-szűrő alkalmazható a következő három lépés szerint.

Első lépésben a t . időpont kezdetén $\mathbf{P}(S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})$ ismeretében minden $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ a

$$\mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1}) = p_{ij} \mathbf{P}(S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})$$

feltételes valószínűség kiszámolható minden i -re a $p_{ij} = \mathbf{P}(S_t = j | S_{t-1} = i)$ átmenetvalószínűség ismeretében.

Második lépésben az $f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ feltételes sűrűségfüggvényt a

$$\begin{aligned} f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M f(Y_t, S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i) \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1}) \end{aligned}$$

formulával kaphatjuk meg, ahol $f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \left| f_{t|t-1}^{(i,j)} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (\eta_{t|t-1}^{(i,j)})' (f_{t|t-1}^{(i,j)})^{-1} \eta_{t|t-1}^{(i,j)}}$ feltételes sűrűségfüggvény az előrejelzés hibájából és annak kovarianciájából adódik ($i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$).

A harmadik lépésben a t . időpont végén, amikor Y_t láthatóvá válik, frissíthető a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t) &= \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1}, Y_t) = \frac{f(S_t = j, S_{t-1} = i, Y_t | \mathcal{F}_{t-1})}{f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})} \\ &= \frac{f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i) \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_{t-1})}{f(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})} \end{aligned}$$

feltételes valószínűség minden $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ esetre, illetve

$$\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_t) = \sum_{i=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{F}_t)$$

megkapható.

Összefoglalva a Kim-szűrő a Kálmán-szűrő kiterjesztése a Markov rezsimváltó állapotter modellek esetére Hamilton-szűrővel. Az algoritmus tehát az alábbi három lépésből áll:

1. Kezdetben a Kálmán-szűrőt futtatjuk minden lehetséges $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ esetre.
2. Második lépésben a Hamilton-szűrőt futtatjuk, hogy megkapjuk a megfelelő feltételes valószínűségeket.
3. Harmadik lépésben az így kapott M^2 posteriort „rogyasztjuk” össze M posteriorrá, felhasználva a 2. lépésben kapott valószínűségeket.

Fontos elmondani, hogy a fenti MLE becslés csak egy időpontot tekint vissza az időben, vagyis az X_t eloszlását csak az $\mathcal{F}_{t-1}$, $S_t = j$ valamint $S_{t-1} = i$ ismeretében becsli ($\forall i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$). Pontosabb becsléshez felhasználható S_{t-2} ismerete is, azonban ez jelentős számítási költséggel jár (hiszen itt M^2 posterior helyett már M^3 posteriorunk van, tehát a collapsing eredményeként ezt csak M^2 posteriorra tudjuk redukálni).

Az eljárás második fázisában a Kálmán-simítás során az alábbi két lépést iteráljuk, hogy az X_t simított becslését megkapjuk:

$$X_{t|n}^{(j,i)} = X_{t|t}^j + \hat{P}_t^{(j,i)} (X_{t+1|n}^i - X_{t+1|t}^{(j,i)}),$$

$$P_{t|n}^{(j,i)} = P_{t|t}^j + \hat{P}_t^{(j,i)} \left(P_{t+1|n}^i - P_{t+1|t}^{(j,i)} \right) \left(\hat{P}_t^{(j,i)} \right)',$$

ahol $S_t = j$, míg $S_{t+1} = i$. $\hat{P}_t^{(j,i)} = P_{t|t}^j F_k' \left(P_{t+1|t}^{(j,i)} \right)^{-1}$, illetve $X_{t|n}^{(j,i)} = E(X_t | \mathcal{F}_n, S_t = j, S_{t+1} = i)$, vagyis X_t teljes információn alapuló feltételes várható értéke, míg $P_{t|n}^{(j,i)} = E \left(\left(X_t - X_{t|n}^{(j,i)} \right) \left(X_t - X_{t|n}^{(j,i)} \right)' \middle| \mathcal{F}_n, S_t = j, S_{t+1} = i \right)$.

Ezt figyelembe véve az eljárás során a simítással a teljes információ ismeretében az alábbi négy lépést követve kaphatunk S_t és X_t -re becsléseket.

1. Első lépésben a Kálmán-szűrő Kim féle kiterjesztését futtatjuk alkalmas kezdőértékek mellett $t = 1, \dots, n$ -re.
2. Második lépésként $t = n - 1, \dots, 1$ -re megkaphatók a simított, teljes információn alapuló feltételes valószínűsések a következők szerint

$$\mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i | \mathcal{F}_n) = \frac{\mathbf{P}(S_{t+1} = i | \mathcal{F}_n) \mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_t) \mathbf{P}(S_{t+1} = i | S_t = j)}{\mathbf{P}(S_{t+1} = i | \mathcal{F}_t)},$$

$$\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i | \mathcal{F}_n).$$

3. A harmadik lépésben az előző lépésben kapott simított valószínűségeket felhasználva a simítás során kapott teljes információn alapuló $X_{t|n}^{(j,i)}$ és $P_{t|n}^{(j,i)}$ M^2 elemeit a valószínűsésekkel súlyozva M elemre csökkenteni. A t . időpontban a simítás után kapott $X_{t|n}^{(j,i)}$ -vel a következő súlyozás szerint adja $X_{t|n}^{(j)}$ értékét:

$$X_{t|n}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i | \mathcal{F}_n) X_{t|n}^{(j,i)}}{\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_n)},$$

míg

$$P_{t|n}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^M \mathbf{P}(S_t = j, S_{t+1} = i | \mathcal{F}_n) \left(P_{t|n}^{(j,i)} + \left(X_{t|n}^{(j)} - X_{t|n}^{(j,i)} \right) \left(X_{t|n}^{(j)} - X_{t|n}^{(j,i)} \right)' \right)}{\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_n)}$$

adja a súlyozott kovarianciamátrixot j . rezsimből való indulás esetére.

4. A negyedik lépésben $X_{t|n}^{(j)}$ ismeretében

$$X_{t|n} = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_n) X_{t|n}^{(j)}$$

adja a faktorok becslését a t . időpontra $\mathcal{F}_n$ ismeretében.

Az imént ismerttetett szűrők alapján már felírható az ÁKK optimális adósságportfólió modelljében alkalmazott Markov rezsimváltó állapotter modell.

4.2.5 Többdimenziós lineáris rendszerek paraméterbecslése

Az előző részekben bemutatott módszerek segítségével az állapotter rendszer H, R, μ, F és Q paramétereit ismertnek feltételezve meghatározható a X_t , vagyis a faktorok értéke, illetve S_t is megadható véletlen generálással a $\mathbf{P}(S_t = j | \mathcal{F}_t)$

valószínűségek segítségével minden $t = 1, \dots, n$ időpontra. Az alábbiakban Sugita (2008) és Villani (2009) munkájára építve megmutatjuk, hogy H, R, μ, F és Q paraméterek, valamint a modell egyensúlyi felírása szerint a permanens értékek vektorának értéke miként határozható meg a faktorok ismeretében. Az átláthatóság kedvéért Villani (2009) hivatkozott munkájában használt jelöléseket alkalmazzuk, majd azt a későbbiekben egyértelműsítjük az általunk használt jelölésekre.

Legyen a definiált vektor autóregrészív modell (VAR) modell felírása a következő:

$$\Pi(L)x_t = \Phi d_t + \varepsilon_t,$$

ahol $x_t: p \times 1$ dimenziós idősoros adatvektor ($t = 1, \dots, n$), $d_t: q \times 1$ pedig dimenziós trendvektor. $\Pi(L) = I_p - \Pi_1 L - \dots - \Pi_k L^k$, L a lag (késleltetés) operátor, $Lx_t = x_{t-1}$ tulajdonsággal, $\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$ a hibatag. A bayesi analízis keretein belül elvárt a modell paramétereinek ($\Pi_1, \dots, \Pi_k, \Phi, \Sigma$) együttes eloszlásának meghatározása. Az így felírt rendszer egyik kritikája, hogy Φ prior értékeinek meghatározása nehézkes, valamint nem is túl informatív. Érdemes lehet ezért a rendszert olyan formában felírni, ahol a hosszútávú várakozások is megjelennek. A fenti modell egyensúlyi felírását a

$$\Pi(L)(x_t - \psi d_t) = \varepsilon_t$$

egyenlet adja, ahol a rendszer feltétel nélküli egyensúlyi értékét a ψ határozza meg, mint ψd_t . Az így felírt rendszer már kellőképpen flexibilis és kezelhető. Jelölje ekkor $[\cdot]$ az adatok mátrixba rendezését a teljes mintára, vagyis tetszőleges $z_t: p \times 1$ adatvektorok esetén ($t = 1, \dots, n$) a $[z_1, \dots, z_n]': n \times p$ mátrixot. Jelölje továbbá $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_n\}$ az adatokat. Ekkor $\Sigma_{prior} \sim IW(\Sigma_0, n_0)$ prior eloszlást feltételezve

$$\Sigma_{posterior} | \Pi, \psi, \mathcal{D} \sim IW(\Sigma^*, n^*)$$

feltételes posterior eloszlása, ahol $\Sigma^* = [\Pi(L)(x_t - \psi d_t)]' [\Pi(L)(x_t - \psi d_t)] + \Sigma_0$, valamint $n^* = n + n_0$. Továbbá tegyük fel, hogy $vec(\Pi_{prior})$ prior eloszlása többdimenziós normális $N(\theta_\Pi, \Omega_\Pi)$ paraméterekkel, ekkor

$$vec(\Pi_{posterior}) | \Sigma, \psi, \mathcal{D} \sim N(\bar{\theta}_\Pi, \bar{\Omega}_\Pi)$$

feltételes posterior eloszlása, ahol $\bar{\Omega}_\Pi^{-1} = \Omega_\Pi^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X'_\psi X_\psi)$, $\bar{\theta}_\Pi = \bar{\Omega}_\Pi (\Omega_\Pi^{-1} \theta_\Pi + vec(X'_\psi Y_\psi \Sigma^{-1}))$, $Y_\psi = [x_t - \psi d_t]$ valamint $X_\psi = [x_{t-1} - \psi d_{t-1}, \dots, x_{t-k} - \psi d_{t-k}]$. Végül feltéve, hogy $vec(\psi_{prior})$ prior eloszlása többdimenziós normális $N(\theta_\psi, \Omega_\psi)$ paraméterekkel, ekkor

$$vec(\psi_{posterior}) | \Sigma, \Pi, \mathcal{D} \sim N(\bar{\theta}_\psi, \bar{\Omega}_\psi)$$

feltételes posterior eloszlása, ahol $\bar{\Omega}_\psi^{-1} = \Omega_\psi^{-1} + U'(D'D \otimes \Sigma^{-1})U$, $\bar{\theta}_\psi = \bar{\Omega}_\psi (\Omega_\psi^{-1} \theta_\psi + U' vec(\Sigma^{-1} Y' D))$, $Y = [\Pi(L)x_t]$, $U' = [I_{pq}, I_q \otimes \Pi'_1, \dots, I_q \otimes \Pi'_k]$, valamint $D = [d_t, -d_{t-1}, \dots, -d_{t-k+1}]$. Az algoritmus Sugita (2008) alapján könnyedén kiterjeszthető többrezsimes esetekre is, így a felvázolt módszer alkalmazható az általunk bemutatott állapotter modellek paramétereinek becslésére is.

Fontos megjegyezni, hogy a prior kovariancia mátrixok ($\Sigma_0, \Omega_\Pi, \Omega_\Psi$) választása befolyásolja, hogy az algoritmus mekkora paraméterteret „derít fel”. Amennyiben a priorok varianciája kicsi, akkor az algoritmus a prior értékekhez közeli eredményeket fog visszaadni, így nem fog értékelhető becslést eredményezni. Ugyanakkor érdemes kiemelni, hogy Lan és szerzőtársai (2017) javasolnak egy módszert, amellyel a kovariancia mátrix felbontható korrelációs és variancia mátrixokra, ami által a prior kovariancia mátrix meghatározásánál az előzetes elemzői várakozások is könnyebben beépíthetők a kovariancia mátrixba, mint az általunk is használt inverz Wishart priorok esetén.

4.2.6 Paraméterbecslés az optimális adósságportfólió modellben

Az ÁKK által kezelt adósságportfólió teljeskörű modellezéséhez egy olyan rendszer kialakítására volt szükség, amely rugalmas, valamint kellőképpen széleskörű leképezését adja a szükséges gazdasági változók rendszerének. A lineáris rendszerek állapottér felírásában komoly potenciál rejtőzik egy ilyen komplexitású rendszer modellezéséhez, valamint a Kálmán-szűrő Kim-féle kiterjesztése lehetőséget teremt a modell programozhatóságára, emiatt az optimális adósságportfólió modell egyik motorjának is tekinthető illesztési és előrejelzési modul kialakítása a Markov rezsinváltó állapottér modellek keretein belül valósult meg.

A rendszer teljeskörű leírásához – vagyis az adósságportfólió modell használatához – a korábbiakban már felvázoltak szerint szükség van a forintban denominált instrumentumok (kötvények, kincstárjegyek, lakossági állampapírok, hitelek) árazására, amelyhez elengedhetetlen a forint hozamgörbe becslése (jelölje: $y_{t,M}(\tau)$). Az euróban denominált instrumentumok árazásához szükséges a magyar euró hozamgörbe modellezése is, amely az általunk megalkotott modell keretein belül a kockázatmentesnek tekintett euró hozamgörbe (jelölje: $y_{t,E}(\tau)$) és a magyar CDS felárak (jelölje: $y_{t,DS}(\tau)$) összegeként áll elő. Az inflációhoz kötött (jelenleg csak lakossági) kötvények cash-flowjának meghatározásához szükséges ismerni mind a hazai, mind pedig az eurózóna inflációját is. Emellett, miután az adósságköltségek elszámolása forintban történik, elengedhetetlen ismerni és előrejelezni a EUR/HUF keresztárfolyam alakulását is (ezen utóbbi makro változókat jelölje: $mac_{t,j}$ $j \in \{cpi_{hun}, cpi_{eu}, eur/huf\}$).

Az így modellezni kívánt változókat az előző fejezetekben felvázolt jelölés és keretrendszer szerint definiáljuk, így helytakarékoság céljából az $y_{t,k}(\tau)$ $k \in \{M, E, CDS\}$ hozamgörbékre illesztett dinamikus Nelson-Siegel modellek ismételt felírásától eltekintünk. A makro változók illesztése is a korábbiak szerint történik. A rendszer leírásához a közvetlenül is megfigyelhető változókat jelölje Y_t , míg a közvetlenül nem megfigyelhető paraméterek, a faktorok t időpontban vett értékét X_t , így

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_{t,M}(\tau) \\ y_{t,E}(\tau) \\ mac_{t,cpi_{hun}} \\ mac_{t,cpi_{eu}} \\ \Delta \log(mac_{t,eur/huf}) \\ \log(y_{t,CDS}(\tau)) \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} L_{t,M} \\ S_{t,M} \\ C_{t,M} \\ L_{t,E} \\ S_{t,E} \\ C_{t,E} \\ mac_{t,cpi_{hun}} \\ mac_{t,cpi_{eu}} \\ \Delta \log(mac_{t,eur/huf}) \\ L_{t,CDS} \\ S_{t,CDS} \end{bmatrix},$$

ahol a forint és az euró hozamgörbe pontjait a $\tau \in \{1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 12M, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 7Y, 10Y, 12Y\}$ lejáratok adják, míg a CDS felár hozamgömbét a $\tau \in \{6M, 12M, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 7Y, 10Y\}$ lejáratok logaritmusá adja. Az EUR/HUF keresztárfolyam értékeit a megfigyelt adatok logaritmusának megváltozásaként definiáltuk a t időpontban ($t \in (1, \dots, n)$). Ekkor az optimális adósságportfólió modellben használt állapotter modell a következőképp definiált:

$$\begin{aligned} Y_t &= H_t X_t + \theta_t, \\ X_{t+1} &= \mu_{S_t} + F_{S_t} X_t + \varepsilon_t, \\ \begin{bmatrix} \theta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} &\sim N\left(0, \begin{pmatrix} R_{S_t} & 0 \\ 0 & Q_{S_t} \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

ahol $Y_t, \theta_t: m \times 1$, míg $X_t, \varepsilon_t: f_n \times 1$. $H_t: m \times f_n$ tartalmazza a faktor loadingokat, vagyis a $f_{t,k}^1(\tau) = 1 - \frac{1-e^{-\tau/\lambda_{t,k}}}{\tau/\lambda_{t,k}}$, $f_{t,k}^{1'}(\tau) = \frac{1-e^{-\tau/\lambda_{t,k}}}{\tau/\lambda_{t,k}}$ és $f_{t,k}^2(\tau) = \frac{1-e^{-\tau/\lambda_{t,k}}}{\tau/\lambda_{t,k}} - e^{-\tau/\lambda_{t,k}}$ jelöléseket használva

$$H_t = \begin{bmatrix} 1 & f_{t,M}^1(\tau_1) & f_{t,M}^2(\tau_1) & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & f_{t,M}^1(\tau_{m_1}) & f_{t,M}^2(\tau_{m_1}) & & 0 & & \\ & & & 1 & f_{t,E}^1(\tau_1) & f_{t,E}^2(\tau_1) & \\ & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ & & & 1 & f_{t,E}^1(\tau_{m_1}) & f_{t,E}^2(\tau_{m_1}) & \\ & & & & I_l & 0 & \\ & 0 & & & 0 & 1 & f_{t,CDS}^{1'}(\tau_1) \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & 1 & f_{t,CDS}^{1'}(\tau_{m_2}) \end{bmatrix},$$

ahol m_1 és m_2 a megfigyelt lejáratok száma ($2m_1 + m_2 + l = m$), míg I_l a megfelelő méretű egységmátrix. Az S_t egy közvetlenül nem megfigyelhető elsőrendű, kétállapotú Markov rezsinváltó folyamat által mozgatott paraméter, ($S_t \in \{1, 2\}$), amelynek átmenetvalószínűségeit a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix adja, ahol a p_{ij} az i . rezsimből a j . rezsimbe való átlépés valószínűségét jelenti. Jelölje $C_{S_t} = (I_{f_n} - F_{S_t})^{-1} \mu_{S_t}$ a faktorok permanens vagy más néven egyensúlyi értékének vektorát, ilyenformán a μ_{S_t} paraméter kiváltható a paraméterek közül. Ekkor az állapottér modell a következőképp változik:

$$\begin{aligned} Y_t &= H_t X_t + \theta_t, \\ X_{t+1} &= C_{S_t} + F_{S_t}(X_t - C_{S_t}) + \varepsilon_t, \\ \begin{bmatrix} \theta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} &\sim N\left(0, \begin{pmatrix} R_{S_t} & 0 \\ 0 & Q_{S_t} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Az így definiált rendszer paramétereit a $\Theta = \{H_t, F_t, C_t, Q_t, R_t, \mathbf{P}, S_t\}$ ($i \in \{1, 2\}, t \in (1, \dots, n)$) adja meg. Látható, hogy H független attól, hogy a gazdaság éppen melyik rezsimben van, azonban a $\lambda_{t,k}$ paraméteren keresztül függ az időtől. Modellünkben a gazdasági ciklus két lehetséges állapot között váltakozik, amelyek a „gazdasági fellendülés” és „válság” állapotok paramétereit modellezzik.

Az alábbi további megszorításokat tettük még a modellel kapcsolatban:

- F_{S_t} : minden rezsim esetén feltesszük, hogy a hazai vonatkozású faktoroknak (makro változók, forint hozamgörbe és CDS faktorok) nincs hatása az eurózóna faktorok mozgására.
- R_{S_t} : diagonális mátrix, azaz minden időszakban a hozampontok becslési és a makro változók megfigyelési hibái korrelálatlanok.
- Érdemes kiemelni, hogy a makro változók szerepelnek mind az állapotvektorban, mind pedig a megfigyelési vektorban. Az állapotvektorban így a makro változók simított változata szerepel, míg R_{S_t} megfelelő elemeit az inicializálás során felülírjuk egy kellőképpen kicsi értékkel.

A modell paramétereit a bayesi statisztikai módszertant felhasználva Gibbs-mintavételezési eljárással becsüljük. Az algoritmus megalkotását Sugita (2008), Villani (2009), valamint Blake és Mumtaz (2012) a témakörben végzett munkájára, továbbá Bebesi (2016), illetve Bebesi és Bebes (2017) kutatómunkájára alapoztuk. Az alábbiakban a paraméterek illesztéséhez alkalmazott algoritmus bemutatása következik.

Az algoritmus részletezése előtt azonban érdemes hosszabban foglalkozni a kiindulási paraméterek meghatározásával, vagyis a paraméterek inicializálásával. Első lépésként a látens faktorokat (X) láthatóvá tesszük, mégpedig úgy, hogy kihelyettesítjük azokat az empirikus megfelelőikkel (pl. a forint hozamszint paraméterét a rendelkezésre álló legrövidebb lejáratú elem hozamával). A megfigyelt adatokat az Y mátrixba rendezzük, míg a lejáratok ismeretében, valamint a $\lambda_{0,k} = 1$ ($k \in \{M, E, CDS\}$) feltételezés mellett H^0 is megadható. X^0, Y valamint H^0 ismeretében megkapható R^0 is. Ekkor a modell átmenetegyenletének paramétereit a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük, majd a faktorok értékeit a kapott paramétereket felhasználásával Kálmán-szűrővel javítjuk tovább. Fontos megjegyezni, hogy eddig a

lépésig nem kerül be több rezsim a modellbe. A kezdeti átmenetvalószínűség-mátrix P_{prior} szakértői becslés alapján kerül meghatározásra, ennek felhasználásával pedig megadható, hogy a vizsgált idősor mekkora arányában volt a gazdaság az egyik, illetve a másik rezsimben. A kiindulási faktorok és paraméterek ezután visszahelyeztetők a mérési, valamint átmenetegyenletekbe. Az egyes időszakokra így kapott négyzetes hibák alapján pedig sorba rendezhetők az időpontok, ahol a legmagasabb volatilitású időpontok a megfelelő arányban kerülnek a magasabb volatilitású (2.) rezsimbe, S^0 ilyen módon megadható. S^0 ismeretében pedig az adott periódusok empirikus kovariancia mátrixai (diagonális mátrixok) adják az adott állapotok kezdő kovariancia mátrixait.

Az algoritmus a következő lépésekből áll:

1. Inicializálás, $(X_t^0, S_t^0)_{1 \leq t \leq n}$ és $F_i^0, C_i^0, R_i^0, Q_i^0, i = 1, 2$ meghatározása.
2. Szűrés, második lépésben a Θ paramétereit ismertnek feltételezve lefuttatjuk a Kim-szűrőt, hogy megkapjuk X_t , valamint $P(S_t = j | \mathcal{F}_t)$ értékeit minden $t = 1, \dots, n$ időpontra.
3. Simítás, minden t időpontra az X_t változó $Y_1, \dots, Y_n$ feltétel melletti várható értékének és kovarianciájának, valamint az S_t feltételes eloszlásának rekurzív számítása.
4. Az $(X_t, S_t)_{1 \leq t \leq n}$ sorozat elemeinek egyesével történő frissítése a többi változóra vett feltételes eloszlásból.⁶
5. P frissítése. A prior átmenetvalószínűségek, valamint a generált állapotrealizáció felhasználásával új átmenetvalószínűség-mátrixot generálunk. A P átmenetvalószínűség-mátrix sorait Béta eloszlásból generáljuk a prior és empirikus állapotok felhasználásával.⁷
6. Q_i, R_i, C_i , valamint $F_i - i = 1, 2$ - paraméterek frissítése a 4.2.5 részben felvázolt módon a $k, q = 1, p = f_n, \Pi = F, d_t \equiv 1, \Phi = \mu, \psi = C, \Sigma = Q$ megfeleltetésekkel az átmenetegyenlet esetére.⁸
7. A hetedik lépésben a $\lambda_{t,M}, \lambda_{t,E}, \lambda_{t,CDS}$ paramétereit becsüljük meg a véletlen bolyongásos Metropolis Hastings eljárás használatával. A $\lambda_{t,k}$ paramétert a $\lambda_{t,k}^{új} = \lambda_{t,k} + \kappa_t \varepsilon_{t,k}$ egyenletből generáljuk, ahol $k \in \{M, E, CDS\}$, κ_t tetszőlegesen választható, míg $\varepsilon_{t,k} \sim N(0, 1)$ minden t, k esetére. A generált paraméterekkel kiszámoljuk a „jelölt” H mátrixot, amely segítségével kiértékelhetjük a mérési egyenlet likelihood függvényét a

⁶ Az X folyamat mintavételezése bizonyos esetekben problémás, ugyanis a megfigyelt adatok zajosak, így F és Q becslése könnyen vezet szélsőséges értékekhez.

⁷ $M \geq 2$ rezsim esetére az átmenetvalószínűség-mátrix generálása a Dirichlet eloszlásból történik, amelynek $M = 2$ speciális esete a Béta eloszlás.

⁸ A rendszer permanens értékeit (C) lehetne az átmenetmátrix (F) értékeivel együtt is kezelni, azonban fontos hangsúlyozni, hogy itt közgazdaságilag is értelmes faktorokról van szó, amiknek a permanens értékei is lényeges információt hordoznak. Így például az elemzőnek, döntéshozónak jó eséllyel nincs várakozása F egy adott elemére, ám például az eurózóna inflációjának permanens értékére valószínűleg van.

generált paraméterek és faktorok mellett. Ezután a kapott elfogadási valószínűséggel fogadjuk el az új értékeket.⁹

8. A 2-7. lépéseket addig ismételjük, míg a konvergencia meg nem felel az elvárásainknak.

A fent részletezett mintavételezési eljárás akkor mondható jónak, ha a végeredmény nem függ a kezdeti értékek megválasztásától. Arra, hogy az eljárás során a konvergencia megfelelő-e, a Geweke-statisztikával (1991) kaphatunk választ.¹⁰

4.3 Költségmutatók

Az adósságinstrumentumok költségeit alapvetően négyfelé tudjuk bontani. A legjelentősebb költségelem a kamatköltség, amely az egyes adósságelemek kamatfizetéseinek összege.

A második költségtípus a kibocsátáskor keletkezett árfolyamnyereség/veszteség, amikor egy papír *par* árfolyam felett vagy alatt kerül kibocsátásra. A tervinstrumentumok kamatai a modellben általában úgy kerülnek meghatározásra, hogy nagyjából *par* árfolyamon kerüljenek kibocsátásra. A különféle tervinstrumentumok kamatait (a változó kamatozású kötvényektől eltekintve) a kapott *par* kamatlábhoz legközelebbi 0; 0,25; 0,5; 0,75 százalékpontra kerekítjük, így a kibocsátás kis mértékben *par* árfolyam alatt vagy fölött történhet. Kivételt jelent ez alól a DKJ, amely zérókupon állampapír, tehát nem fizet kamatot, ennél a névérték alatti diszkont a modellben árfolyamveszteséggént kerül elszámolásra. Rábocsátáskor – azaz a már piacon lévő állampapír-sorozatból történő újabb kibocsátáskor – is gyakran keletkezik árfolyamnyereség/veszteség a hozamgörbe változása miatt, ugyanis az első kibocsátáskor rögzített kamat nem változik a rábocsátások alkalmával. Rábocsátáskor továbbá ki kell fizetni a felhalmozott kamatot is, amely a modellbe – modellalkotási megfontolások alapján – szintén árfolyamnyereséggént kerül be. Megjegyzendő, hogy a lakossági papírok a modellben mindig *par* árfolyamon kerülnek először kibocsátásra, rábocsátás esetén pedig *par* plusz felhalmozott kamatnak megfelelő árfolyamon¹¹.

A harmadik költségtípus a devizaárfolyam változásából adódó nyereség, illetve veszteség (a továbbiakban: devizaköltség)¹². A modell kizárólag euróban végez devizakibocsátást, ami megfelel az ÁKK azon stratégiai céljának, miszerint devizakitettséget csak euróban kíván felvállalni. (Ezért az ÁKK az összes nem-euró devizakötvényre devizaswapokat köt.) A modell a költségeket forintban számolja el. A devizaköltséget is fel tudjuk bontani kamathoz, illetve az állampapírok kibocsátási árfolyamához kapcsolódó devizaköltségre. Az előbbi kamatfizetéskor jelentkezik. Egy

⁹ Érdemes lehet megvizsgálni, hogy a generált scenáriókat mennyiben befolyásolja λ_t időtől függetlennek választása. Egy lehetőség a konstans λ melletti eredmények összevetése azzal amikor az egyes λ_t vektorokat egymástól függetlenül sorsoljuk az illesztés során fellépő λ -k közül.

¹⁰ A Geweke-statisztikával részletesebben a Függelék F: Modell diagnosztika részben foglalkozunk.

¹¹ Az ÁKK az elszámolási szabályok alapján a kuponfizetésből és a kibocsátáskori árfolyamveszteségből eredő költséget is kamatként mutatja ki.

¹² Az ÁKK a devizaárfolyam változásából adódó költséget nem kamatként, hanem tőkekülönbözetként számolja el, azonban a modellezés szempontjából mi ezt a fentiek szerint számoljuk.

t_0 időpontban kibocsátott devizakötvény t_1 időpontban történő kamatfizetési költségére a következő dekompozíciót tudjuk felírni:

$$\begin{aligned}c_i &= i_{t_1} x_{t_0} \\c_c &= i_{t_1} (x_{t_1} - x_{t_0}) \\c &= i_{t_1} x_{t_1} = i_{t_1} (x_{t_1} + x_{t_0} - x_{t_0}) = i_{t_1} x_{t_0} + i_{t_1} (x_{t_1} - x_{t_0}) = c_i + c_c,\end{aligned}$$

ahol c a teljes kifizetett kamatköltség c_i a kamatköltség a kiindulási árfolyamon, c_c a devizaköltség-komponens, i az euróban denominált kifizetett kamat, x pedig az EUR/HUF árfolyam. Hasonlóképpen tudjuk felírni a kibocsátáskor keletkezett kötvényárfolyam nyereség/veszteség dekompozícióját. Legyen t_m a kötvény lejáratának ideje, p a par árfolyamtól való kibocsátáskori eltérés, c_p pedig a kötvényárfolyamból eredő költség, ekkor:

$$\begin{aligned}c_p &= p x_{t_0} \\c_c &= p (x_{t_m} - x_{t_0}) \\c &= p x_{t_m} = p (x_{t_m} + x_{t_0} - x_{t_0}) = p x_{t_0} + p (x_{t_m} - x_{t_0}) = c_p + c_c.\end{aligned}$$

A negyedik költségtípusról (likviditási prémium) a 4.3.2 pontban értekezünk.

A költségeket kétféle módon tudjuk elszámolni: pénzforgalmi- illetve eredmény szemléletben. Pénzforgalmi szemlélet esetén egy adott költségelem elszámolása a költség keletkezésekor egy összegben történik. Így például egy, a szimuláció időhorizontjának végén kibocsátott kötvény teljes árfolyamnyeresége/vesztesége elszámolásra kerül a kibocsátás időpontjában. A modell azonban a közgazdasági tartalma miatt relevánsabb eredménysszemléletű elszámolást használ. Ennek során egy kamatfizetés elszámolása nem a kifizetés időpontjában egy összegben történik, hanem a teljes kamatperiódusra egyenletesen elosztva. A költségek ilyen módon történő simítása jobban összehasonlíthatóvá teszi az egyes stratégiákat és különböző időhorizontokat, mivel nincsenek kiugró értékek, nem számít igazán például, hogy rövid idővel egy adott kamatfizetés előtt vagy után ér-e véget a szimuláció időhorizontja.

Legyen a szimuláció időhorizontjának kezdete t_s , a vége t_e ($t_s < t_e$). Továbbá, vegyünk egy tetszőleges instrumentumot, amelynek kibocsátási időpontja t_0 a szimuláció előtt történt ($t_0 < t_s$), első kamatfizetési időpontja t_1 viszont már a szimuláció idejére esik ($t_s < t_1 < t_e$). Eredménysszemléletű elszámolás esetén a modellben elszámolt – a kamatperiódusból csak a modell időintervallumára eső időarányos – kamat a következő:

$$c_{it_1} = i_{t_1} \frac{t_1 - t_s}{t_1 - t_0}.$$

Egy másik kötvény esetén, amely kibocsátási időpontja a szimuláció indulása után történik ($t_s < t_0$), két kamatfizetési időpontja $t_s < t_{j-1} < t_e < t_j$, a j . kamatfizetésre a következő elszámolást tudjuk alkalmazni:

$$c_{it_j} = i_{t_j} \frac{t_e - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}.$$

A kamathoz kapcsolódó devizaköltséggel hasonlóan járunk el.

A kötvénykibocsátáskor keletkező árfolyamnyereséget, illetve veszteséget, valamint az ehhez kapcsolódó devizaköltséget eredményszemléletben a kibocsátástól az adott instrumentum lejáratáig egyenletesen számoljuk el. Így például egy, a szimulációban szereplő tervinstrumentum a vizsgált időhorizonra eső árfolyamnyereségét/veszteségét a következő módon tudjuk kiszámolni:

$$c_p = p \frac{\min(t_m, t_e) - \max(t_0, t_s)}{t_m - t_0}.$$

Egy adott finanszírozási szerkezet teljes költségmutatóit az előrejelzés alapján kialakított realizációk mentén tudjuk kiszámolni. Egy adott finanszírozási szerkezethez kapcsolódó költség az egyes realizációk költségének számtani átlaga (költségen ilyenkor a teljes modellezési időhorizonra eső kamatköltség, kibocsátáskori árfolyamkülönbség, devizaköltség és likviditási költség összegét értjük).

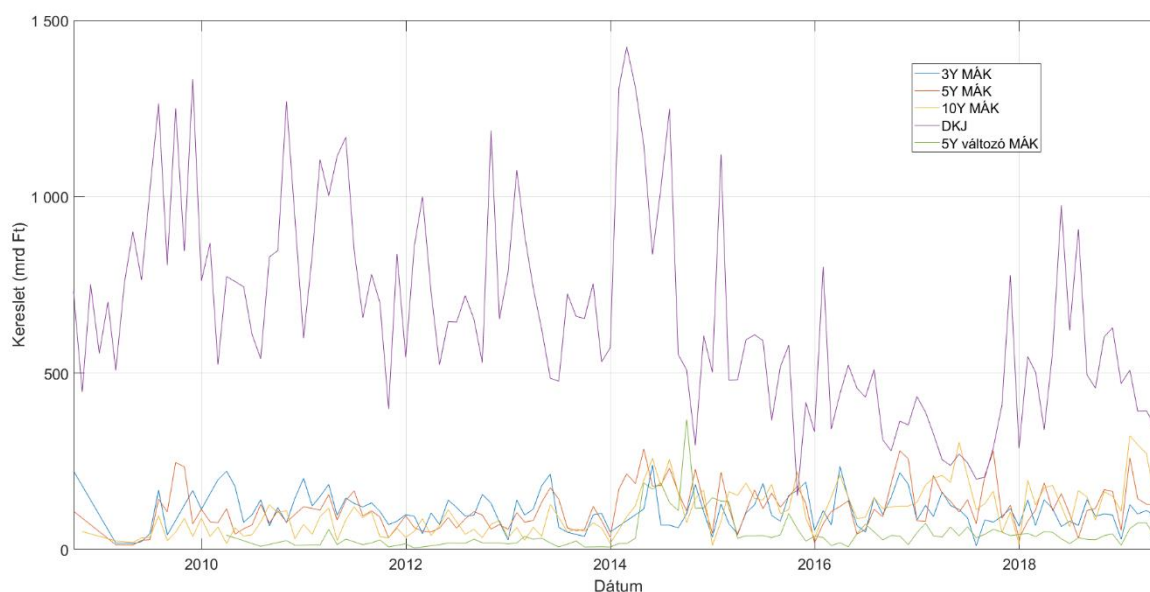
4.3.1 Likviditási korlát

A modellalkotás korai fázisában azt figyeltük meg, hogy a kapott hatékony portfólió frontot a választott tervinstrumentumok egy szűk csoportja által kifizetett poliéder szélei alkották, ahol a sarokpontokat egy adott instrumentum 100%-os kibocsátása adja. A jelenség könnyen magyarázható volt, hiszen, ha egy adott instrumentum valamilyen szempontból (pl. költség) optimális, akkor az adott instrumentum 100%-os kibocsátása adja a választott szempont szerint optimális stratégiát. Azonban az így meghatározott keretrendszer alapvetően hibás, hiszen a valóságban könnyen látható, hogy a finanszírozási igény egy tetszőleges instrumentummal való kielégítése nem reális, ugyanis az nagyon gyorsan keresleti korlátokba ütközik. Sőt, már az abszolút keresleti korlát elérése előtt is megfigyelhető, hogy egy adott terméktípusból való nagyobb mennyiségű kibocsátás magasabb költségekkel jár.

A fenti probléma kezelésére egy lehetséges megoldás, hogy egy tetszőleges időpontban nem engedjük, hogy egy adott instrumentum teljes portfólión belüli aránya bizonyos korlát fölé menjen. Azonban ennél lényegesen jobb megoldás a kibocsátási oldalt korlátozni, és a modell is ezt a megoldást követi. A probléma megoldásához az ÁKK aukciós adatait használtuk fel, ugyanis ezt a jelenséget a modellben a DKJ-k és a piaci forint államkötvények esetén lehet tapasztalni. A lakossági állampapírok és a devizakötvények esetén – némi leegyszerűsítéssel – ez nem merül fel.

A 2. ábra a 2008.10.01. – 2019.05.31. időszak aukciós keresleti (a keresleti adatok közé a csereaukciók keresleti adatait is beleértjük) adatait mutatja havi frekvencián. Látható, hogy a diszkont kincstárjegyek aukciós kereslete – azaz, az aukciókra benyújtott ajánlatok összege – nem gyakran megy havi 1 000 milliárd forint fölé. A 10 éves Magyar Államkötvények (MÁK) esetén a teljes időtávot tekintve pedig az átlagos havi kereslet nagyjából 107 milliárd forint volt, ami figyelembe véve a lejáratig

hátralévő hónapok számát egy kb. 12 840 milliárd forintos állományt jelent, ha minden hónapban az átlagos keresleti mennyiséget bocsátjuk ki. Figyelembe véve a 2019 május végi adósságállományt, látható, hogy az iménti gondolatmenet mentén haladva a 10 éves MÁK instrumentum aránya a teljes portfólión belül nagyjából a 45%-os szinten maximalizálható. Ráadásul mivel a tényleges kibocsátás értelemszerűen a benyújtott ajánlatokból kiolvasható keresletnél kisebb, így elmondható, hogy a jelenlegi 10 éves kötvényállomány arányának már a 45% körüli arányra való feltornázása is jelentős többletköltségekkel járna.



2. ábra: Az elmúlt évek aukciós keresleti adatai havi frekvencián a különféle lejáratok szerint

A likviditási korlátok és költségek modellbe fejlesztésével a kibocsátási mennyiségeket az elérhető piaci likviditás (kereslet) mentén korlátozzuk, méghozzá minden instrumentum esetére egy úgynevezett likviditási küszöbérték és egy likviditási korlát segítségével. A *likviditási küszöbérték* szerepe annak meghatározása, hogy milyen mennyiségig tudunk úgymond „normál” áron állampapírokat kibocsátani, míg a *likviditási korlát* az adott instrumentum kibocsátási maximumát, vagyis azt a felső korlátot jelenti, ami felett már nincs további piaci kereslet. A likviditási küszöbérték alatt kibocsátott mennyiség az adott realizáció szerint meghatározott hozam mellett kerül kibocsátásra, míg a küszöbérték és a korlát közötti kibocsátás bizonyos költségtöbbletet tartalmaz, amely a túlzott kibocsátás költségnövelő hatását hivatott képviselni.

A likviditási küszöb és korlát számítása a következőképpen történik: a modellillesztés folyamata során ismertté válnak a múltbeli időpontokban az állapotvalószínűségek, vagyis a $P(S_t = j | \mathcal{F}_t)$ értékek minden $t \in 1, \dots, n$ esetére, ahol j jelöli a j . rezsimet. Az állapotvalószínűségek felhasználásával, valamint az ÁKK által az aukciókon elfogadott mennyiségek (adott esetben ez már a meghirdetett mennyiséghez képest emelt összeget jelenti) ismeretében ($S_{t,i}$ jelöli a t időpontban elfogadott aukciós mennyiséget az i instrumentumtípus esetén) az alábbi egyenlet írható fel minden t időpontra:

$$\sum_{j=1}^M K_{j,i} P(S_t = j | \mathcal{F}_t) = S_{t,i} cpi_t + \xi_{t,i},$$

ahol cpi_t jelöli a t . időpontban az utolsó időponthoz viszonyított inflációs értéket (az inflációt használtuk a különböző évek adatainak összehasonlíthatóvá tételéhez), $\xi_{t,i} \sim N(0, \sigma_{\xi,i}^2)$ pedig a hibatag. A formula lényegében egy legkisebb négyzetek módszerével történő becslés, ahol a koefficiensek lesznek a későbbi küszöbértékek. Feltételezzük, hogy az aukción elfogadott mennyiségek minden időpontban a piac számára teljeskörűen tükrözik az adósságkezelő kibocsátási szándékát az adott instrumentumból. A felső korlát értékét az iméntihez hasonlóan az aukción elkelt mennyiségek és a benyújtott ajánlatok segítségével határozzuk meg ($d_{t,i}$ jelöli a beadott ajánlatok összege/elfogadott mennyiséget az i instrumentumtípus esetén, míg $\vartheta_{t,i} \sim N(0, \sigma_{\vartheta,i}^2)$ a hibatag):

$$\sum_{j=1}^M H_{j,i} P(S_t = j | \mathcal{F}_t) = d_{t,i} + \vartheta_{t,i}.$$

Az így meghatározott $K_{j,i}$ jelenti a j rezsimben az i instrumentumtípus esetén kapott küszöbértéket, amely felett a kibocsátás már többletköltséggel jár az adósságkezelő számára, míg a $H_{j,i} K_{j,i}$ jelenti azt a felső korlátot, amely felett már nincs kereslet az adott instrumentum esetén, így az adott instrumentum esetén efelett már nem lehetséges további kibocsátás. A korlátok meghatározásánál az alábbi feltételezésekkel élünk:

- Létezik M állapot, amelyek esetén eltérő keresleti és kínálati viszonyok uralkodnak.
- A piac kereslete jól megfigyelhető a benyújtott ajánlatok vizsgálatával, valamint a benyújtott ajánlatok összege képes megmutatni az egyes állapotokban a maximális kereslet összegét.
- A kialakuló egyensúlyi értékek az elfogadott mennyiséggel jól jellemezhetők, ezen érték feletti kibocsátás esetén a költségek növekednek.

Rezsím	1 év	3 év	5 év (vált.)	5 év (fix)	10 év
1	719,1 (158,9)	110,1 (51,9)	50,7 (21,8)	131,9 (57,9)	123,1 (60,5)
2	1002,1 (397,2)	11,2 (7,9)	0 (0)	10,5 (7,5)	7,4 (3,8)

1. táblázat: Havi likviditási korlátok (küszöbértékek) az egyes instrumentumok esetén különböző rezsimekben, milliárd Ft

Az 1. táblázat mutatja a kialakult likviditási korlátokat és a likviditási küszöbértékeket (zárójelben) a piaci forint instrumentumokra futamidők szerint. A táblázat egyes elemei azt mutatják meg, hogy egy tetszőleges hónapban adott rezsim esetén mekkora összegű kibocsátást bír el a piac az adott termékből. Jól látható, hogy a turbulensebb időszakban (2. – válság – rezsim) a hosszú futamidejű instrumentumok iránti kereslet jelentősen lecsökken, miközben a rövid lejáratú kincstárjegyek iránti kereslet növekszik. Ez jól mutatja, hogy válságidőszakban a piaci szereplők inkább a rövidebb

eszközöket keresik. Az egyes instrumentumokhoz tartozó küszöbértékek pedig, azaz e szintek feletti kibocsátás már költségnövekedéssel jár.

Az 1. táblázatban szereplő likviditási korlát, illetve likviditási küszöbérték a szimuláció első évét követően inflációval korrigálásra kerül a következő évekre.

(Megjegyezzük, hogy a modellben az államháztartás egyenlege exogén tényező, így a rezsimenként eltérő finanszírozási igény meglétét nem vizsgáljuk, miközben valószínűsíthetően ez is eltérhet a két rezsim esetén, és ez is befolyásolja a finanszírozási lehetőségeket.)

A 2. táblázatban a szemléltetés kedvéért a 2016. augusztusi aukciós kibocsátási adatokat vizsgáltuk. Feltételezhető, hogy a gazdaság ebben a hónapban az 1-es állapotban volt. A kibocsátási adatokat összevetve a 1. táblázatban szereplő likviditási korlátokkal és küszöbértékekkel megállapítható, hogy a küszöbértéket jelentősen meghaladó kibocsátás volt 3, és 10 éves kötvényekből. Ez azt jelenti, hogy ezen kibocsátások esetén a kibocsátás magas összegének már árfelhajtó hatása is volt a modellünk szerint, így ebben a hónapban a kibocsátásnak keletkezett úgynevezett likviditási költsége is.

Hét	DKJ	3 év	5 év (fix)	10 év
32	30	32,9	27,3	10
33	80	0	0	20
34	30	30	22,5	28
35	52,1	24	0	20
36	30	0	0	0
Összesen	222,1	86,9	49,8	78

2. táblázat: Kibocsátott mennyiség 2016 augusztusában (csereaukciókat beleszámolva), hetekre lebontva, milliárd Ft

A likviditási küszöbérték és korlát meghatározása mellett szükséges azt is számszerűsíteni, hogy mennyivel drágul meg egy adott instrumentumtípus kibocsátása, amennyiben arra a likviditási küszöbértéknél nagyobb összegben kerülne sor.

4.3.2 Likviditási prémium

Drehmann és Nikolaou (2013) az aukciós adatokon alapuló likviditási kockázati prémium (liquidity risk premium) mértékét vezetik be egyfajta mutatószámként. A mutató a sikeres aukciós ajánlatok hozamait viszonyítja az adott aukció határhozamához, a beadott mennyiségekkel súlyozva. Jelölje a korrigált ajánlati hozamot

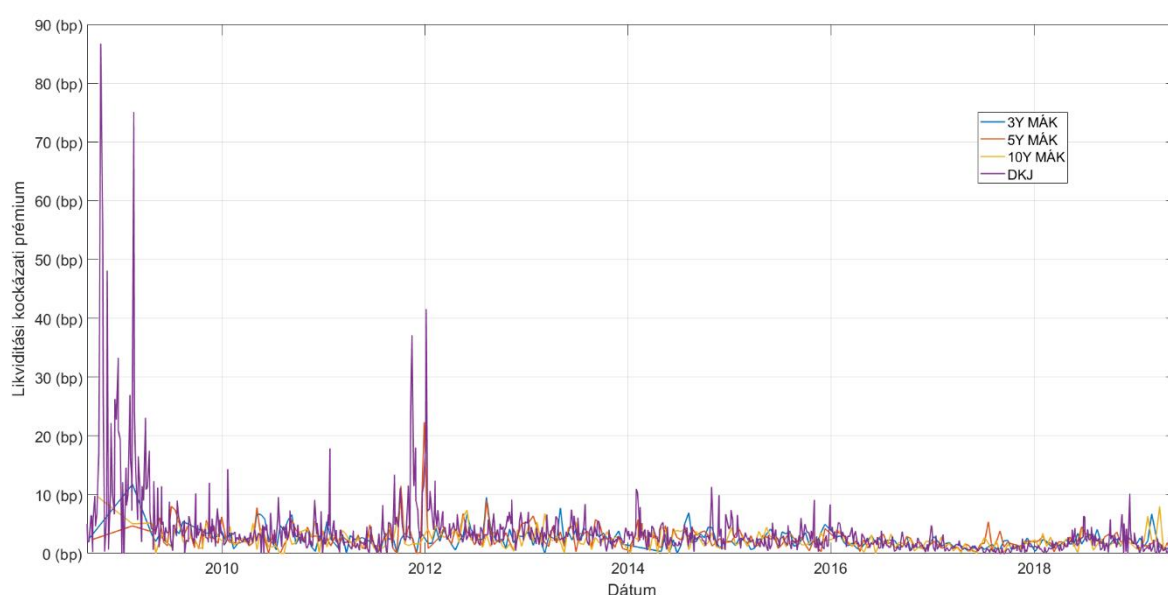
$$\kappa_{b,i,t} = (E(h_t) - \rho_{b,i,t})v_{b,i,t},$$

ha $E(h_t) > \rho_{b,i,t}$, ahol $E(h_t)$ jelenti t időpontbeli aukció várható határhozamát, $\rho_{b,i,t}$ az i . aukciós résztvevő ($i \in 1, \dots, N$) hozamát, amelyet a b ajánlat ($b \in 1, \dots, B$) során $v_{b,i,t}$ mennyiség mellett tesz a t . időpontban. $\kappa_{b,i,t}$ jelöli azt a hozamot, amit az i résztvevő

a $v_{b,i,t}$ mennyiség megszerzése érdekében hajlandó fizetni. A korrigált ajánlat figyelembe vételével a likviditási kockázati prémium már csak a sikeres ajánlatok aggregátja normálva a várható kibocsátási mennyiséggel, azaz

$$lrp_t = 100 \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{b=1}^B \kappa_{b,i,t}}{E(v_t)}$$

a t időpontban, bázispontban kifejezve. Az egyszerűség kedvéért a modellben a t időpontbeli aukció várható határhozamat az adott aukción elfogadott legmagasabb hozammal, míg a várható kibocsátási mennyiséget az adott aukción elfogadott mennyiséggel helyettesítettük. Az lrp tehát azt mutatja meg, hogy az adósságkezelő még mekkora többlethozamot fogad el azért, hogy az adott instrumentumokból a kívánt mennyiséget értékesítse.



3. ábra: A likviditási kockázati prémium alakulása a megfigyelt időszakban az egyes lejáratok esetén

A 3. ábra a vizsgált időszakban kapott likviditási kockázati prémiumot ábrázolja. Jól látható, hogy a turbulensebb időszakokban a mutató értéke jelentősen megugrik a diszkont kincstárjegyek esetén. Az államkötvények esetén viszont a 2008-2009-es válság időszakában nem tudjuk megfelelően mérni, ugyanis több hónapra fel lettek függesztve a kötvényszerzők (az ÁKK egyéb forrásból biztosította a finanszírozást). Ez is azt mutatja, hogy míg egy-egy turbulensebb időszakban a kötvénypiac likviditása kiszárad, addig a diszkont kincstárjegyek piacán – ugyan kifejezetten magas hozam és likviditási kockázati prémium mellett, de – jellemzően fenntarthatók az aukciók. Ez alapján a modell a DKJ-t „menekülő-instrumentumként” is használja a többi állampapír-típus esetében esetlegesen bekövetkező limitelérések esetén, miközben a DKJ-ra vonatkozó maximálisan kibocsátható havi mennyiséget nem korlátozzuk (a likviditási korlátja végtelen)¹³.

¹³ Az ÁKK tapasztalata szerint a DKJ-piac még a 2008-2009-es válságban is működőképes maradt. A modellben alkalmazott 12 hónapos DKJ modellinstrumentum az összes DKJ-t magába foglalja, nem csak a ténylegesen 12 hónapost.

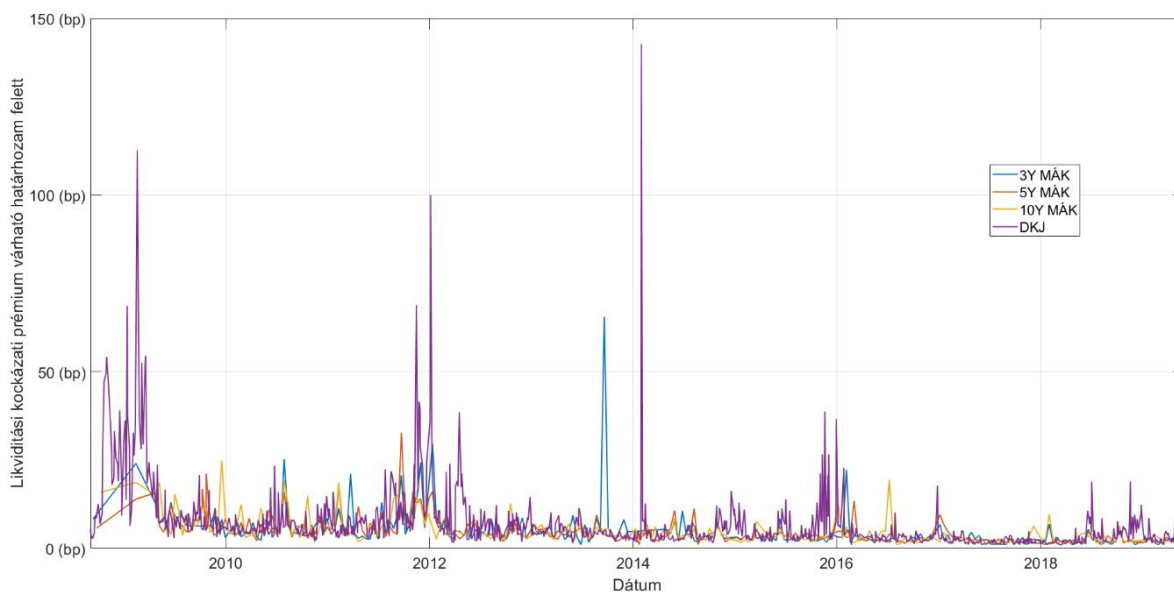
Az így kapott kockázati mutatószám az állampapír-piaci likviditás egyik hasznos jellemzője. Ebből kiindulva, az eredeti célunknak megfelelően a túlzott kibocsátással járó költségnövekedés számszerűsítésére – vagyis annak a vizsgálatára, hogy a korábbiak során meghatározott likviditási küszöbérték felett milyen költségtöbblettel jár a kibocsátás – a likviditási kockázati prémiumhoz hasonló mérőszámot alkottunk. Ez a benyújtott, de el nem fogadott ajánlatokhoz tartozó hozamok eltérését méri a kialakult határhozamtól. Így legyen a korrigált sikertelen ajánlati hozam

$$\iota_{b,i,t} = (\rho_{b,i,t} - E(h_t)) v_{b,i,t},$$

ha $E(h_t) < \rho_{b,i,t}$, ahol $E(h_t)$ jelenti t időpontbeli aukció várható határhozamát, $\rho_{b,i,t}$ az i . aukciós résztvevő ($i \in 1, \dots, N$) hozamát, amelyet a b ajánlata ($b \in 1, \dots, B$) során $v_{b,i,t}$ mennyiség mellett tesz a t . időpontban. Vagyis $\iota_{b,i,t}$ jelöli azt a hozamot, amit az i résztvevő a $v_{b,i,t}$ mennyiség megszerzése érdekében elvár a várható sikeres ajánlatokon túli likviditásért cserébe. (Feltételezzük, hogy a beadott ajánlatok mögött tényleges vásárlási szándék is volt.) A „likviditási kockázati prémium várható határhozam felett” (liquidity risk premium above marginal rate) a sikertelen ajánlatok aggregátja normálva a várható sikertelen ajánlati mennyiséggel, azaz

$$lrm_t = 100 \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{b=1}^B \iota_{b,i,t}}{E(\bar{v}_t)}$$

a t időpontban, bázispontban kifejezve, $\bar{v}_t$ pedig a sikertelen ajánlatok összesített mennyisége. Az lrm információval szolgál arra vonatkozóan, hogy az aukciós résztvevők egy adott aukción milyen likviditási prémium mellett hajlandóak a várható határhozamhoz tartozó mennyiség feletti vételi keresletet biztosítani az adósságkezelő számára.



4. ábra: A likviditási prémium alakulása a sikertelen ajánlatok esetén

A 4. ábra a vizsgált időszakon az lrm mutató alakulását mutatja. Látható, hogy az lrm múltbeli értéke minden lejárat esetén nagyobb mértékben ingadozik, mint a likviditási kockázati mérték (lrp). Ennek magyarázata az, hogy míg az lrp azt mutatja

meg, hogy az adósságkezelő még mekkora többlethozamot fogad el azért, hogy az adott instrumentumokból a kívánt mennyiséget értékesítse, addig az lrm éppen azt mutatja, hogy mekkora többlethozamot várnak el a befektetők a várható határhozamhoz tartozó mennyiség feletti további vásárlásért, így ez utóbbi kevésbé függ a gazdaság állapotától. Az így kapott rezsimenként eltérő likviditási prémium értékeket a 3. táblázat rögzíti.

A 3. táblázatban szereplő értékek azt rögzítik, hogy a korábbiakban megadott, rezsimenként eltérő likviditási küszöbértékeket meghaladó kibocsátások esetén a felső likviditási korlát eléréséig átlagosan mekkora költség-többlet jelentkezik az egyes lejáratok szerint. Így például az 1. (normál állapotú) rezsimben a 10 éves kötvény kibocsátásakor az 1. táblázatban látható 60,5 milliárd forintos havi limitösszegig (likviditási küszöbértékig) nincs költség-többlet, de az ezt meghaladó mennyiségben kibocsátani kívánt kötvényekre a felső likviditási korlátig, vagyis 123,1 milliárd forintig akár 6,4 bázisponttal is nőhet a kibocsátott kötvények hozama, vagyis egy havi 123,1 milliárd forintos kibocsátás esetén a teljes időszakra vetített likviditási költség megközelítőleg 400 millió forint az 1-es rezsimben, míg válságidőszakban (2. rezsim) egy havi 7,4 milliárdos kibocsátás (ami már a küszöbérték felett van) a teljes időszakon 52 millió forint költség-növekedést okoz.

Rezsim	1 év	3 év	5 év	10 év
1	30,3	7,9	6,0	6,4
2	123,3	15,3	12,9	14,5

3. táblázat: A befektetők által elvárt átlagos többlethozam (lrm) rezsimenként, bázispontban megadva

A költség-többlet számszerűsítésének egyik hiányossága, hogy a modell jelenlegi állapotában a túlzott kibocsátásból eredő adott havi költség-többlet nem épül be a következő havi kibocsátáskor kialakuló hozamokba. Ennek oka az exponenciálisan megnövekvő számításigényben rejlik. Azonban a kibocsátási algoritmus úgy lett kialakítva, hogy a túlzott kibocsátás jelensége a lehető legkevesebbszer alakuljon ki, így ennek a tovagyrúzó hatásnak a megjelenése is elenyésző.

4.4 A kockázatok kezelése a modellben

Az államadósság-kezelés során figyelembe vett számos kockázattípus közül szoros kapcsolatban állnak a költségek ingadozásából, az adósság lejárat szerkezetéből fakadó, illetve a piaci kamatszint változásának való kitettségéből fakadó kockázatok. A szakirodalomban többféle felosztás létezik, az ÁKK Zrt. a következő meghatározásokat alkalmazza: az adott időtávon felmerülő költségek volatilitása (*költség-ingadozás*), a finanszírozási kockázat a lejárat adósság megújításából (*megújítási kockázat*), valamint a nettó finanszírozási igény biztosításának kockázatából adódik; a finanszírozási kockázat mögött szélsőséges esetben a likviditási kockázat (fizetéseképtelenség), egyébként pedig *kamatkockázat* áll. A megújítási kockázat annak a kockázata, hogy egy nagyobb adósságlejáratot milyen piaci feltételek mellett lehet megújítani új kibocsátások révén, a kamatkockázat pedig a piaci kamatszintek megváltozásából

ered, aminek hatása van a költségvetési kamatkiadásokra. Utóbbi változó kamatozású konstrukciók esetén kamat-meghatározáskor is, egyébként pedig a lejáratok refinanszírozásakor az új kibocsátások hozamszintje kapcsán jelentkezik. Általánosan elfogadott, hogy e kockázatok csökkenthetők a minél hosszabb futamidőre, minél nagyobb mértékben rögzített (fix) kamatozás mellett történő hitelfelvételek révén. A legtöbb államadósság-kezelő szervezet törekszik a minél egyenletesebb lejáratú szerkezet kialakítására, azaz arra, hogy ne legyenek kiugróan nagyobb összegű lejáratokat tartalmazó évek, és különösen ne az elkövetkező egy-két évben.

Az adósságportfólió kezelése során felmerülő kockázatokat a modellben három nagy csoportba osztva vizsgáltuk, ezek: a költségingadozás, a kamatkockázat, valamint a megújítási kockázat.

4.4.1 Költségingadozás

A költségek volatilitásának mérésére használhatjuk a szórást, vagy a kockázatkezelői szempontból rendkívül népszerű kockázatosított érték (Value-at-Risk, VaR) típusú mutatószámokat is, amelyek esetén az adósságkezelői terminológiában a költségek kapcsán inkább a Cost-at-Risk (CaR) elnevezés az elterjedt. Az optimális adósságportfólió modell képes mind a szórás, mind a CaR, mind pedig a Conditional Cost-at-Risk (CCaR) számolására az elemző választásának megfelelően.

A diszkrét eloszlásokon értelmezett (Conditional) Cost-at-Risk kiszámolásához rendezzük növekvő sorrendbe az r darab realizáció költségeit: $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_r$. Ekkor $0 < \alpha < 100$ -ra:

$$CaR_\alpha = c_{\lfloor r \frac{\alpha}{100} \rfloor},$$

míg

$$CCaR_\alpha = \frac{1}{\lfloor r \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \rfloor + 1} \sum_{i=\lfloor r \frac{\alpha}{100} \rfloor}^r c_i,$$

ahol az $\lfloor \cdot \rfloor$ operátor jelöli az alsó egészrészt. Az α százalékos Cost-at-Risk megmutatja, hogy az esetek legrosszabb $100 - \alpha$ százalékában minimum (vagy megfordítva: az esetek α százalékában maximum) mekkora költsége keletkezhet a választott időtávon a választott finanszírozási szerkezet szerinti kibocsátásnak. Az α százalékos Conditional Cost-at-Risk pedig azt mutatja meg, hogy az esetek legrosszabb $100 - \alpha$ százalékában várhatóan mekkora lesz a finanszírozási szerkezet általi kibocsátás költsége.

4.4.2 Kamatkockázat

A második nagy csoportba tartozik az átlagos átárazódási idő, a duration, valamint a modified duration is. Az átlagos átárazódási idő (Average Time-to-Refixing - ATR) azt méri, hogy az adósságportfólió kamata átlagosan mennyi idő múlva fog megváltozni. Egy fix kamatozású instrumentum átárazódási ideje egyenlő a lejáratig hátralevő

idővel, míg egy változó kamatozású instrumentum átárazódási ideje a következő kamatmegállapításig hátralevő idő. Így

$$atr_t = \frac{\sum_{i=1}^N \zeta_{t,i} v_{t,i}}{\sum_{i=1}^N v_{t,i}},$$

ahol a t időpontban a portfólió átlagos átárazódási ideje a portfólióban szereplő egyes instrumentumok ($i \in 1, \dots, N$) következő kamatfixing időpontjáig hátralevő idejének súlyozott átlaga. $\zeta_{t,i}$ a t időpontban az i instrumentum következő kamatfixing időpontjáig hátralevő idő, míg $v_{t,i} = névérték_i db_{t,i} \left(\frac{100 - \sum_{k \leq t} cap_{k,i}}{100} \right)$, ahol $cap_{k,i}$ az i instrumentum k időponti tőketörlesztése százalékpontban kifejezve.

Az ATR tehát azt méri, hogy a hozamkörnyezet megváltozása milyen gyorsan épül be a kezelt portfólió költségeibe, vagyis a magasabb ATR érték a portfólió hozamingadozással szembeni védettségének magasabb szintjére utal.

A Duration (Macaulay-féle duration) egyedi kötvény esetén: az egyes kifizetések (tőke+kamat) években mért idejének súlyozott számtani átlaga, ahol a súlyok az adott időpontokhoz tartozó kifizetések jelenértékei:

$$D(i) = \frac{1}{P_i} \sum_{j=1}^n t_j PV(CF_j(i)),$$

ahol n a kifizetések száma, t_j az j . kifizetés időpontja, $CF_j(i)$ az j . kifizetés összege az i . ($i \in 1, \dots, N$) kötvény esetén, $PV(\cdot)$ a jelenérték jele (a kötvény lejáratig számított hozamával diszkontálva), P_i az i . kötvény jelenlegi piaci értéke, azaz $P_i = \sum_{j=1}^n PV(CF_j(i))$. Változó kamatozású kötvények esetén az instrumentum duration-jének a következő kamatmegállapítás (fixing) időpontjáig hátralevő időt tekintjük, években kifejezve. Kötvényportfólió esetén a duration az egyes kötvények duration-jének a portfólióelemek piaci értékével súlyozott számtani átlaga.

A Módosított duration i . ($i \in 1, \dots, N$) kötvény esetén az adott kötvény Macaulay-féle durationje osztva a piaci hozammal:

$$D^*(i) = \frac{1}{1 + r_i} D(i),$$

ahol r_i az i . ($i \in 1, \dots, N$) kötvény lejáratig számolt hozama. Kötvényportfólió esetén a módosított duration az egyes kötvények módosított durationjének a portfólióelemek piaci értékével súlyozott számtani átlaga.

4.4.3 Megújítási kockázat

Adósságkezelői szempontból a harmadik kockázati csoport az adósság lejárat szerkezetéből adódó kockázatra vonatkozik. A megújítási vagy refinanszírozási kockázat egy adott időszakra vonatkozóan azt méri, hogy a választott időszakon belül az adósságportfólió mekkora része jár le, azaz a portfólió mekkora részét szükséges megújítani. Válságidőszakban a piaci likviditás jellemzően kiszárad, ezért a lejáró

adósság refinanszírozása különösen drágává válhat, vagy rosszabb esetben egész egyszerűen nem jelentkezik kereslet az adósság megújításához. Emiatt az adósságkezelő nagy figyelmet fordít az adósságportfólió lejárat szerkezetének kellő simaságára, azaz a lejárat csúcsok elkerülésére, és a rövid időn belül lejáratú adósság arányának csökkentésére (pl. lejárat előtti visszavásárlások, csereaukciók révén). A refinanszírozási kockázat mérésére több mutatószám is rendelkezésre áll.

A lejáratig hátralévő átlagos idő (Average Term-to-Maturity, ATM) az adósságportfólió esetén azt méri, hogy átlagosan mennyi idő múlva szükséges megújítani az adósságot:

$$atm_t = \frac{\sum_{i=1}^N \eta_{t,i} v_{t,i}}{\sum_{i=1}^N v_{t,i}},$$

ahol a t időpontban a portfólió lejáratig hátralévő átlagos ideje a portfólióban szereplő egyes instrumentumok ($i \in 1, \dots, N$) lejáratig hátralévő idejének súlyozott átlaga. $\eta_{t,i}$ a t időpontban az i instrumentum lejáratig hátralévő ideje, míg $v_{t,i} = névérték_i \left(\frac{100 - \sum_{k \leq t} cap_{k,i}}{100} \right) db_{t,i}$, $cap_{k,i}$ az i instrumentum k időponti tőketörlesztése százalékpontban kifejezve. A refinanszírozási kockázat kisebb, amikor az atm nagyobb, hiszen a hosszabb lejáratig hátralévő idő alacsonyabb rövidtávon jelentkező megújítási igényt jelent.

A refinanszírozási arány tetszőleges időtáv esetén azt mondja meg, hogy az adósságportfólió mekkora százalékát szükséges megújítani az adott időtávon belül, így

$$refin_{t,\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{t,i} \mathbf{1}_{\{\eta_{t,i} \leq \lambda\}} l_i}{\sum_{i=1}^N v_{t,i}},$$

ahol az $\mathbf{1}_{\{x \leq \lambda\}}$ jelöli az indikátorfüggvényt, vagyis $\mathbf{1}_{\{x \leq \lambda\}} = \begin{cases} 1 & x \leq \lambda \\ 0 & x > \lambda \end{cases}$, továbbá $l_i = \begin{cases} k, & \text{ha } i \text{ lakossági állampapír,} \\ 1, & \text{egyéb esetekben,} \end{cases}$

ahol $k \in (0, 1]$ jeleníti meg a lakosság adósság-megújítási hajlandóságát, vagyis például a $k = 0,5$ azt jelenti, hogy a lakosság egy adott lakossági állampapírt várhatóan a lejáratkor még egyszer megújít. Feltehető tehát – miután az ÁKK sokéves tapasztalatai is alátámasztják ezt –, hogy a lakossági befektetők adósság-megújítási hajlandósága nagyobb, mint a nagybani piaci szereplőknek, különösen a refinanszírozási kockázat szempontjából kritikus válsághelyzetben. Ez a feltételezés hozzájárul a lakossági program létjogosultságának elméleti megalapozásához, és a modellbe így számszerűsítve is bekerült. A modell szerint egy lakossági állampapír refinanszírozási kockázata alacsonyabb – k függvényében –, mint egy piaci instrumentum refinanszírozási kockázata.

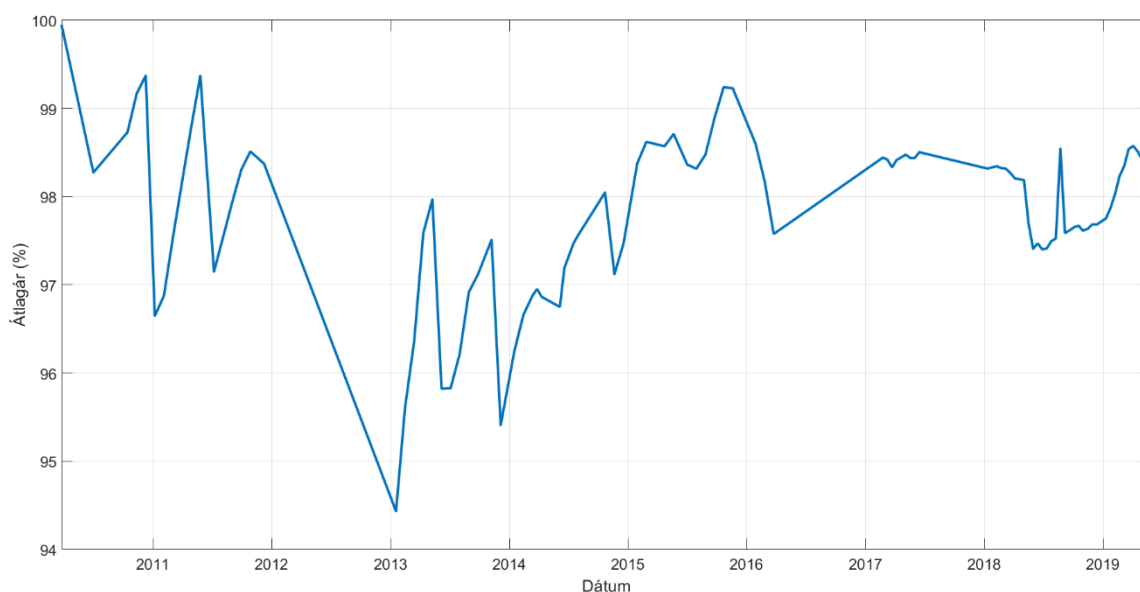
A refinanszírozási arány alacsonyan tartása stabilabbá teheti az adósságfinanszírozást azáltal, hogy az egyes időszakokban nem jelentkezik túlzottan magas finanszírozási igény, és a befektetők bizalmát is növeli, valamint hozzájárulhat a magasabb hitelminősítéshez is. Mind a lejáratig hátralévő átlagos idő, mind pedig a refinanszírozási arány segítségével számszerűsíthető a refinanszírozási kockázat

mértéke egy adott finanszírozási szerkezet mentén, ezáltal az beépíthető a modellbe, így hozzájárul az adósságkezelői szempontból értelmezhető optimális finanszírozási szerkezetek kialakításához.

4.5 Egyéb felmerülő kérdések kezelése a modellben

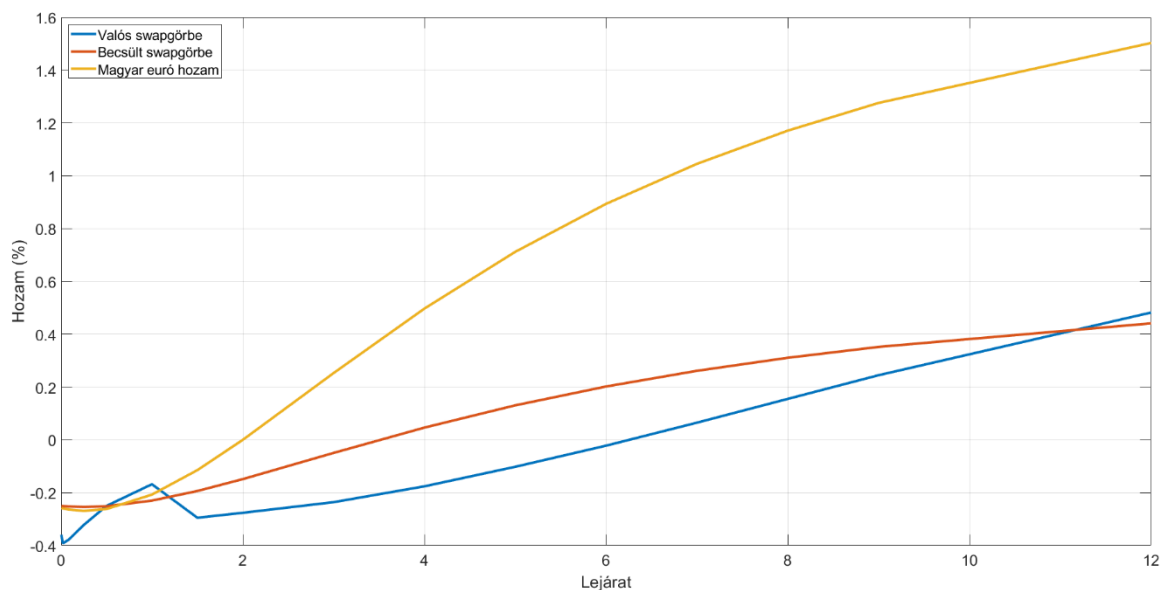
4.5.1 Változó kamatozású piaci kötvények

Az optimális adósságportfólió modell háromféle változó kamatozású piaci kötvényt használ: 5 éves (forint) Magyar Államkötvényt, 5 éves euró kötvényt és 10 éves euró kötvényt.



5. ábra: Változó kamatozású 5 éves Magyar Államkötvények aukciós átlagárai

Egy változó kamatozású kötvény kamata két részből áll: kamatbázis, illetve kamatprémium. Aukció esetén további költségként felmerülhet a *par* árfolyam alatti kibocsátás költsége, vagy nyereségként a *par* fölötti kibocsátás nyeresége. Érthető módon egy hosszú lejáratú változó kötvény vásárlója magasabb kamatot vár el, mint a kamatbázisnak használt rövid (pl. DKJ-hoz vagy BUBOR-hoz kötött) hozam. A modellben a forint változó kötvény kamatbázisa a becsült 3 hónapos BUBOR-ral egyenlő, amit historikus adatok alapján a 3 hónapos zérókupon hozam plusz 25 bázispont képlettel határoztunk meg. A valós gyakorlatnak megfelelően kamatprémium nincs ezeknél a kötvényeknél. A hozamprémiumot itt a múltbeli aukciós adatok alapján a *par* alatt történő kibocsátás helyettesíti (lásd 5. ábra). Az optimális adósságportfólió modell esetében az 5 éves forint változó kötvény a hasonló múltbeli kötvények kibocsátási árfolyamainak átlagán kerül kibocsátásra (2010.10.01. – 2019.05.31. között ez 97,84% volt).



6. ábra: Swapgörbe becslése, 2019. május 31.

A változó kamatozású euró kötvények a modellben ezzel ellentétben par árfolyamon kerülnek kibocsátásra, és negyedéves kamatfizetési gyakoriságot modellezünk. A kamatbázis a 3 hónapos magyar euró zérókupon hozam, a kamatprémium pedig a magyar euró swapgörbe 5, illetve 10 éves pontjainak becslött értéke. A swapgörbe meghatározása lineáris regresszióval történik. A swapgörbe historikus adataihoz hozzárendeljük a modell által is kezelt magyar euró hozamgörbe hasonló lejáratú, faktorokból becslött értékeit, majd keresztmetszetileg átlagoljuk azokat. Az így keletkezett swap idősort becsljük egy konstans és a magyar euró idősor segítségével. A kamatprémiumokat az így kapott regressziós paraméterek és az 5, illetve 10 éves magyar euró hozam segítségével határozzuk meg. A 6. ábra mutatja a magyar euró hozam alapján becslött swapgörbét, amely jól követi a tényadatokból álló swapgörbét.

4.5.2 A lakossági állampapírok

A modell kilencfajta lakossági állampapír kibocsátásának lehetőségét tartalmazza. Egyéves Magyar Állampapír (1MÁP), Féléves Magyar Állampapír (FMÁP), Kétéves Magyar Állampapír (2MÁP), Magyar Állampapír Plusz (MÁP+), 3 és 5 éves inflációhoz kötött Prémium Magyar Állampapír (PMÁP), valamint 4, 6 és 10 éves, piaci hozamhoz kötött Bónusz Magyar Állampapír (BMÁP) kerülhet kibocsátásra. Lakossági deviza instrumentumból új kibocsátás nem szerepel a modellben.

4.5.3 Kincstári Egységes Számla

A Kincstári Egységes Számla (KESZ) a Magyar Államkincsárnak a Magyar Nemzeti Banknál vezetett folyószámlája. Új állampapírok kibocsátása / hitelek felvétele esetén a befolyó összeg a KESZ-en kerül elhelyezésre, tehát nő a KESZ állománya. Egy adósságelem lejáratakor az ÁKK a KESZ terhére tudja teljesíteni a felmerülő kifizetést.

Az ÁKK aktívan menedzseli a KESZ állományát. A cél az, hogy a költségvetés likvid eszköz állománya minden nap érjen el egy biztonsági tartalékul szolgáló szintet, ami

az előre nem látott finanszírozási igények bekövetkezése esetén is külön intézkedés nélkül biztosítja a költségvetés likviditását. Az ÁKK feladata továbbá a KESZ nagymértékű ingadozásának csillapítása, a jegybanknál tartott pénzeszközök állományának stabilizálása (a piaci lehetőségek függvényében). Ez egy bizonyos szintnél magasabb KESZ állomány esetén aktív repó ügyletek útján történő forráskihelyezést, illetve túl alacsony KESZ szint esetén rövid futamidejű forrásbevonást jelent a piacról (3 hónaposnál rövidebb futamidejű DKJ-k kibocsátása, passzív repók kötése, esetleg rulírozó hitel lehívása).

Az ÁKK két szintet határoz meg a KESZ-re vonatkozóan. A minimális KESZ állomány a napi kincstári terhelések függvénye, az optimális állomány pedig egy esetleges hosszabb (6 hetes) finanszírozási kiesésre nyújt vésztartalékot.

Az optimális adósságportfólió modell utolsó fejlesztési lépcsőjeként a modell feladatai közé bekerült a KESZ állományának alakulásában rejlő kockázatok megfigyelése is. Ennek érdekében a modell az egyes optimális finanszírozási szerkezetekhez az optimális KESZ állomány meghatározását is célul tűzte ki. Az optimális KESZ állomány meghatározása a következő feltételezések és alapelvek mentén történik. Az n hónapos KESZ szükséglet a modellben n hónapon belül lejáró nem-DKJ állampapírok összesített állománya, azzal a kitétellel, hogy a lakossági papírok a rájuk vonatkozó refinanszírozási aránnyal megegyező súllyal számítanak bele. Azt feltételezzük, hogy az n hónapos KESZ szükséglet elegendő vésztartalék egy n hónapos finanszírozási kiesésre, figyelembe véve a lakosság nagyobb megújítási hajlandóságát és a DKJ iránti kvázi korlátlan keresletet. A modellben a tényleges KESZ állomány kezdeti értéke a tényadatok alapján kerül megállapításra. Azt feltételezzük, hogy adósságlejárat esetén a KESZ állomány a lejáró állománynak megfelelően csökken, kibocsátáskor a kibocsátott állománynak megfelelően nő. További – egyszerűsítő – feltevésünk, hogy a KESZ állományra nincsenek hatással a költségek. Feltesszük még, hogy a KESZ állomány havonta az aktuális deficitnek megfelelő összeggel csökken, a deficit pedig természetesen a kibocsátási igény része. A modellt úgy alakítottuk ki, hogy a KESZ állomány bizonyos (paraméterezhető) korlátok között mozogjon, amelyeket a két- és négyhónapos KESZ szükségletként határoztuk meg. Így a tényleges KESZ állomány a finanszírozási- és likviditási helyzettől függően tud változni. A modellben realizált KESZ állományok és kiszámolt KESZ szükségletek alapján a döntéshozó feladata az optimális KESZ állomány meghatározása.

4.6 Az optimalizálási folyamat

Az optimalizálási folyamat bemeneti adatai az előrejelzés során létrehozott *realizációk*. Minden realizáció (általában 1 000) tartalmazza a hozamgörbe-paraméterek és makro változók egy lehetséges időbeli lefutását. Az optimalizálás első *iterációjában* (az optimalizálás általában 200 iterációból áll) véletlenszerűen létrehozunk egy *finanszírozási szerkezetekből* álló (általában 25 000 elemű) halmazt¹⁴.

¹⁴ 2019. május előtt jellemzően 1 000 iterációt és 5 000 finanszírozási szerkezetet vizsgáltunk. A modell futtatások tesztelése szerint az újonnan alkalmazott értékek pontosabb eredményeket adnak.

Ezután minden finanszírozási szerkezet és realizáció párosításban végrehajtjuk az ún. kibocsátási algoritmust, mely során eldöntjük, hogy egy adott finanszírozási szerkezet esetén egy adott realizáció bekövetkeztekor melyik instrumentumból mikor (havi frekvenciával) mennyit bocsátunk ki. A kibocsátott állományok függenek a nettó finanszírozási igénytől, a lejáró állományoktól és a likviditási korlátoktól. Ezek után minden finanszírozási szerkezethez a realizációk alapján kiszámoljuk a költségeket és a különböző kockázati mutatók értékét. Ezt követően tovább lépünk a következő iterációra. A második és minden további iteráció annyiban különbözik az elsőtől, hogy már nem véletlenszerűen generálunk, hanem az optimalizálási algoritmus segítségével az előző halmazból alakítunk ki egy új finanszírozási szerkezet halmazát. Egy tipikus optimalizálás során a kibocsátási algoritmus ötmilliárd alkalommal fut le.

Az optimalizálási fázis tehát arra irányul, hogy meghatározzuk a költség és kockázat szempontból optimálisnak minősülő finanszírozási szerkezetek halmazát.

4.6.1 A finanszírozás modellezése

A kibocsátási algoritmus kialakítása és futtatása az optimalizálási folyamat kulcsfontosságú eleme. A kibocsátások szimulálása az a folyamat, amely kapcsolatot teremt egy egyértelműen számszerűsíthető input (finanszírozási szerkezet, vagyis a hosszú távon elérni kívánt portfólió arányok) és output (költség-kockázat mutatók) között.

A kibocsátásokat modellezni szükséges, mivel a valós állampapír-kibocsátási mechanizmus és termékpaletta túlságosan komplex ahhoz, hogy egy az egyben átültethető legyen egy szimulációs környezetbe. A modell ezért több egyszerűsítő feltételezést tartalmaz. A keretrendszer havi frekvenciával működik. Havonta egyszer történik kibocsátás a forintban denominált (szűkített) tervinstrumentumok körében. Devizaadósság (euróban denominált devizakötvény) kibocsátásra évente egyszer kerül sor. A modell nem tartalmaz csereaukciókat (azok kibocsátási lábát), valamint hitelfelvételeket sem. Ugyanakkor a kiindulási időpontban meglévő adósságállomány az összes, ténylegesen kibocsátott instrumentumot tartalmazza (a Mark-to-Market betéteket leszámítva). Ezen felül kötvény-visszavásárlásokat is modellezünk a kezdeti MÁK instrumentumok körében, azért, mert a szimuláció során kibocsátott új kötvénysorozatok állománya kezelhető méretű marad, nem alakulnak ki a kezdeti kötvényekhez hasonló 1000 – 1500 milliárd HUF állományú sorozatok. Meghatározunk egy havi visszavásárlási keretet, amely a modellillesztési időszakban teljesült MÁK visszavásárlási- és csereaukciók havi átlaga. A havi keretet pedig a 3 hónapon túl, de 3 éven belül lejáró, valamint 100 milliárd forintnál nagyobb kezdeti állományú MÁK-ok között osztjuk szét az állománnyal egyenes, valamint a lejáratig hátralevő idővel fordított arányban. Így például egy 200 milliárdos állományú, 6 hónap múlva lejáró és egy 400 milliárdos, 1 év múlva lejáró állományú papír azonos súlyt kap. Ezzel a megoldással simítani lehet a havi kibocsátásokat, ahogy az a valóságban is történik.

A terv kibocsátások 12 instrumentum keretében történnek a modellben:

- a nagybani papírok közül 3, 5 és 10 éves fix kamatozású Magyar Államkötvény, valamint 5 éves változó kamatozású Magyar Államkötvény.
- 12 hónapos Diszkont Kincstárjegy.
- 5 és 10 éves fix kamatozású, valamint 5 és 10 éves változó kamatozású, euróban denominált kötvény.
- A lakossági papírok közül 5 éves Magyar Állampapír Plusz, valamint 3 és 5 éves Prémium Magyar Állampapír.

A modell a 3- és 5-éves Prémium Magyar Állampapírok egymás közötti arányát fixnek tekinti a kiindulási adósságszerkezet arányában, így jelen esetben egy finanszírozási szerkezetet egy tizenegy elemű vektor határoz meg. A kiindulási adósságállomány összes instrumentuma is az előbb említett 12 közül a legmegfelelőbb kategóriába kerül besorolásra (futamidő és kamatozás alapján).

Az állampapír-kibocsátást modellező algoritmus bemeneti paraméterei a következők:

- egy n elemű s finanszírozási szerkezet vektor ($\sum_{i=1}^n s_i = 1$);
- az egyes realizációkhoz tartozó adatok, például a hozamgörbék, az euró-forint keresztárfolyam és a rezsinváltó modell állapotrealizációi, valamint a likviditási korlátok;
- egy realizációktól független, exogén költségvetési deficit vektor, ami a lejáró adósság megújításán felüli többlet-kibocsátási igényt határozza meg;
- egy paraméter, amely megadja, hogy hány hónap alatt szeretnénk elérni a finanszírozási szerkezet által meghatározott portfóliót;
- végül pedig a KESZ állományra vonatkozó felső és alsó korlát paraméterek (általában két és négy hónap lejáratai).

Az algoritmus első lépése az adott hónapban elérni kívánt teljes állampapír-állomány meghatározása. Ezt havi frekvenciával határozzuk meg. A modell a középtávú adósságszerkezetből eredő költségeket és kockázatokat hivatott becsülni, így az időhorizont a szimuláció első naptári éve plusz öt év, tehát 60 – 71 hónap. Az adott hónapban elérni kívánt teljes állampapír-állományt befolyásolja az államadósság pályája, amely a kezdetben fennálló államadósság és a felmerülő (exogén adott) költségvetési deficit függvénye, valamint a KESZ állományra vonatkozó korlátok.

Legyen d a szimulált hónapok száma, $v = [v_0 \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_d]'$ pedig az egyes hónapokban elérni kívánt a KESZ egyenlegével csökkentett állampapír-állomány. Továbbá legyen v_0 a tényadatok alapján a szimuláció kezdetekor fennálló teljes állampapír-állomány mínusz a KESZ akkori (szintén tényadatokból nyert) állománya. Az éves deficit vektorból létrehozunk egy havi $f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_d]'$ vektort. Ebből meghatározzuk v többi elemét: $v_i = v_0 + \sum_{j=1}^i f_j$, $(i = 1, 2, \dots, d)$. Továbbá létrehozunk egy v^{max} maximális állományvektort, ahol $v_i^{max} = v_i + KESZ_i^{max}$, $(i = 1, 2, \dots, d)$, valamint egy v^{min} minimális állományvektort, ahol $v_i^{min} = v_i + KESZ_i^{min}$, $(i = 1, 2, \dots, d)$. A $KESZ^{min}$ és $KESZ^{max}$ vektorok értelemszerűen az egyes időpontokban elérendő minimális és maximális KESZ állományt tartalmazzák. Megjegyzendő, hogy

az elérendő KESZ állományok, így a minimális és maximális állományvektorok is függenek az adott finanszírozási szerkezet-realizáció párostól.

A minimális és maximális állományvektorok használatával megengedjük, hogy az adósságállomány egy kellően nagy sávban mozogjon, amivel simítható a kibocsátások ütemezése. Ez a megoldás lehetőséget ad puffer képzésére egy nagyobb lejárat, vagy később bekövetkező esetleges válsághelyzet esetére, valamint elősegíti a gyorsabb átmenetet egy kiválasztott finanszírozási szerkezet felé. Ha m hónap alatt akarjuk elérni a kívánt állampapír-szerkezetet, akkor meg tudunk határozni egy $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_d]'$ súlyvektort a következő módon:

$$w_i = \begin{cases} i/m, & i < m \\ 1, & i \geq m \end{cases}$$

Nevezzük továbbá p -nek a kezdetben fennálló portfólió arányok vektorát. Ekkor legyen a $d \times n$ -es elérni kívánt tervmátrix T :

$$T_{ij} = v_i^{\min} \left((1 - w_i)p_j + w_i s_j \right).$$

T_{ij} megadja, hogy az i -edik hónapban a j -edik instrumentumból mekkora értékű állományt szeretnénk elérni.

Ezek után meghatározzuk az euró kibocsátási dátumokat. A modellben évente egyszer történik devizakibocsátás, mégpedig az év első olyan hónapjában, amelyre igaz, hogy az azt megelőző két hónapban csökkent az euró hosszú hozam (elforgatott Nelson-Siegel modell esetén az első két faktor összege). Ezzel arra kívánunk utalni, hogy a devizakötvény-kibocsátások terén az adósságkezelőnek nagyobb rugalmassága van, mint a rendszeres, kibocsátási naptárba rendezett forint-kibocsátások terén, és a modellben a hozamcsökkenések idejére helyezzük a deviza-kibocsátásokat. Ha egy adott naptári évben nincs ilyen hozamcsökkenés, akkor decemberben történik meg a kibocsátás. Értelmszerűen az időpontok realizációként változnak.

A szimuláció során minden hónapban először meghatározzuk a kinnlevő állampapír-állományt típusokra bontva. Az euróban denominált papírok állománya bekerülési (a kezdeti portfólió esetén a szimuláció induló időpontjában fennálló) árfolyamon kerül elszámolásra, a költségként kezelt árfolyamváltozásnak – a többi költségelemhez hasonlóan – nincs hatása a kibocsátásokra. A modellben új forint nagybani államkötvény-sorozat indítása negyedévente (január, április, július, október hónapokban) történik, a többi hónapban a már kinnlevő állományra történik rábocsátás, devizakötvényeknél pedig az évente történő kibocsátás egyben mindig új sorozatot is jelent. Új PMÁP sorozatok évente kerülnek kibocsátásra, januárban, ezt követően pedig havonta történik rábocsátás. A modellben ezáltal – a valósággal megegyező módon – előfordulhatnak nagyobb lejáratok, amelyeket megfelelően kezelni kell. Ennek bevett módja az előfinanszírozás, azaz a lejárat előtt hosszabb időszakon (több hónapon) keresztül már megemeljük a finanszírozási szerkezet által kívánt állampapír-típusból való kibocsátást, így egy nagyobb lejárat esetén nem egy hónap alatt kell fedezni a törlesztés összegét. A havonta kibocsátott rövid papírnál (12M DKJ) nem alkalmazzuk az előfinanszírozást, a deviza és a változó lakossági

(PMÁP) instrumentumokat 12 hónappal, a piaci forint államkötvényeket (MÁK), és a MÁP+ sorozatokat 6 hónappal a lejárat előtt kezdjük megfinanszírozni. Az euróban denominált kötvényeket pedig a lejáratot megelőző naptári év januárjában előfinanszírozzuk, hogy a lejárat előtt legyen legalább egy lehetőség euró kibocsátásra.

Az egy időpontban történő nettó állampapír-kibocsátásokat meghatározó algoritmushoz nevezzük most a T mátrix i -edik időponthoz tartozó sorát t vektornak, továbbá az i időpontbeli aktuális állampapírállomány vektorát u -nak, az előfinanszírozandó állomány vektorát u' -nek. Az i -edik időpontban az x kibocsátási vektort a következőképpen határozzuk meg:

$$\text{lexmax}_x \left(\min \left(\frac{x + u - u'}{t} \right) \right)$$

$$f.h.: x \geq 0,$$

$$x \leq \max(0, t - u + u'),$$

$$Lx \leq b,$$

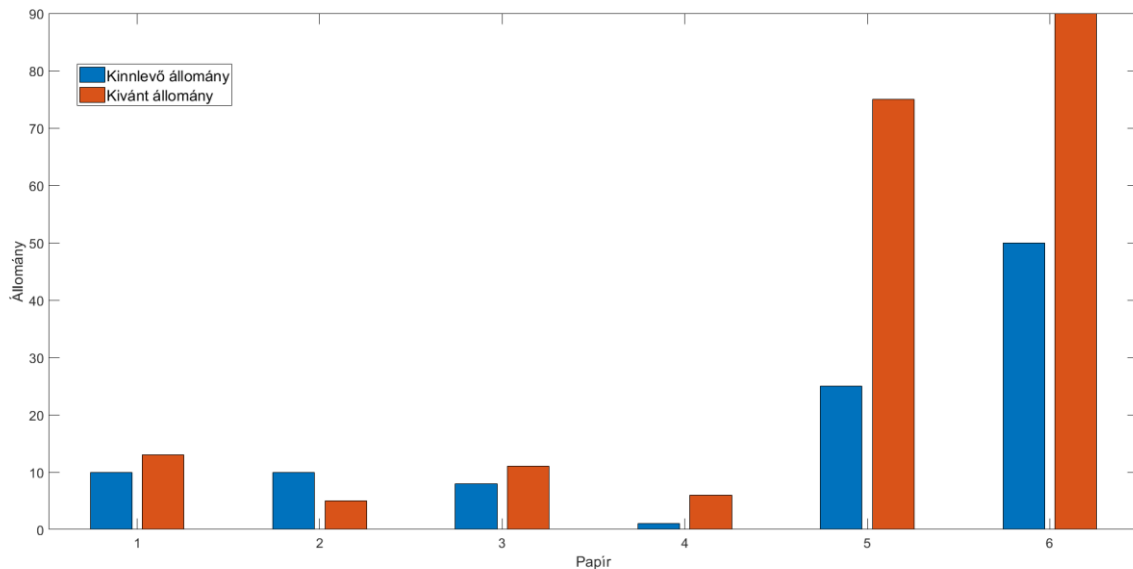
$$1'_n(x + u) \leq \max(v_i^{\max}, 1'_n u),$$

ahol b a likviditási korlátok vektora, L pedig a likviditási korlátokhoz tartozó összegző mátrix. Likviditási korlátokból a következőket használjuk: lakossági, deviza, DKJ, 3 éves MÁK, 5 éves MÁK, 10 éves MÁK, változó kamatozású MÁK.

Az ún. lexikografikus maximin feladatot úgy kell értelmezni, hogy az instrumentumok i időponti kalkulált állományának és az elérni kívánt állományának arányai közül maximalizálni akarjuk a legkisebbet. Ha ezt többféle módon el tudjuk érni (ami eléggé valószínű, hiszen a likviditási korlátok miatt a legalacsonyabb arányú állampapír aránya nem biztos, hogy eléri a második legalacsonyabb szintjét), akkor a második legkisebb arányt maximalizáljuk, és így tovább. A lexikografikus maximin feladat a likviditási korlátokat leszámítva hasonlít Fleiner és Sziklai (2012) „Constrained Equal Losses” szabályához.

Az x vektoron a lexikografikus maximin eljárás után még egy esetben módosítunk. Ha nem teljesül az $1'_n(x + u) \geq v_i^{\min}$, tehát a minimális mennyiséget sem sikerült valamilyen oknál fogva kibocsátani, akkor a hiányzó mennyiség finanszírozására DKJ kerül kibocsátásra menekülő instrumentumként, akár a DKJ likviditási korlátján túl. A DKJ likviditási korlátján normál körülmények között nem akarunk túllépni, mert az többletköltséggel jár, viszont előfordulhat olyan helyzet, amikor nincs más választás.

Nézzünk most egy fiktív, szemléltető célú példát 6 papírral. Tegyük fel, hogy csak forint papírjaink vannak, továbbá legyen az első papír a menekülő instrumentum. Legyen a kinnlevő papírok állományvektora $u = [10 \ 10 \ 8 \ 1 \ 25 \ 50]'$, az elérni kívánt állomány vektora pedig $t = [13 \ 5 \ 11 \ 6 \ 75 \ 90]'$. Továbbá tegyük fel, hogy a nem jár le a következő négy hónapban papír (így KESZ állománynak 0-nak kell lennie), valamint legyen az előfinanszírozandó állomány $u' = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$. Ekkor $v_i^{\max} = v_i^{\min} = 1'_6 t = 200$.



7. ábra: Papírok kinnlevő és elérni kívánt állományai a példában

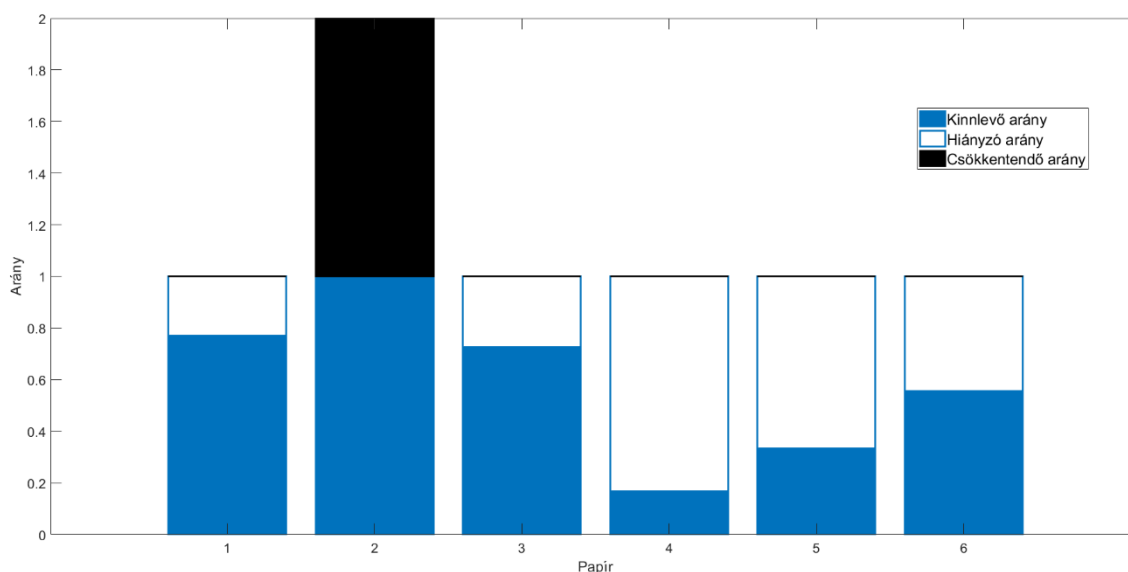
Látható, hogy a második papírból több a kinnlevő állomány a kibocsátani kívánt állománynál. Ebből a papírból ebben a példában nem bocsátunk ki semennyit. Továbbá, legyen négy különböző likviditási korlátunk:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = [2 \quad 10 \quad 28 \quad 50]'$$

A harmadik, negyedik és ötödik papírhoz közös, a többihez egyedi likviditási korlát tartozik.

A 8. ábra mutatja az $\frac{u-u'}{t}$ arányokat. Mint már említettük, a második papír arányát csökkenteni szeretnénk, tehát nem bocsátunk ki belőle addig, amíg fennáll ez a helyzet. Mivel egy lexikografikus maximin feladatunk van, ezért először a negyedik papír arányát szeretnénk növelni. Ha elérjük az ötödik papír arányát, akkor a negyedik és ötödik papírért egyszerre növeljük, és így tovább, amíg elérjük a likviditási korlátokat, betöltjük a hiányzó arányokat, vagy elérjük v_i^{max} -ot.



8. ábra: Kibocsátott és hiányzó arányok

A kibocsátási vektorra eredményül az adódik, hogy $x = [2 \ 0 \ 0 \ 3 \ 25 \ 40]'$. Az első kötvénynek elértük a likviditási korlátját. A hatodik kötvénynél elértük a kibocsátani kívánt mennyiséget. A negyedik és az ötödik kötvény esetében $2/3$ -os telítettséget értünk el ($4/6, 50/75$), de beleütköztünk a közös likviditási korlátba. A harmadik kötvény aránya ($8/11$) ennél nagyobb, ezért abból nem bocsátottunk ki, hiszen ugyanaz a likviditási korlát vonatkozik rá. Azonban figyelniük kell még arra is, hogy $v_i^{min} = 200$, viszont $1'_6(u + x) = 174$. Így az első kötvényből, ami a menekülő instrumentum, még 26-ot ki kell bocsátani a finanszírozás megvalósítása végett. Ennek ugyan elértük a teoretikus likviditási korlátját, azonban likviditási költség felvállalása mellett ki tudunk bocsátani bármekkora mennyiséget.

4.6.2 Optimális portfólió-szerkezetek meghatározása

Az optimális adósságportfólió modell célja olyan finanszírozási szerkezetek meghatározása, amelyek minimalizálják az adósságportfólió költségét és kockázatait. Kockázati mértékeknek a szórást, az egy éven belüli refinanszírozási arányt és az ATR-t választottuk. Értelemszerűen az ATR-t maximalizálni, míg a többi kockázati mutatót és a költséget minimalizálni szeretnénk. Ezen célok elérése ütközik egymással, így az optimalizálás célja valamilyen trade-off keresése a négy célfüggvény között.

A több célfüggvényes optimalizáló algoritmusok két csoportra oszlanak. Az *a priori* metódusok a döntéshozó preferenciáinak súlyozásából indulnak ki, és az alapján határoznak meg egy optimális megoldást, míg az *a posteriori* módszerek egy Pareto-optimalis megoldáshalmazt alakítanak ki, és ezután lehet ezek közül választani. A döntéshozói preferenciák előzetes számszerűsíthetőségének hiányában ez utóbbi megoldás került implementálásra a modellben, természetesen még ezzel is általában nem abszolút domináns finanszírozási szerkezetek adódnak, tehát a döntéshozói preferenciának itt is meg kell jelennie a választásban.

A Pareto-optimalizáló algoritmusok leggyakrabban heurisztikus elven működnek, és az evolúción, vagy más, a természetben előforduló jelenségen alapuló algoritmust használnak. Az ÁKK optimális adósságportfólió modelljében Sun, Zhu és Cai (2017) algoritmusuk került implementálásra, amely az IEEE Congress on Evolutionary Computation (Cheng és mtsai. 2017) konferencián az algoritmusok versenyén első helyen végzett¹⁵.

Az optimalizálási feladatra a következő matematikai leírás adható:

$$\min_{f.h. \sum_{s=1}^n \forall s_i \in S: 0 \leq s_i \leq 1} G(s), \text{ ahol}$$

$$G(s) = (cost(s), std(s), refin(s), -atr(s))$$

valamint s egy finanszírozási szerkezet, $cost(s)$, $std(s)$, $refin(s)$, és $atr(s)$ pedig az adott finanszírozási szerkezethez tartozó költség, szórás, refinanszírozási kockázat (egyéves refinanszírozási arány), valamint ATR. Egy finanszírozási szerkezetet a vizsgált instrumentum-típusok részarányát leíró 0 és 1 közötti, 1 összegű arányszámok vektora határoz meg, amely a kibocsátási algoritmus inputját képezi. Az általunk használt optimalizálási algoritmus nem egyenként kezeli a finanszírozási szerkezeteket, hanem az evolúciós heurisztika alapján egy nagyobb, változatlan egyedszámú populációt (finanszírozási szerkezet mátrixot) használ, és azokból alakít ki egy négydimenziós Pareto-optimális teret.

A Pareto-optimális tér azon finanszírozási szerkezetek halmaza, amelyeket nem dominál egyetlen más finanszírozási szerkezet sem a vizsgált költség és kockázati mutató(k) alapján, tehát nincs egyetlen olyan finanszírozási szerkezet sem, amelynek mindegyik célfüggvényértéke legalább olyan jó, mint a kérdéses finanszírozási szerkezetnek. A Pareto-optimális finanszírozási szerkezetekből kialakítható egy úgynevezett Pareto-front, amely a célfüggvények *a posteriori* súlyozásával dominancia-elven kialakít egy két dimenzióban ábrázolható finanszírozási szerkezet halmazt. Így ábrázolni lehet például a költség-szórás szerint optimális frontot. Létrehozhatunk továbbá egy kompozit kockázati mértéket, amelyben a szórás, az ATR és a refinanszírozási kockázat egyenlően fontos, és ezek alapján is meg lehet vizsgálni a költség-kompozit kockázat trade-off-ot. Továbbá, a kompozit kockázati mértéken belül az egyes kockázati mértékeknek akár eltérő súlyt (fontosságot) is adhatunk.

A modellben általában $N = 5\,000$ finanszírozási szerkezetből álló P populációt használunk. Ha egy n darab instrumentumból álló finanszírozási szerkezetet akarunk meghatározni, akkor álljon a kezdeti populáció egy $x \in P$ vektora n darab $[0, 1]$ intervallumba eső véletlen számból. Tetszőleges x vektorból a finanszírozási szerkezet egy $x_j \in x$ -hez tartozó elemét a következő módon tudjuk meghatározni:

$$S(x_j) = \frac{-\ln(x_j)}{\sum_{i=1}^n -\ln(x_i)}.$$

¹⁵A konferencián hét algoritmust versenyeztettek, és több mutatót figyelembe véve rangsorolták azokat.

Ekkor $s = S(x)$, valamint legyen $F(\cdot) = G(S(\cdot))$. Ezzel egyenletes eloszlást hoztunk létre az n -szimplex, tehát teljesül az összegre való egyenlőségi korlát, valamint az egyes súlyok is a $[0, 1]$ intervallumba fognak esni.

Az x vektorok által felépített P populációból Sun és szerzőtársai (2017) algoritmus alapján sarokmegoldásokat keresünk. Egy m célfüggvényes probléma sarokmegoldása egy olyan $k < m$ célfüggvényes alprobléma Pareto-optimális megoldása, amelynek pontosan egy Pareto-optimális megoldása létezik. A sarokmegoldásokat $P^* \subseteq P$ nemdominált részhalmazából tudjuk megközelíteni.

Először a koordinátatengelyhez legközelebbi megoldásokat adjuk a P_c sarokmegoldás-halmazhoz:

$$P_1 = \left\{ x \mid x = \underset{x \in P^*}{\operatorname{argmin}} \operatorname{dist}^\perp(F(x), e^i), i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

ahol $\operatorname{dist}^\perp(a, b)$ két vektor ortogonális távolsága és e^i az i -edik tengely irányvektora.

Ez alapján kiszámoljuk a nadír pontot:

$$z^{nad} = (z_1^{nad}, z_2^{nad}, \dots, z_m^{nad})',$$

ahol $z_i^{nad} = \max_{x \in P_c} f_i(x)$, $f \in F$.

Végül meghatározzuk a koordinátatengelyek mentén lévő legalacsonyabb értékű megoldásokat:

$$P_2 = \left\{ x \mid x = \underset{x \in P^*}{\operatorname{argmin}} f_i(x), i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

melyek közül a nadír pontnál nagyobb célfüggvény-értékkel rendelkezőket hozzáadjuk a sarokponti megoldások halmazához.

Az optimalizáló algoritmus a kezdeti sarokpont megadása után két eljárást iterál, a reprodukciós, valamint a dominancián, térfelosztáson és közbezárt szögön alapuló (dominance, space division and angle based selection, DSA) szelekciós eljárást. A gyakorlatban 1 000 iterációt végzünk, melynek eredményeképp kellően változatos és optimális finanszírozási szerkezeteket kapunk.

A reprodukciós algoritmusban Sun és szerzőtársai (2017) kétféle módszertant alkalmaznak. Minden iterációban véletlenszerűen vagy „kiaknázó keresés” vagy „felfedező keresés” történik. A kiaknázó keresés célja, hogy a már meglévő finanszírozási szerkezetek közelében találjon még optimálisabb megoldásokat. A felfedező keresés a sarokponti megoldásokból kiindulva terjeszti ki a teret, ezáltal változatosabb, több dimenzióban Pareto-optimális finanszírozási szerkezeteket hoz létre. Az algoritmus kezdeti fázisában a szélsőséges finanszírozási szerkezetek megtalálása a cél, így 90% eséllyel történik kiaknázó, 10% eséllyel felfedező keresés.

A kiaknázó keresés során minden $x \in P_c$ sarokponti megoldáshoz tartozó transzformálás előtti vektor egyes elemei $1/n$ eséllyel mutálódnak, de legalább egy elemet mindenképpen megváltoztatunk. Az x vektor i -edik komponensének leszámazottját jelöljük x_i^c -vel:

$$x_i^c = x_i + 0,5(rand - 0,5)(1 - rand^\alpha),$$

$$\alpha = 0,7 * \left(- \left(1 - \frac{fe}{fe_m} \right) \right),$$

ahol $rand$ a $[0, 1]$ intervallumba eső véletlen szám, fe a jelenlegi iteráció száma, fe_m pedig a maximális iterációk száma (esetünkben 1 000). A kiaknázó keresés során csak a sarokponti megoldások generálnak leszármazottakat, összesen N darabot egyenletesen elosztva. Az így létrehozott populációt nevezzük Q -nak.

A felfedező keresés két lépésből áll. Az első lépésben egy szimulált bináris keresztezést (SBX) hajtunk végre. Először két egyenlő részre osztjuk a P populációt, és $\{x_1, x_2\} \in P \times P$ vektorpárokat képezünk belőle, így $N/2$ vektorpárt kapunk. Ezután mindegyik vektorpár minden elempárjához meghatározunk egy $[0, 1]$ intervallumba eső μ véletlen számot. Ekkor μ egy $\frac{N}{2} \times n$ -es mátrix lesz. Ekkor legyen:

$$\beta = \begin{cases} (2\mu)^{\frac{1}{21}}, & \mu \leq 0,5 \\ (2 - 2\mu)^{-\frac{1}{21}}, & \mu > 0,5 \end{cases}.$$

Ezek után β minden elemének egyenként 50% eséllyel megváltoztatjuk az előjelét. Végül β minden elemét egyenként 50% eséllyel 1-gyel tesszük egyenlővé. Végül minden $\{x_1, x_2\} \in P \times P$ vektorpárból készítünk egy $\{x_1^c, x_2^c\}$ vektorpárt a következő módon:

$$\begin{aligned} x_1^c &= \frac{x_1 + x_2}{2} + \beta_{\{x_1, x_2\}} \frac{x_1 - x_2}{2} \\ x_2^c &= \frac{x_1 + x_2}{2} - \beta_{\{x_1, x_2\}} \frac{x_1 - x_2}{2}. \end{aligned}$$

A második lépésben minden $x^c \in P^c$ vektor minden elemén $1/n$ eséllyel polinomiális mutációt hajtunk végre. Először minden résztvevő elemhez meghatározunk két véletlen számot a $[0, 1]$ intervallumban (μ_1, μ_2) . Ekkor legyen:

$$x^p = \begin{cases} x^c \left((2\mu + (1 - 2\mu)(1 - x^c))^{21} \right)^{\frac{-20}{21}}, & \mu_1 \leq \frac{1}{n} \cap \mu_2 \leq 0,5 \\ x^c \left(1 - (2(1 - \mu) + 2(\mu - 0,5)(1 + x^c))^{21} \right)^{\frac{1}{21}}, & \mu_1 \leq \frac{1}{n} \cap \mu_2 > 0,5 \\ x^c, & \mu_1 > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Végül nevezzük a mutálásra nem került és a mutált vektorokból kialakított populációt Q -nak. Említésre került, hogy kezdetben 90% eséllyel végzünk kiaknázó és 10% eséllyel felderítő keresést. Legyen most:

$$\Delta t = \max_{x \in \{1, 2, \dots, m\}} \frac{|z_i^{nad}(t) - z_i^{nad}(t - 50)|}{|z_i^{nad}(t - 50)|},$$

ahol $z_i^{nad}(t)$ az i -edik célfüggvény t -edik iterációban történt nadír-approximációja. Amint teljesül $\Delta t < 0,001m$ egyenlőtlenség, a továbbiakban 10% eséllyel végzünk kiaknázó és 90% eséllyel felderítő keresést. Tehát egy rövidebb tanulóperiódus után

sikerült a sarokmegoldásokat kellő pontossággal megtalálni, mely után az optimalizálási tér feltöltése és többdimenziós Pareto-optimális finanszírozási szerkezetek keresése lesz a cél.

Sun és szerzőtársai (2017) algoritmusának következő lépése az eredeti P és a hasonló méretű felfedező vagy kiaknázó kereséssel megkapott Q populáció összefésülése. Az így kapott R populációból pedig a DSA-szelekciós algoritmussal képezünk egy új N elemszámú P populációt. A DSA-szelekció első lépése az R populáció rangsorolása dominancia alapján $(R_1, R_2, \dots, R_l)$ szintekre. Értelemszerűen a Pareto-optimális finanszírozási szerkezetek lesznek R_1 -ben. Ezek után meghatározásra kerül az ideális z^* pont a következő módon:

$$z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)',$$

ahol $z_i^* = \min_{x \in P_c} f_i(x)$.

A P_c sarokmegoldások halmaza R_1 -ből kerül kiszámolásra. Ezek után kiszámoljuk a z^{nad} nadír pontot, amely egy külső és egy belső térre osztja az optimalizálási teret. A nadír pontot célfüggvény-értékben Pareto-domináló finanszírozási szerkezetek kerülnek a belső térbe, a többi a külső térbe. R_1 számossága alapján három eset lehetséges:

1. $|R_1| > N$: Ekkor legyen P_{in} az R_1 belső térben lévő részhalmaza, P_{out} pedig a külső térben lévő részhalmaz. Ekkor P_{in} számossága alapján három eset lehetséges:
 - a. $|P_{in}| > N$: Ekkor bezárt szög alapú szelekciót végzünk P_{in} -en, így alakul ki P .
 - b. $|P_{in}| < N$: Ekkor a z^* -hoz legközelebbi $N - |P_{in}|$ darab P_{out} pont és P_{in} uniója lesz P .
 - c. $|P_{in}| = N$: Ekkor maga P_{in} lesz P .
2. $|R_1| < N$: Ekkor a z^* -hoz legközelebbi $N - |R_1|$ darab $R \setminus R_1$ pont és R_1 uniója lesz P .
3. $|R_1| = N$: Ekkor maga R_1 lesz P .

A bezárt szög alapú szelekció (angle-based selection, ABS) lényege, hogy a Pareto-optimális megoldáshalmazból az egymástól leginkább különböző megoldásokat választjuk ki, így az optimalizálási teret igyekszünk minél jobban betölteni. Az ABS-szelekció algoritmus (Sun, Zhu és Cai 2017) a célfüggvény-értékek normalizálásával kezdődik:

$$F^n(x) = (f_1^n(x), f_2^n(x), \dots, f_m^n(x))',$$

ahol $f_i^n(x) = \frac{f_i(x) - z_i^*}{z_i^{nad} - z_i^*}$. Egy $\{x_1, x_2\}$ megoldás-vektorpár közötti közbezárt θ szög a következő módon számolható ki:

$$\theta(x_1, x_2) = \cos^{-1} \left(\frac{F^n(x)' F^n(y)}{\|F^n(x)\| \|F^n(y)\|} \right).$$

P -hez először a P_c sarokmegoldásokat adjuk hozzá, majd mindegyik $x_i \in P_{in} \setminus P_c$ vektorra meghatározzuk Θ_i -t:

$$\Theta_i = \min_{x_j \in P_c} (\theta(x_i, x_j)).$$

Ezek után minden lépésben hozzáadjuk P -hez a legnagyobb Θ_i -vel rendelkező x_i megoldást, és mindegyik $x_j \notin P$ -re újra kiszámoljuk Θ_j -t a következő módon:

$$\Theta_j = \max(\Theta_j, \theta(x_i, x_j)).$$

Addig folytatjuk az eljárást, amíg P megoldáshalmaz N elemű lesz. Mindegyik esetben egy N elemű P populációt kaptunk, amellyel tovább lephetünk a következő iterációra.

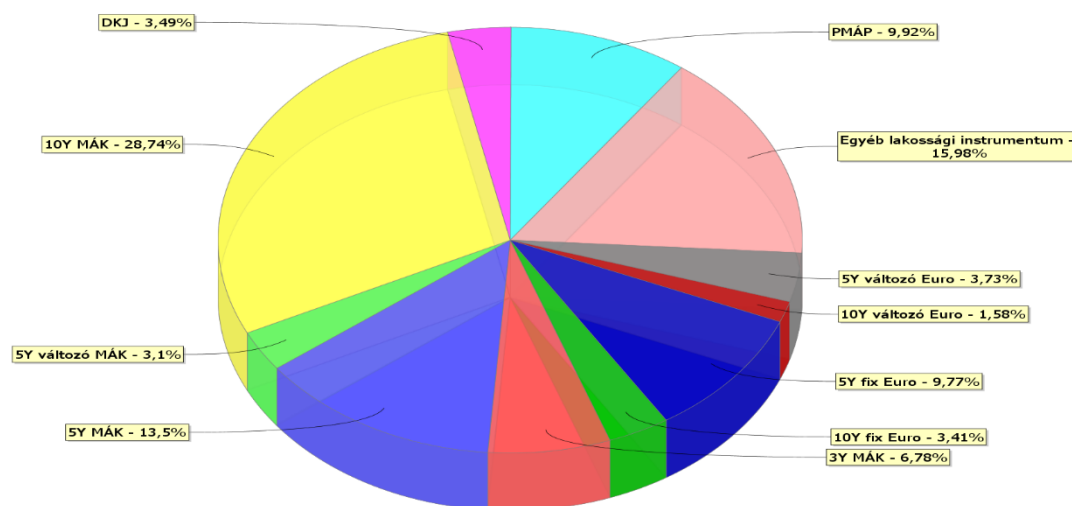
Az optimalizálás végeztével a négydimenziós térben Pareto-optimális finanszírozási szerkezeteket kapunk. Ezek mindegyike a négy célfüggvény valamilyen súlyozása szerint optimális. Innentől a döntéshozó feladata meghatározni a preferencia sorrendet vagy a célfüggvények súlyozását.

5 Eredmények

A következőkben a fenti folyamatok alapján kapott eredményeket egy konkrét futtatás, a 2019. május 31-i kiinduló adósságszerkezet szerinti modellezés eredményei segítségével kívánjuk szemléltetni.

5.1 Felhasznált adatok

A modell kiindulási állapotát a futtatás kezdő időpontjaként meghatározott dátumhoz tartozó aktuális adósságállomány képezi. Ez az ÁKK által kezelt, az MtM betétek és a repók nélkül tekintett teljes adósságállományt jelenti. A valós kiinduló állapot használata az egyik olyan tényező, mely által a modell képes a gyakorlatban is jól használható eredményeket adni.



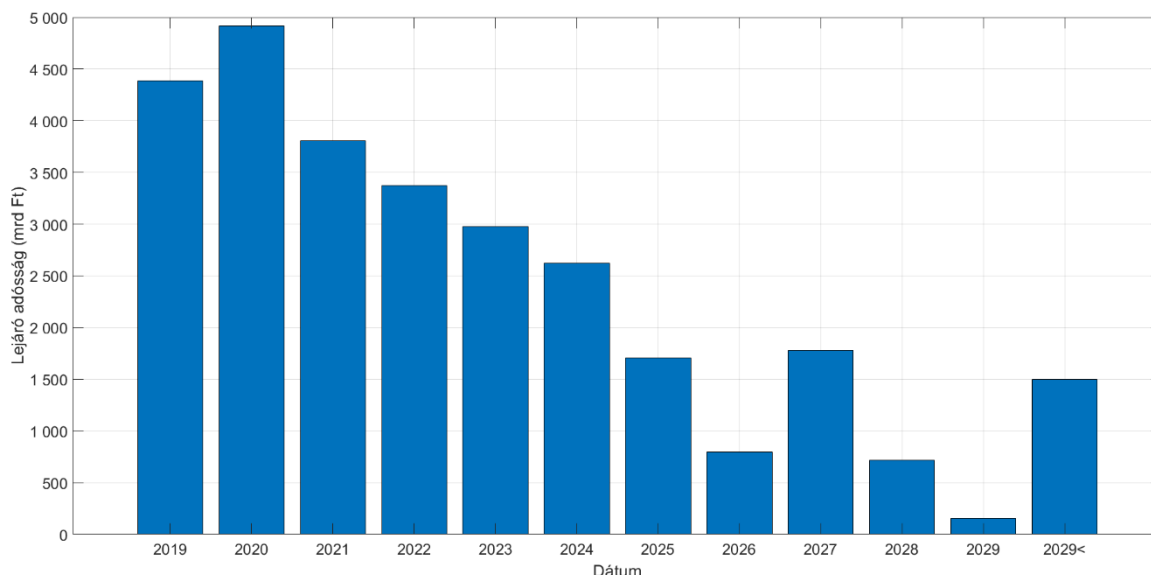
9. ábra: A 2019. május végi adósságportfólió lejárat és típus szerinti bontása a modellben kezelt kategóriákba sorolva¹⁶

A 9. ábra a kiinduló állomány instrumentumtípus (és azon belül különböző futamidők) szerinti megbontását mutatja a modell által kezelt instrumentumoknak megfelelően. A teljes vizsgált adósságállomány 2019.05.31-én 28 772 milliárd forint volt. A devizaadósság részaránya 18,5%-os volt, míg a lakossági instrumentumok részaránya 25,9%. A forint adósságállományon belüli fix-változó kamatozás szerinti részarány 62,8 – 37,2% arányban alakult (a kincstárjegyeket változó kamatozású instrumentumoknak tekintve), a devizaadósságon belüli fix-változó kamatozás szerinti részarány pedig 71,3 – 28,7% arányban.

A 10. ábra mutatja a kiindulási állomány lejárat profilját. Évekre bontva szerepel rajta, hogy adott évben mekkora lejáratú adósságállomány refinanszírozására lesz

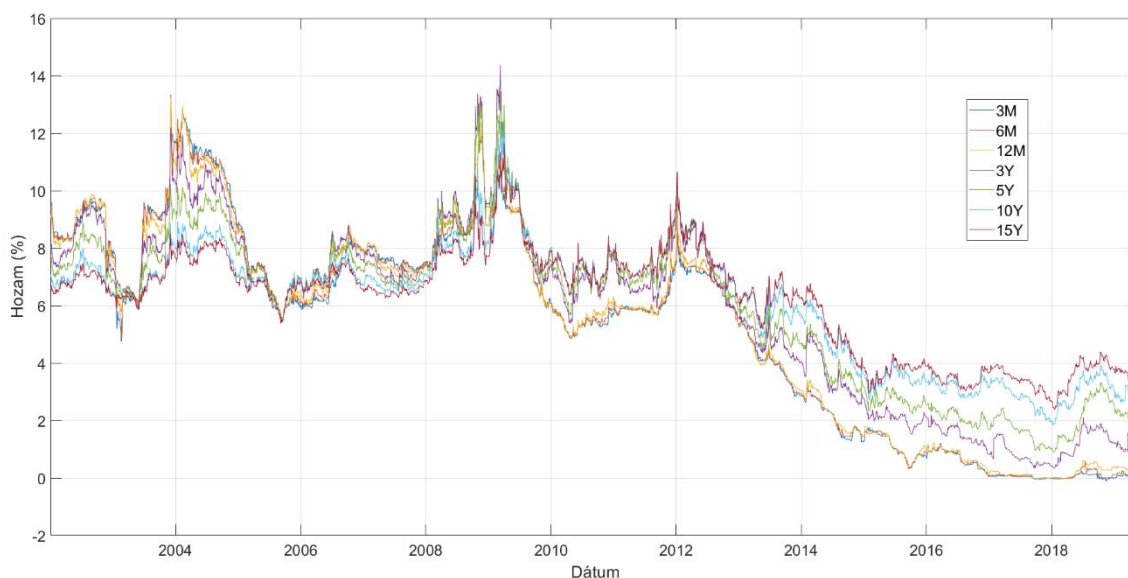
¹⁶ A modell 1MÁP, FMÁP, KTJ, KTJP, 2MÁP és BMÁP lakossági instrumentumokból új kibocsátást már nem tartalmaz.

szükség. A rövid lejáratú instrumentumok magas aránya miatt 2019 hátralévő hónapjaiban illetve a 2020-as év során a teljes adósság több mint 32%-a lejár, így mintegy 9 000 milliárd forintnyi kibocsátási igény keletkezik pusztán a lejáró adósság újrafinanszírozásából.



10. ábra: A 2019. május végi adósságállomány lejáráti szerkezete

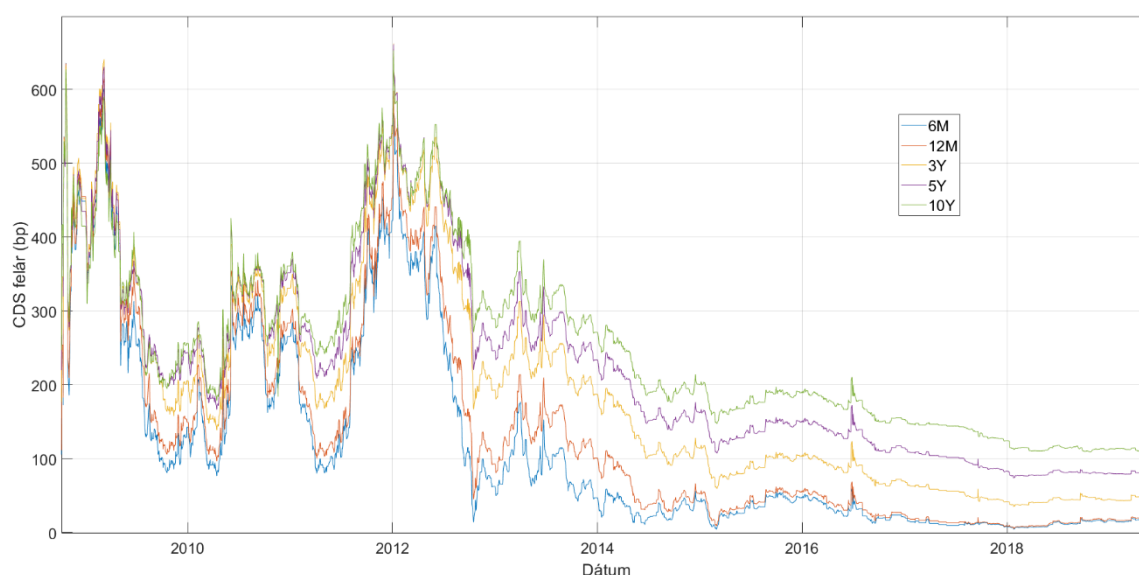
A modell 12 hónapos diszkont kincstárjegyet, 3, 5 és 10 éves fix kamatozású forint államkötvényt (MÁK), 5 éves változó kamatozású MÁK-ot, devizakötvények esetén 5 és 10 éves fix, illetve 5 és 10 éves változó kamatozású, euróban denominált kötvényeket, valamint a lakossági program részeként 5 éves MÁP+, valamint 3 és 5 éves PMÁP instrumentumokat bocsát ki egy adott szimuláció részeként. A felsorolt instrumentumok tulajdonságai az ÁKK által alkalmazott paraméterekkel.



11. ábra: Benchmark állampapírok hozamainak alakulása

A magyar hozamgörbe becslésére a forint állampapírok másodpiaci árjegyzéseit tartalmazó adatbázist használjuk, ugyanis az elsődleges forgalmazók árjegyzései az ÁKK által szabályozott módon szolgáltatott árfolyam adatok a piacon. Az adatbázisban napi frekvencián megtalálhatóak az elsődleges forgalmazói árjegyzésbe bevont egyes instrumentumok adott napi bid és ask (vételi és eladási) árjegyzései. A 11. ábra mutatja a 2008.10.01. – 2019.05.31. időszak között az aktuálisan benchmark státuszban lévő instrumentumok másodpiaci árjegyzéséből kapott hozamait. Jól kivehető a válság hatása a magyar hozamgörbe alakulásán a 2008-2009. években, valamint a görög adósságválság hatása 2011-2012-ben, majd az utána következő kedvező gazdasági helyzet, illetve az MNB kamatvágási ciklusának és a nemzetközi folyamatok következményeként meredeken csökkenő hozamkörnyezet (különösen a rövid hozamok esetén).

Az euró hozamgörbe illesztéséhez a Refinitiv (korábban Thomson Reuters) euró zérókupon hozamgörbe pontjainak historikus adatbázisát használjuk, a csőd kockázati felár (CDS spread) meghatározásához pedig a Refinitiv magyar CDS görbe pontjainak adatbázisát (12. ábra).



12. ábra: Magyar CDS felár alakulása

A hazai inflációs adatok a KSH által közölt havi adatok, míg az eurózóna inflációs adatai az Eurostat által közölt havi adatok. Az EUR/HUF keresztárfolyam adatokat a Magyar Nemzeti Bank honlapjáról töltjük le. Az aukciós kereslet/kínálati adatokat az ÁKK aukciós adatbázisából nyerjük ki, a kibocsátási adatokat, valamint az egyes instrumentumok jellemzőit is az ÁKK vonatkozó adatbázisaiból használja fel a modell.

5.2 A modellillesztés előzetes feltevései

A modellillesztéshez havi frekvenciájú adatokat használtunk, amelyek a 2008. október és 2019. május közötti adatokat tartalmazzák, így összesen $n = 128$ adatpont áll rendelkezésünkre az egyes adatsorok esetén. A modell illesztéséhez a korábbiak

során bemutatott Markov rezsimmátrix állapotát modelleztük. Alapfeltevésünk volt, hogy a gazdaság alapvetően két állapot között váltakozik. Az első rezsimek mint a gazdaság nyugalmi helyzetét vagy konjunktúra időszakát, míg a második rezsimek mint a gazdaság válságállapotát képeztük el. A kiindulási átmenetvalószínűség-mátrixot előzetesen a

$$P_{prior} = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

értékekkel határoztuk meg szakértői becslés alapján, ami azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy a konjunktúrából a válságrezsimbe lépünk mindössze 6%, míg a válság rezsimből a konjunktúrába lépés valószínűsége 20%, így a konjunktúra időszaka várhatóan 1 év 5 hónapig, míg válságidőszak várhatóan 5 hónapig tart. A faktorok egyensúlyi értékeinek priorjait a P_{prior} felhasználásával határoztuk meg előzetesen, beépítve a történelmileg alacsony hozamkörnyezet hatásait.

A magyar infláció hosszútávú értéke az 1. rezsimek szerint megegyezett az MNB hosszútávú inflációs célkitűzésében szereplő értékkel ($cpi_{prior,HUN} = 3\%$), míg a válságrezsimben ennél 20 bázisponttal magasabb értéket határoztunk meg. Az eurózóna infláció értékét az ECB által megadott hosszútávú célszint alatt vártuk mindkét rezsimekben ($cpi_{prior,EU} = 1,6\%$). A magyar rövidtávú hozamoknál a jelenlegi szintnél fél százalékponttal magasabb értéket feltételeztünk, míg a hosszútávú hozamok esetén is a jelenleginél magasabb 4,2%-os szintet képeztünk el. Válsághelyzetben a hozamgörbe-meredekség csökkenését, a rövidtávú hozamok nagyobb, míg a hosszútávú hozamok mérsékeltebb növekedését prognosztizáltuk. Az EUR/HUF keresztárfolyam esetén a gazdaság normál állapotában a keresztárfolyam stagnálása, míg válsághelyzetben növekedése (a forint gyengülése) várható.

5.3 A modellillesztés eredményei

A Markov rezsimmátrix állapotát modelleztük állapotvalószínűség mátrixára a fenti P_{prior} kiinduló értékekkel szemben a

$$P_{posterior} = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,09 \\ 0,18 & 0,82 \end{pmatrix}$$

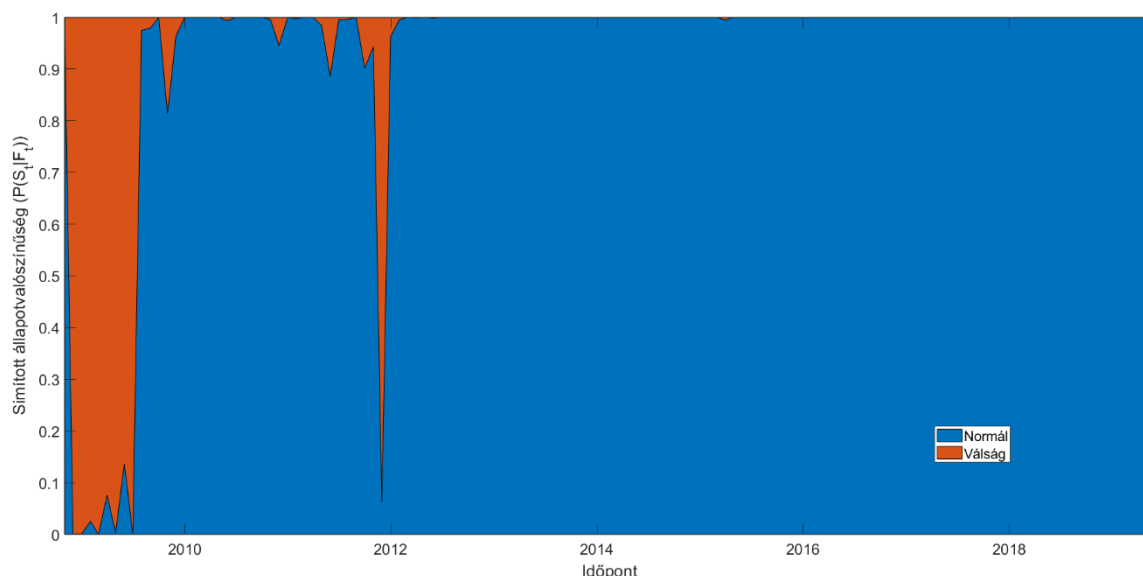
értékeket kaptuk, vagyis a konjunktúrából a válságba lépés valószínűsége magasabb az előzetes várakozásokkal szemben, míg a fordított irányú rezsimmátrix alacsonyabb valószínűséggel következik be, így a modell szerint a konjunktúraidőszakok várhatóan egy évig tartanak, míg egy tipikus válságidőszak 5 hónapig.

Rezsimek	L_{HUN}^p	S_{HUN}^p	C_{HUN}^p	L_{EU}^p	S_{EU}^p	C_{EU}^p	cpi_{HUN}^p	cpi_{EU}^p	EUR/HUF^p	L_{CDS}^p	S_{CDS}^p
1	0,17	3,64	-2,28	-0,01	1,06	-1,40	2,94	1,48	-0,007	0,53	-3,56
2	2,50	1,99	-0,99	0,21	1,01	-1,12	3,09	1,24	0,006	1,03	-2,18

4. táblázat: A kapott egyensúlyi értékek az egyes faktorok esetén, rezsimek szerint

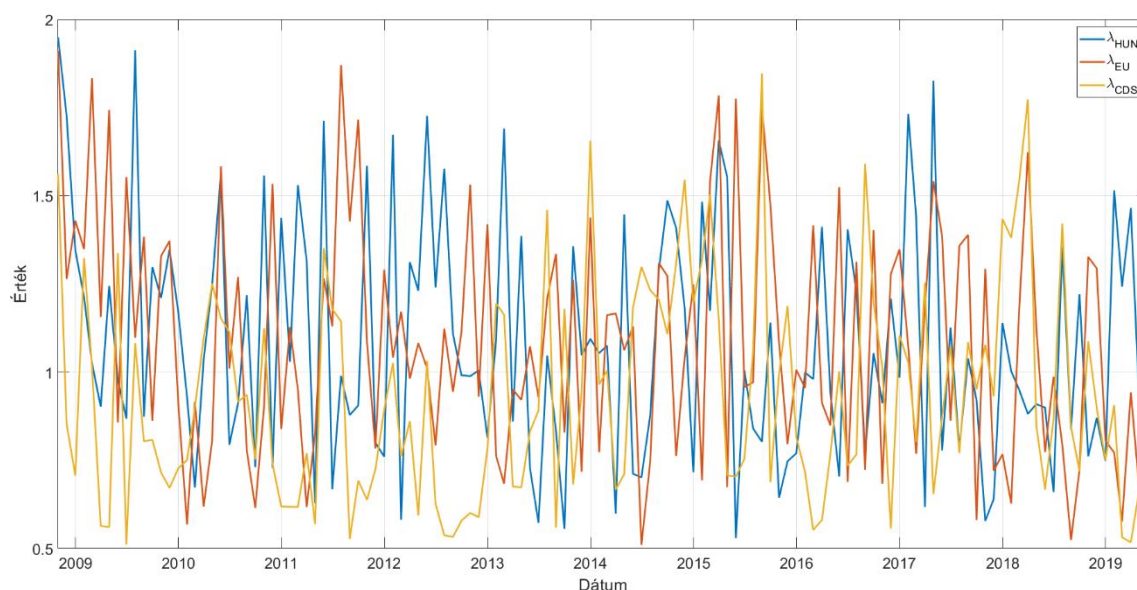
Az 4. táblázat tartalmazza a kapott permanens értékeket az egyes faktorok és rezsimek esetén. Látható, hogy a magyar hozamgörbe rövid oldalán konjunktúra

esetén 0,17%, míg válság esetén ennél lényegesen magasabb, 2,5%-os hozam várható. A hosszú hozamok esetén a gazdasági fellendülés időszakában 3,8%-os, míg válságidőszakban 4,5%-os hozamot prognosztizál a modell, amely utóbbi érték nevezhető optimistának is. A hazai infláció a 2,9% ill. 3,1%-os egyensúlyi értékeket veszi fel az egyes rezsimek esetén.



13. ábra: A simított állapotvalószínűségeket a megfigyelt időpontokban

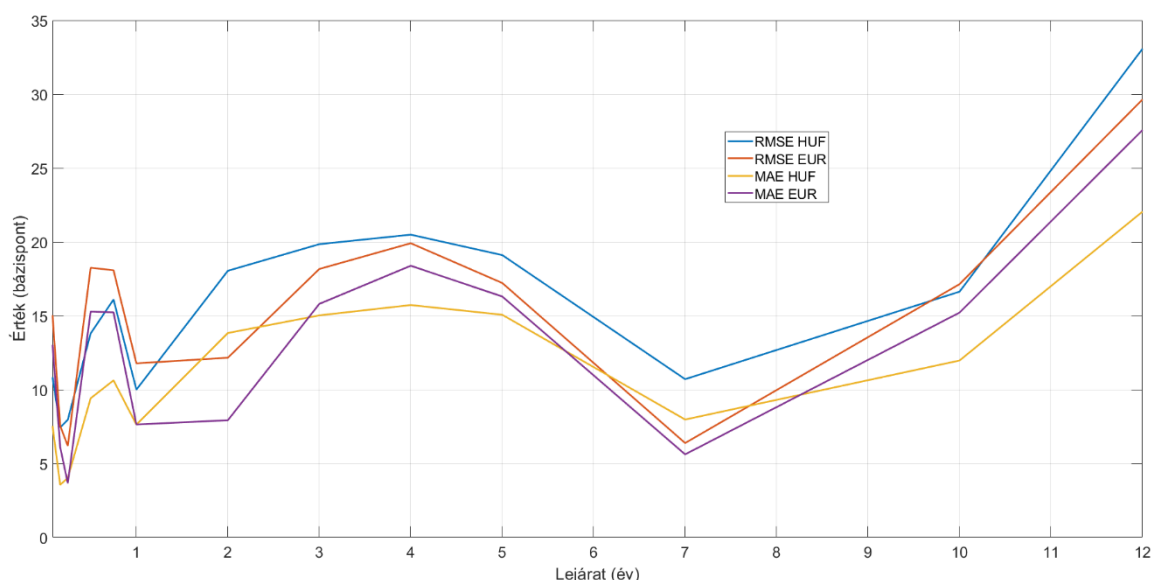
A 13. ábra az illesztés után kapott simított állapotvalószínűségeket ábrázolja az egyes múltbeli időpontokban. A válságállapot előfordulása könnyen összeköthető a 2008 – 2009-es gazdasági válság időpontjaival, valamint a görög adósságválság időszakával. Azóta a gazdaság a konjunktúra állapotában van, amelyet alátámasztanak a kapott feltételes állapotvalószínűségeik is.



14. ábra: A Nelson-Siegel lambda paraméterek alakulása a historikus adatokon az illesztés eredményeként

A 14. ábra a Nelson-Siegel λ -k (exponenciális késleltetés, lásd a 4.1.1 pontban) egyes időpontokra illesztett értékeit tartalmazza. Az előrejelzés során az egyes λ -k

értékét az illesztés során kapott utolsó historikus időszaki λ értékében fixáljuk, és a teljes előrejelzési időtávon állandóként kezeljük. (A vizsgált paraméterek további elemeinek az illesztés során kapott értékét, tehát a μ , F és Q mátrixokat a Függelék B: Modellillesztés eredmények című fejezetben részleteztük a különböző rezsimek esetén.)



15. ábra: A magyar és euró hozamgörbe megfigyelt lejárataihoz tartozó RMSE és MAE értékek

A megfigyelt lejáratokhoz tartozó átlagos négyzetes (RMSE) és átlagos abszolút (MAE) hibákat a 15. ábra részletezi. Jól látható, hogy az RMSE maximális értéke a forint hozamok esetén a 12 éves lejárat esetén a legmagasabb, 33 bázispont, míg a MAE érték ugyanezen a lejáraton 22 bázispont. A modell illeszkedése a forint és euró hozamgörbére így összességében jónak mondható.

	Átlag	Medián	Szórás	Minimum	Maximum	Elutasítás
C_1	0,1616	0,9263	0,9243	-1,0316	0,9354	0
C_2	-0,1743	-0,9075	0,9166	-0,9931	0,9337	0
F_1	-0,0559	0	0,5670	-2,0987	1,2878	0,0248
F_2	0,0239	0	0,4592	-1,7655	1,1504	0
Q_1	-0,0766	-0,0232	0,7964	-2,2028	1,8728	0,0152
Q_2	0,1772	0,1473	0,8560	-1,6518	2,6589	0,0455
R_1	0,2112	0,2320	0,0678	0,0800	0,2897	0
R_2	0,2885	0,2903	0,1232	0,0848	0,5001	0
λ_{HUN}	-0,0113	0	0,1435	-0,3290	0,4456	0
λ_{EUR}	-0,0049	0	0,1459	-0,4421	0,3931	0
λ_{CDS}	0,0345	0	0,1429	-0,4118	0,5036	0

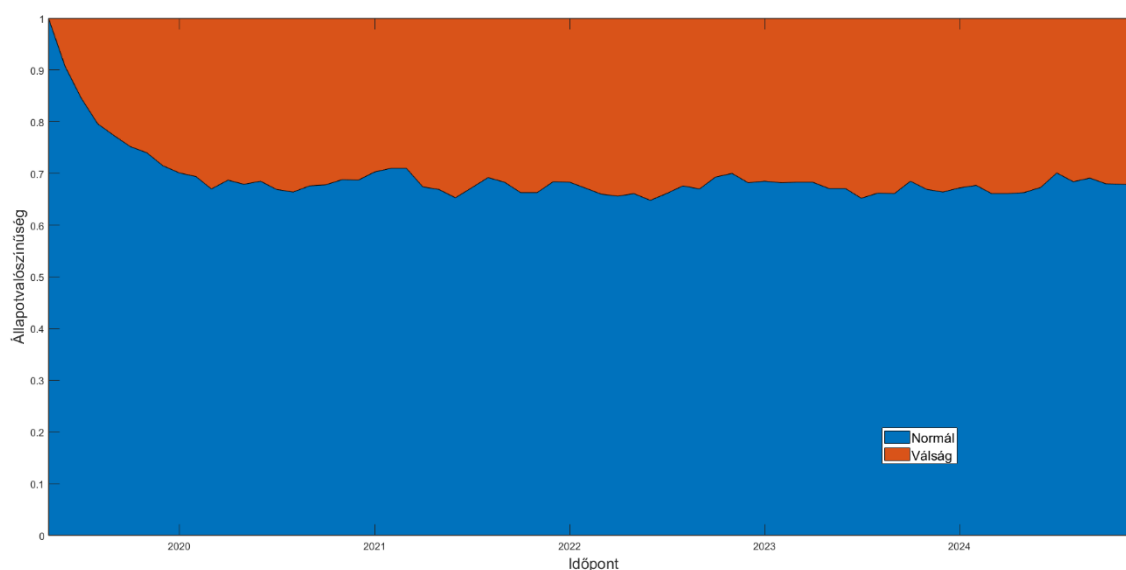
5. táblázat: A Geweke-tesztstatisztika értékei

A modellillesztés során alkalmazott Gibbs-mintavételezési eljáráshoz 75 000 léptetést használtunk, amelyből az első 20 000 léptetést dobtuk el a mintavételezés végén, amely a modellillesztés kezdőértékeinek választásától való függését hivatott megszüntetni.

A mintavételezés kiértékeléséhez a Geweke-statisztikát használtuk, ezt részletezi a 5. táblázat. A tesztstatisztikát az $a = 10$, $b = 50$ értékek mellett futtattuk. Az átlag, medián, szórás, minimum és maximum értékeket az adott paramétercsoportra lefuttatott tesztstatisztikák értékéből számoltuk, így például a C_1 paraméter (azaz a permanens értékek vektora az 1-es rezsimben) esetén a 11 lánc 11 tesztstatisztikájából számoltuk ki ezen értékeket. Az elutasítás oszlop azoknak a paramétereknek az arányát jelöli az adott paramétercsoporton belül, amelyeknél 99%-os valószínűséggel el lehet vetni a két mintaátlag egyezőségét. A tesztstatisztika kapott értékei alapján elmondható, hogy a szimuláció konvergált, vagyis a mintavételezési eljáráshoz használt 75 000 léptetés elegendőnek bizonyult¹⁷.

5.4 Az előrejelzés eredményei

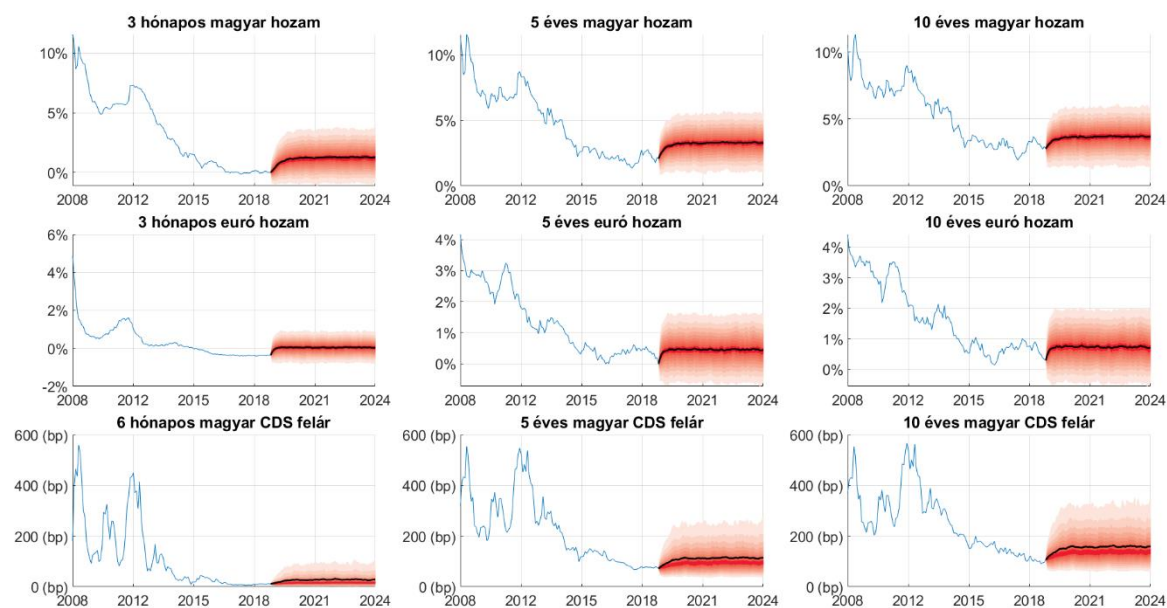
Az előrejelzéshez a modellillesztés során kapott paramétereket az átmenetegyenletbe helyezve időpontonként generáljuk az egyes realizációkat, melyekből 1 000-et generálunk. A 16. ábra az egyes rezsimek előfordulási valószínűségeit szemlélteti a teljes időhorizonton. Látható, hogy a vizsgált időhorizonton a gazdaság a realizációk mintegy 30%-ában van a válságrezsimben.



16. ábra: Az előrejelzett időtávon az egyes rezsimek előfordulási valószínűségei

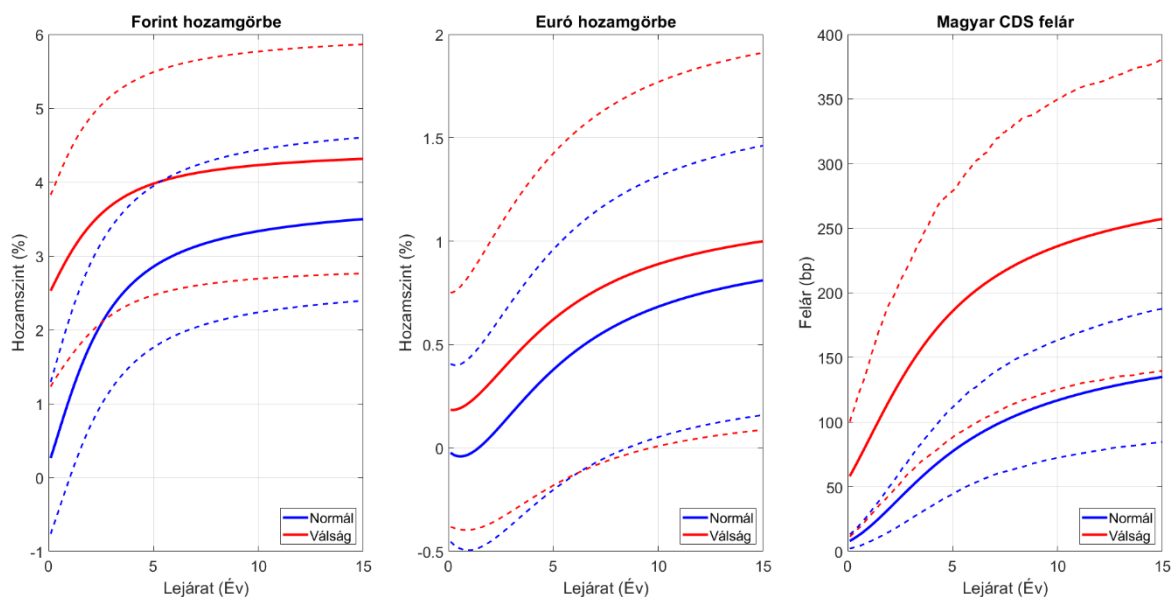
A 17. ábra mutatja a főbb lejáratokhoz tartozó legyezőábrákat. Látható, hogy a modell a magyar hozamgörbe emelkedését jelzi előre minden lejárat esetén. Ez összefügg azzal, hogy a jelenlegi (hazai és nemzetközi) hozamkörnyezet történelmileg alacsony szinten van, azonban már középtávon is nagyobb valószínűsége van annak, hogy a jelenlegi hozamszintek növekedésnek indulnak.

¹⁷ A konvergencia ellenőrzésére a folyamatok közti függések vizsgálata a 5. táblázatban látható 536 teszten felül további 143 916 teszt elvégzését tenné szükségessé jelen paraméterek mellett, de ha csak a paramétercsoportokon belül vizsgáljuk akkor is további 21 118 teszt elvégzése volna szükséges, ennek közlésétől a nyilvánvaló terjedelmi okok miatt eltekintünk.



17. ábra: A főbb lejáratokhoz (0,25,5,10 év) tartozó legyezőábrák a vizsgált görbék esetén

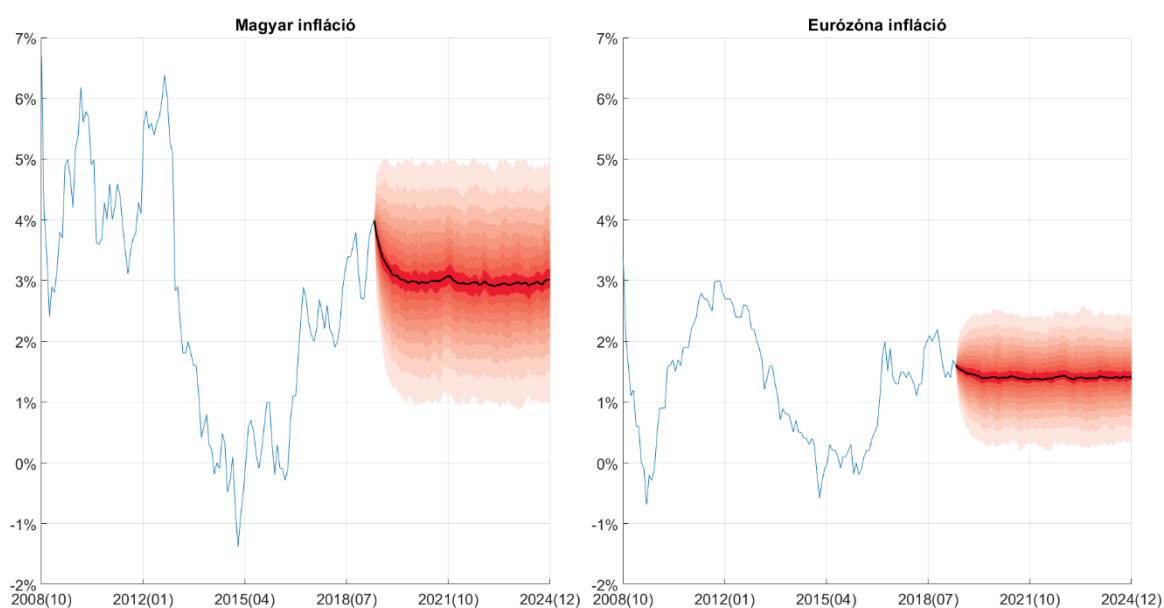
A hozamkörnyezet lassú emelkedése a modellben várhatóan 2020-ra 1%-os szintre tolja fel a rövid forint hozamokat, míg a 10 éves forint hozamok a 3,5%-os szintet érik el ugyanekkorra. Az 5 éves forint hozamok enyhe emelkedést követően a 3 – 3,2%-os szintre mozdulnak el. Az euró hozamkörnyezet eközben a modell szerint nagyjából stagnál, a rövid oldalon történik egyedül érezhető elmozdulás, ahogy a 3 hónapos lejáratához tartozó hozam szintje a 0-hoz konvergál az idő előre haladtával. A magyar CDS felárak 10 – 30 bázispontos növekedést szenvednek el a különböző lejáratokon. Elmondható még, hogy a hozamkörnyezet emelkedésére ható kockázatok mértéke magasabb, ezért, ahogy az a legyezőábrákon is látható, a hozamszintek várható értéke (fekete vonal) magasabb szinten található, mint a mediánértékük (sötétpiros vonal).



18. ábra: Az egyes görbék rezsimenként eltérő hozamszintjei a különféle lejáratokon 2021 októberében (folytonos vonal), valamint a hozzájuk tartozó szórások (szaggatott vonal)

Az egyes rezsimek közötti eltéréseket mutatja a 18. ábra, ahol az időhorizont közepén (2021 végén) várható forint és euró hozamgörbét, valamint a magyar CDS felárat ábrázoltuk az eltérő rezsimek esetén.

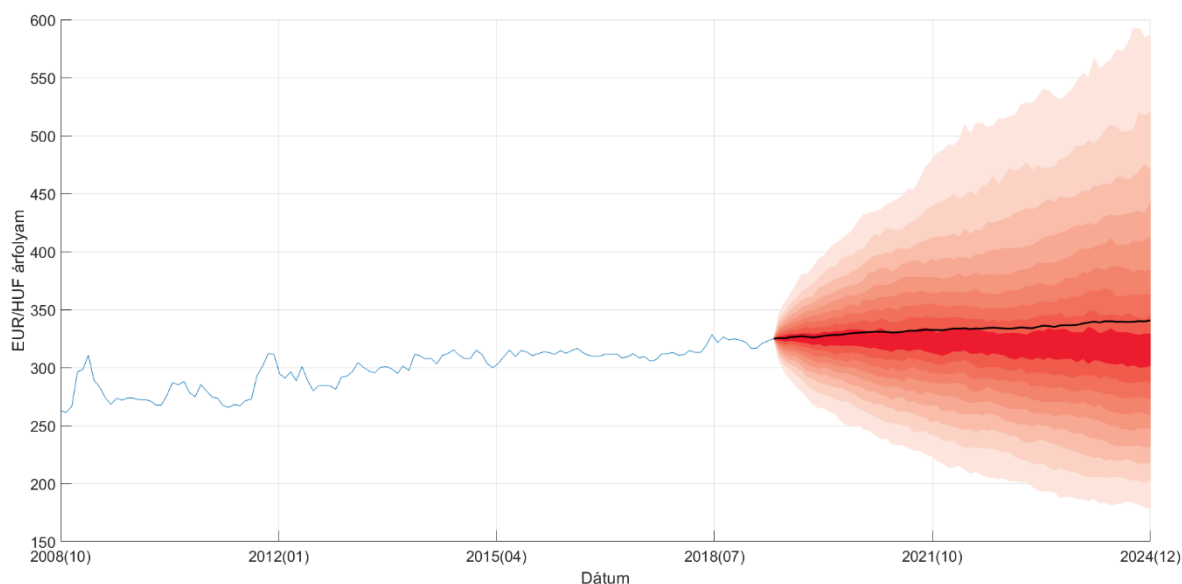
Az ábrákon szaggatott vonal jelzi a szórást. Megállapítható, hogy a várható hozamszint válság állapotban magasabb, továbbá a volatilitása is jelentősen eltér a különböző rezsimek esetén. Megállapítható az is, hogy az euró hozamgörbe volatilitása jelentősen kisebb, mint a forint hozamgörbe esetén, ennek magyarázata pedig, hogy a magyar gazdaság jelentősen érzékenyebb mind a külső, mind pedig a belső sokkokra, szemben a gazdaságilag sokkal nagyobb eurózónával. A magyar CDS felárra vonatkozó bizonytalansági tényezők mértéke a legmagasabb a három görbe közül: válságidőszakban könnyen elképzelhető, hogy a felár eléri, sőt akár meghaladja a 400 bázispontos szintet is.



19. ábra: A magyar és eurózána infláció értékének várható alakulása

A 19. ábra a magyar és eurózána inflációs értékeit mutatja. Jól látható, hogy az egyes fogyasztói indexek értékei az MNB és az ECB által meghatározott értékekhez konvergálnak várhatóan, valamint itt is megfigyelhető, hogy a forint inflációban rejlő bizonytalanság mértéke jelentősen magasabb, mint az eurózánaé.

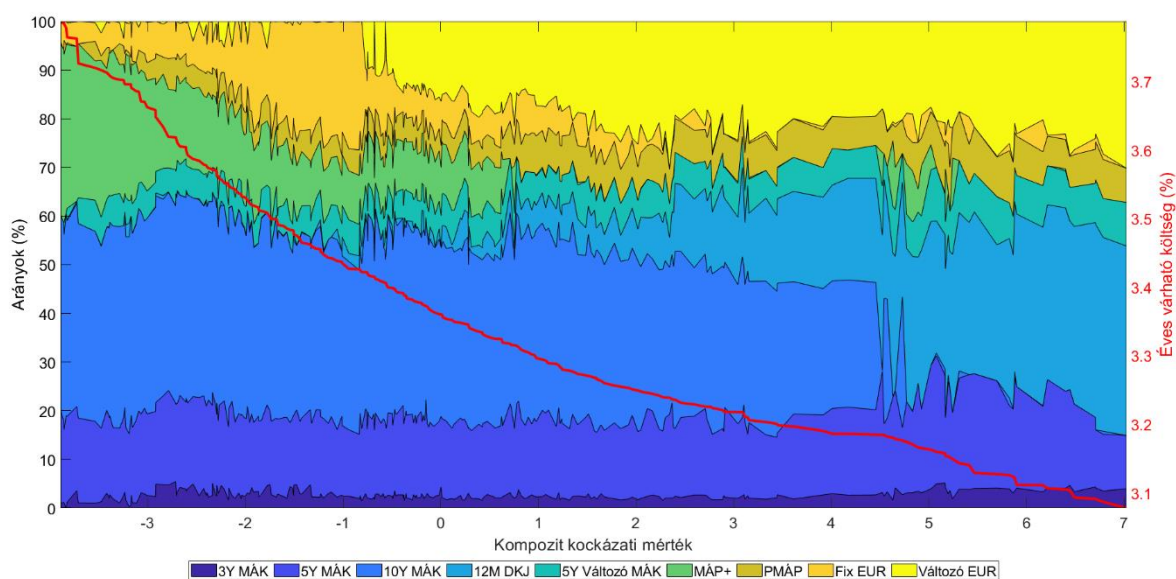
Az EUR/HUF keresztárfolyam alakulásában rejlő bizonytalanság mértéke messze a legmagasabb a vizsgált faktorok körében, amelyet jól szemléltet a 20. ábra. A vizsgált 5 éves időtáv végére a keresztárfolyam várható értéke 340 Ft/euró, amely a 2019. május végi szinthez képest mintegy 5,3%-os leértékelődést jelent a forint euróhoz viszonyított árfolyamában. Itt is elmondható, hogy a forint leértékelődéséhez köthető kockázatok mértéke jelentősen magasabb, mint a felértékelődéshez kapcsolódóké.



20. ábra: Az EUR/HUF keresztárfolyam alakulását szemléltető legyezőábra

5.5 Optimális költség-kockázat front

A 4.6 pontban leírtaknak megfelelően az optimalizáció elején 25 000 véletlenszerűen választott finanszírozási szerkezetet generálunk, amelyek környezetében 200 iteráción keresünk jobbat. Az 5 éves időtávon kapott költségek várható értéke mellett a költségek szórását, az 1 éves refinanszírozási arányt minimalizáljuk, míg az időszak végén kialakult portfólió átlagos átárazódási idejét maximalizáljuk. Így végső soron olyan minimális várható költségű finanszírozási szerkezeteket keresünk, amelyek esetén a költségingadozásban rejlő kockázat, az átárazódási kockázat, illetve a megújítási igény is minimális. Az így kapott finanszírozási szerkezetek halmaza adja a hatékony portfólió frontokat a különféle kockázati mértékek szerint.



21. ábra: Optimális finanszírozási szerkezetek az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint

A továbbiak során az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint kapott eredményeket tekintjük át részletesen, azonban az egyes különálló kockázati mértékek szerint hatékony finanszírozási szerkezetek, valamint költség-kockázat frontok is megtalálhatók a Függelék C: Optimális költség-kockázat frontok című fejezetben. A 21. ábra mutatja a választott kompozit kockázati mérték szerint kapott optimális finanszírozási szerkezetek halmazát. A bal tengelyen a finanszírozási szerkezet által meghatározott arányok, míg a jobb tengelyen a hozzájuk tartozó, a teljes elemzési időtávon felmerülő, 1 évre arányosított várható költség szerepelnek. Látható, hogy az optimális finanszírozási szerkezetek halmazába tartozó kibocsátási arányok éves várható költsége (piros vonal) a 3,1 – 3,8%-os tartományban mozog.

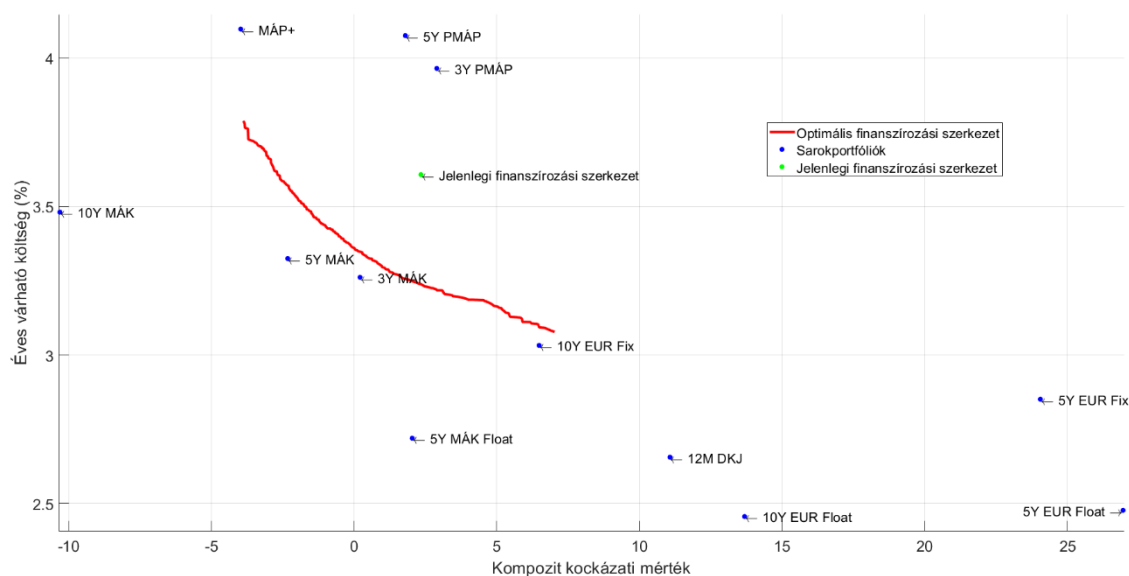
Alaposabban megvizsgálva az ábrát, több megállapítás is tehető. Egyrészt, az alacsonyabb kockázatúnak gondolt hosszabb lejáratú kötvényekhez valóban valamivel alacsonyabb kockázat tartozik, ugyanis megfigyelhető, hogy a kockázat csökkentésével (az x tengelyen balra haladva) egyre magasabb a fix kamatozású kötvények aránya az optimális szerkezetben. Ugyanez más oldalról nézve: a jelentős kincstárjegy kibocsátási arány vagy a rövid, változó kamatozású devizaadósság magas aránya pedig ugyan csökkentő hatással lenne a várható éves költségre, ám az ilyen szerkezetek választása az ezekkel járó magas kockázatok felvállalását igényelné. Az ábrán tehát jól látható a költség és kockázat közötti átváltás: az alacsonyabb költségű optimális finanszírozási szerkezetekhez magasabb kockázat tartozik, míg a kockázat csökkenése a várható költséget növeli.

Másrészt ezek az eredmények is alátámasztják a lakossági programhoz kapcsolódó előzetes költség és kockázat várakozásokat. A viszonylag biztosnak tekintett belföldi, lakossági finanszírozás ugyan magasabb költséggel jár, azonban az ÁKK hatáskörében lévő árképzés a kamatkockázatot csökkenti, a tapasztalatok szerint biztosabbnak tekintett refinanszírozási hajlandóság (alacsonyabb megújítási kockázat) pedig a program fenntarthatóságát növeli. A MÁP Plusz termék pedig a futamidőt és átárazódási időt is hosszítja. Költség szempontjából azonban a lakossági termékek hátrányban vannak a piaci termékekhez képest, így a költségek csökkentése felé úgy tudunk elmozdulni a Pareto-fronton, hogy a MÁP+ aránya folyamatosan csökken és egy idő után kiesik, míg a PMÁP viszonylag kis arányban az összes optimális finanszírozási szerkezetben fenntartható. Ennek oka abban keresendő, hogy a PMÁP várható költsége a MÁP+ költsége alatt van, és lakossági kötvény kibocsátás nélkül megugrana a portfólió likviditási költsége.

Harmadrészt megállapítható, hogy a devizaalapú külföldi finanszírozás is előnyös egy bizonyos szintig, mert bár a költségekben rejlő bizonytalanság a forintfinanszírozáshoz képest jelentősen magasabb, ám az elérhető költségcsökkenés jelentős, amellett, hogy a kibocsátott devzainstrumentumok refinanszírozási kockázata alacsony az elérhető hosszú lejáratok választása esetén. Amennyiben egy lejárat devizaadósság megújítása devizaalapú forrásbevonással történik, akkor a devizaveszteség/nyereség nem is realizálódik, ugyanakkor a modell a devizaköltség számszerűsítése céljából az időhorizont végén forintban mutatja ki a devizaadósság

állományát. Emiatt érdemes megemlíteni, hogy a lejáró devizaadósság megújítása devizaalapú forrásbevonással tekinthető egyfajta költségcsökkentő tényezőnek is. A devizában történő kibocsátást ráadásul érdemes az adott időszakban bekövetkező devizaadósság-lejáratokkal együtt tekinteni; egy rendszeres devizakötvény-kibocsátást tartalmazó finanszírozási szerkezet is eredményezhet csökkenő devizaadósság-állományt, ha az összességében negatív nettó deviza kibocsátást jelent. Érdekes, hogy a deviza kibocsátáson belüli fix-változó kamatozás szerinti megoszlás egy viszonylag éles váltással különül el egymástól, amelynek oka lehet, hogy a deviza kibocsátásnak nincs éven belüli fokozatossága, ugyanis a modellben évente csak egy alkalommal kerül rá sor, valamint a devizaswapok lehetősége miatt a modellben költségmentesen bármilyen fix-változó arány kialakítható a deviza kibocsátásokon belül. (Ennek egy lehetséges megoldása lehetne, hogy a swapok kötéséhez költségeket rendelünk, amely fokozatosabbá tehetné az átmenetet a magas fix kamatozású arányból a változó kamatozású arány növekedése felé a választott kockázati szint növelésekor; ugyanakkor ez nem fedné a valóságot, mert egy swapnak a kötésekor lényegében nincsen költsége.)

Negyedrészt, ami talán kevésbé látható: az 5 éves változó MÁK kibocsátása az optimális finanszírozási szerkezetek mindegyikében eléri a likviditási korlátokban meghatározott maximumot, ami alapján megállapítható, hogy a kincstárjegyeknél lényegesen kedvezőbb refinanszírozási kockázatot hordozó hosszabb lejáratú, azonban a hozamkörnyezet változásaira ugyanúgy reagáló instrumentum kibocsátása előnyös, vagyis elmondható, hogy érdemes ilyen instrumentumfajtát is rendszeresen kibocsátani.



22. ábra: Optimális költség-kockázat front az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)

A 22. ábra a választott kompozit kockázati mérték szerint meghatározott költség-kockázat frontot jelöli, amelyen az optimalizáció eredményeként kapott, a Pareto optimális finanszírozási szerkezetek által meghatározott halmaz látható. Az ábrán jelölt

úgynevezett sarokportfóliók az egyes instrumentumok szerinti 100%-os finanszírozási szerkezetekre jellemző költségeket és kockázatokat jelentik. Fontos megjegyezni, hogy ez esetben nem alkalmaztunk sem likviditási korlátot, sem likviditási prémiumot (azaz a túlzott kibocsátás többletköltségét), vagyis a sarokportfóliók által kapott értékek csak szigorúan elméleti szinten értelmezhetők (ugyanakkor a kiindulási portfólió ezek esetében is megegyezik a valós adósságportfólióval)¹⁸. Arra azonban mindenképp jók, hogy kontextusba helyezték a kapott optimális költség-kockázati frontot.

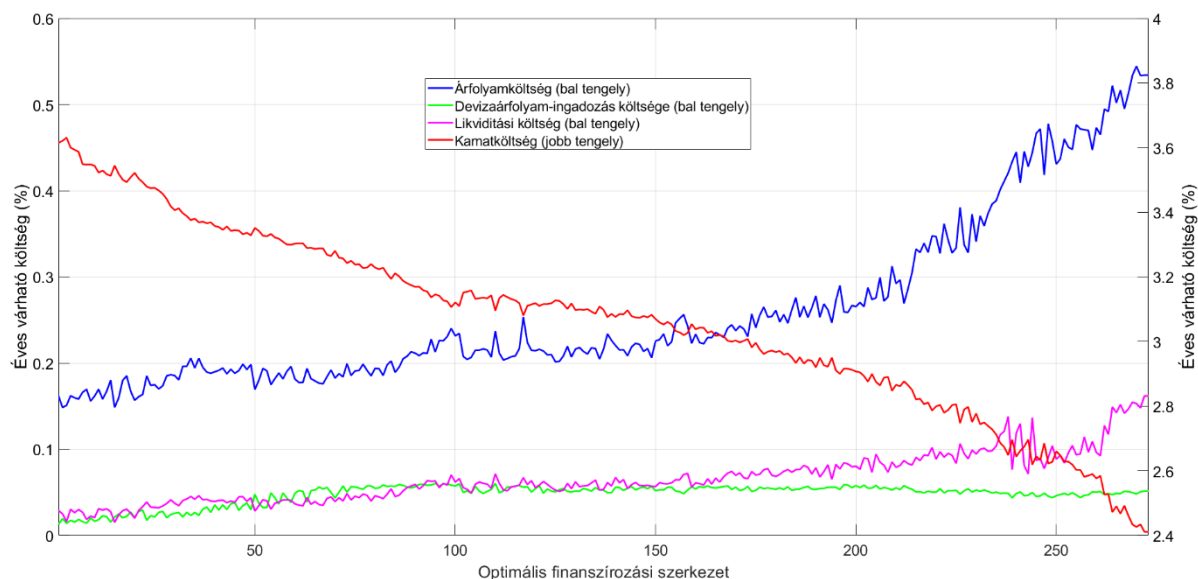
Az ábrán látható még a jelenlegi finanszírozási szerkezet szerint számított költség és kockázat is. A „jelenlegi finanszírozási szerkezet” alatt azt értjük, hogy a teljes adósságportfólió 2019.05.31-én fennálló adósságszerkezet arányainak megfelelően finanszírozási szerkezet által meghatározott stratégiát követve igyekszünk kibocsátani. A fix kamatozású magyar államkötvényekre vonatkozó arányokat úgy határoztuk meg, hogy a kibocsátáskor (vagy cserekor) a lejáratig hátralévő futamidőt tekintve egy 4,5 évnél rövidebb futamidejű kötvény a 3 éves MÁK arányt, egy 4,5 évnél hosszabb, ugyanakkor 6 évnél rövidebb futamidejű kötvény az 5 éves MÁK arányt, az ennél hosszabb futamidejű állampapírok pedig a 10 éves MÁK arányt növelik. A többi állampapír esetén egyértelmű a megfeleltetés, míg a hiteleket azonos paraméterű (futamidejű ill. kamatozású) kötvényekként kezeltük.

Megállapítható, hogy a jelenlegi finanszírozási szerkezethez képest léteznek mind költség, mind kockázat szempontjából kedvezőbb finanszírozási szerkezetek. Például, a *legkisebb kockázatú* optimális finanszírozási szerkezetre való áttérés a lakossági instrumentumok körében egy 10 százalékpontos növekedés, a 3 éves kötvények arányában egy jelentős csökkenés az 5 és 10 éves kötvények javára, valamint a devizakötvények esetén 96%-os fix arány kialakítása mellett érhető el. Ez egyben egy várhatóan 19 bázispontos éves költségnövekedést is eredményezne. Ez azonban csak egy lehetséges finanszírozási szerkezet, melynek Pareto-dominanciáját a jelenlegi finanszírozási szerkezethez képest több komponens együttes hatása magyarázza. Miután példánkban az elérhető legkisebb kockázatú stratégiát választottuk, így értelemszerű, hogy a jelenleginél magasabb arányú fix devizakötvényt érdemes választani a devizakötvényeken belül, azonban a devizakötvények magasabb kockázati mutatói miatt a deviza részarány 4%-os lenne. A lakossági instrumentumok arányának jelentős növekedése mellett az alacsony kockázati tényezők szólnak. A 3 éves MÁK arányának jelentős csökkenését, valamint az 5 és a 10 éves MÁK arányának növekedését pedig a történelmileg alacsony kamatkörnyezet indokolja, amely várhatóan felfelé mozdul a modell által adott előrejelzés szerint, így most alacsonyabb költséggel és kockázattal járhat a hosszabb futamidőkön történő kibocsátás.

Lehetőség van a várható éves költség megbontására a költségtényezők szerint, melyet a 23. ábra mutat be. Az ábra jobb tengelyén külön skáláztuk a kamatköltség

¹⁸ A modell feltételrendszere szerint a „menekülő instrumentum” 12 hónapos Diszkont Kincstárjegyből előfordulhat ugyan a 100%-os finanszírozási szerkezet megjelenése, azonban a likviditási prémium figyelembe vételével ennek a várható éves költsége 17,73%, amelyből a likviditási költség 16,36%-os éves költséget jelent. Ez a jelentős költség a korlátlan kibocsátás ára a modell szerint (a kockázatokat nem is tekintve).

várható éves költségét az egyes finanszírozási szerkezetek mellett, mert ez a legjelentősebb költségtényező. Elmondható, hogy a várható összköltség több mint 88%-át a kamatköltség teszi ki. Az ábrázolt optimális finanszírozási szerkezetek a választott kockázati mérték szintje szerint növekvő sorrendbe vannak rendezve. Megfigyelhető, hogy ahogy haladunk az egyre kockázatosabb finanszírozási szerkezetek felé, a kamatköltség egyre csökken, míg a kibocsátáskori árfolyamkülönbségből eredő költség egyre nő. A jelenséget az egyre kisebb arányú fix kamatozású instrumentum kibocsátása és a mellette párhuzamosan egyre nagyobb arányú DKJ kibocsátás magyarázza.

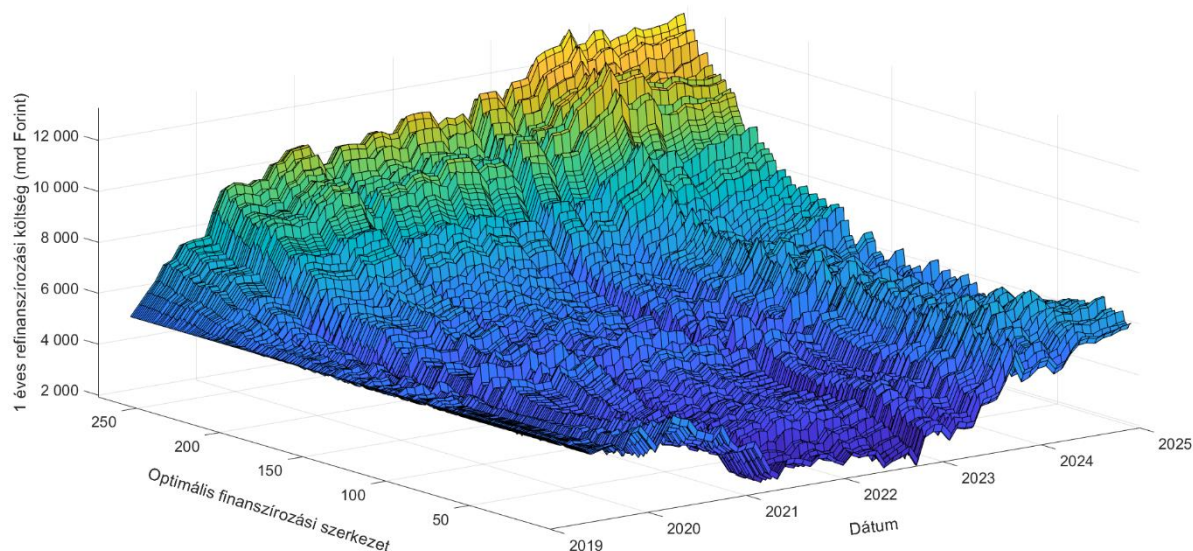


23. ábra: A választott kompozit kockázati mérték szerinti optimális finanszírozások éves várható költségének megbontása költségtényezők szerint (a kamatköltséget a jobb tengelyen ábrázoltuk)

A devizaárfolyam ingadozásából származó költség enyhe növekedését a finanszírozási szerkezetben egyre nagyobb arányban megjelenő deviza instrumentumok magyarázzák. A likviditási költség alakulása inkább azt mutatja meg, hogy az egyes finanszírozási szerkezetek esetén mennyire volt sikeresen végrehajtható a kibocsátás olyan szempontból, hogy mennyire sikerül elkerülni a túlzott arányú kibocsátásokat az egyes instrumentumok esetében. Miután a kapott finanszírozási szerkezetek egyikében sem látunk kiugróan magas likviditási költséget, így elmondható, hogy a kibocsátási algoritmus sikeresen kiszelektálja azokat a finanszírozási szerkezeteket, ahol likviditási szempontból korlátozásokba (magasabb költségek, mennyiségi korlátok) ütköznénk.

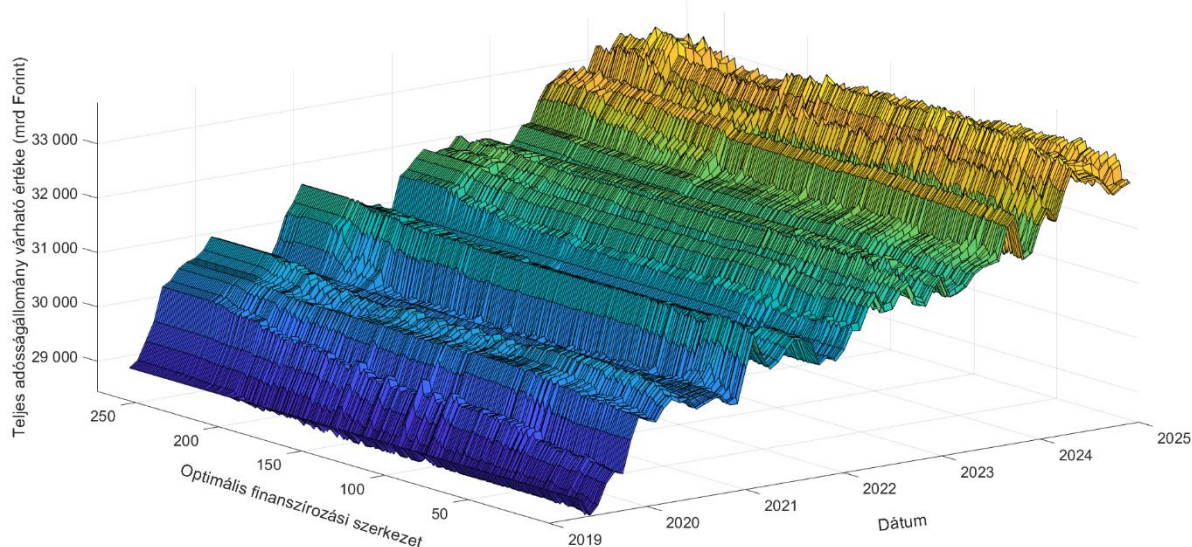
A kapott optimális finanszírozási szerkezetek instrumentumonkénti arányai, az ahhoz tartozó várható éves költség, a költségingadozás, valamint a főbb adósságszerkezeti arányok (köztük az ÁKK által alkalmazott benchmark mutató értékek) a Függelék D: Optimális finanszírozási szerkezetek című fejezetben láthatók. Az adósságszerkezeti benchmark mutatók: a teljes adósságportfólióban a devizaadósság részaránya, a forintadósságon belüli fix-változó kamatozás szerinti megoszlás és a devizaadósságon belüli fix-változó kamatozás szerinti megoszlás. Ezek

mellett az ugyancsak stratégiai fontosságú lakossági állampapírok állományának aránya is bemutatásra kerül.



24. ábra: Az optimális finanszírozási szerkezetek 1 éves refinanszírozási igényének alakulása a modellezés időhorizontján

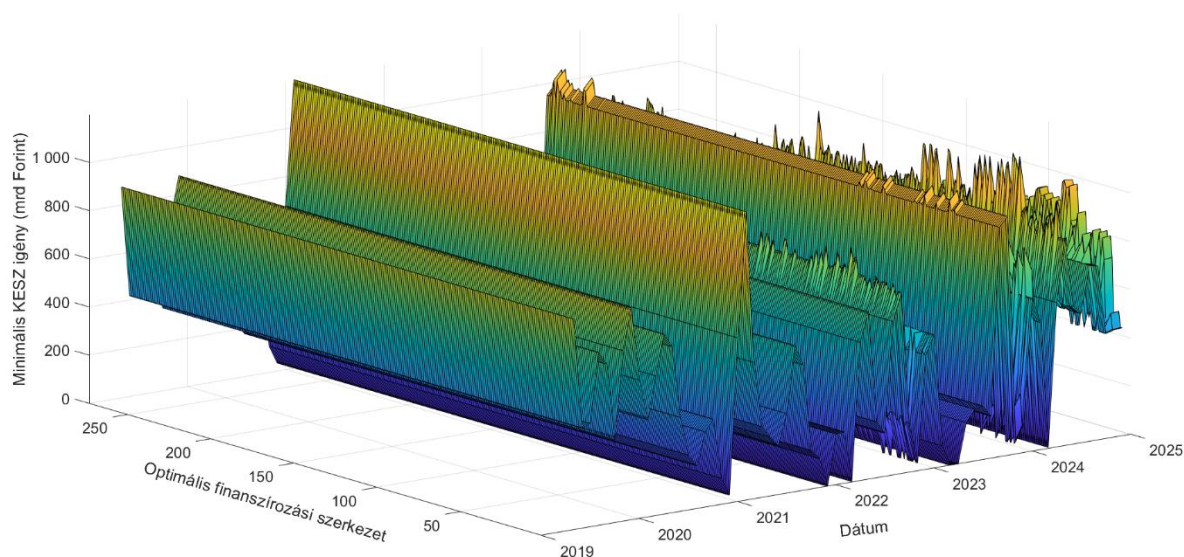
Érdemes megvizsgálni azt is, hogy az egyes finanszírozási szerkezetek esetén a választott időtávon hogyan alakul a modell szerint számított 1 éven belüli refinanszírozási igény (figyelembe véve a lakossági állampapírok korrigált megújítási szükségletét). A 24. ábra részletezi ennek alakulását a modellezési időhorizonton. Fontos emlékeztetni, hogy az adott időtávon számított refinanszírozási kockázat (4.4.3. pont) nem egyenlő az ugyanazon az időtávon lejáró adósság arányával, mert a jelenlegi modellfuttatásban a lakossági instrumentumok – azok kedvező megújítási tulajdonságaira tekintettel – esetén a megújítandó összeg 50%-a kerül beszámításra a refinanszírozási igénybe. Feltűnő, hogy körülbelül a 200. finanszírozási szerkezetet követően a refinanszírozási kockázat jelentősen megemelkedik. Ennek oka, hogy az addigi 60% feletti arányt képviselő fix kamatozású, hosszabb lejáratú kötvények helyett rövid lejáratú kincstárjegyek jelennek meg az optimális szerkezetben.



25. ábra: Az egyes finanszírozási szerkezetek által kapott teljes portfólió időbeli jelenértékének a változása

Ha megvizsgáljuk az egyes finanszírozási szerkezetek szerint a teljes adósságportfólió jelenértékét az időtávon (25. ábra), akkor itt is megfigyelhető egy kisebb ugrás az értékekben, mint a refinanszírozási kockázat esetén, ám mivel a kibocsátási algoritmus kellőképpen simít, így ez kevésbé látványos.

A 26. ábra az egyes optimális finanszírozási szerkezetek mentén kialakuló minimális (az adott szimuláció során ez 2 hónap) KESZ igény várható értékét mutatja. Vagyis az ábrán egy adott időpontban, adott optimális finanszírozási szerkezet mellett azt az értéket ábrázoltuk, amely megmondja, hogy az időpontot követő 2 hónap során a realizációk mentén várhatóan mekkora finanszírozási igény fog felmerülni az egyes instrumentumok lejáratából kifolyólag. A kibocsátási stratégia során egy adott realizáció mentén az aktuális KESZ állomány ezen érték alá nem kerülhet. Látható, hogy az egyes finanszírozási szerkezetek szerint az első 3 évben nincs érdemi különbség, ez abból fakad, hogy a KESZ igényt érintő instrumentumok körébe nem tartozik bele a diszkont kincstárjegy, további tervinstrumentumok pedig mind 3 évnél hosszabb, vagy azzal megegyező lejáratúval indulnak. Idősorosan átlagolva a minimális KESZ igényt, az a teljes időtávon 418 – 481 milliárd forint között szóródik a finanszírozási szerkezetek mentén.

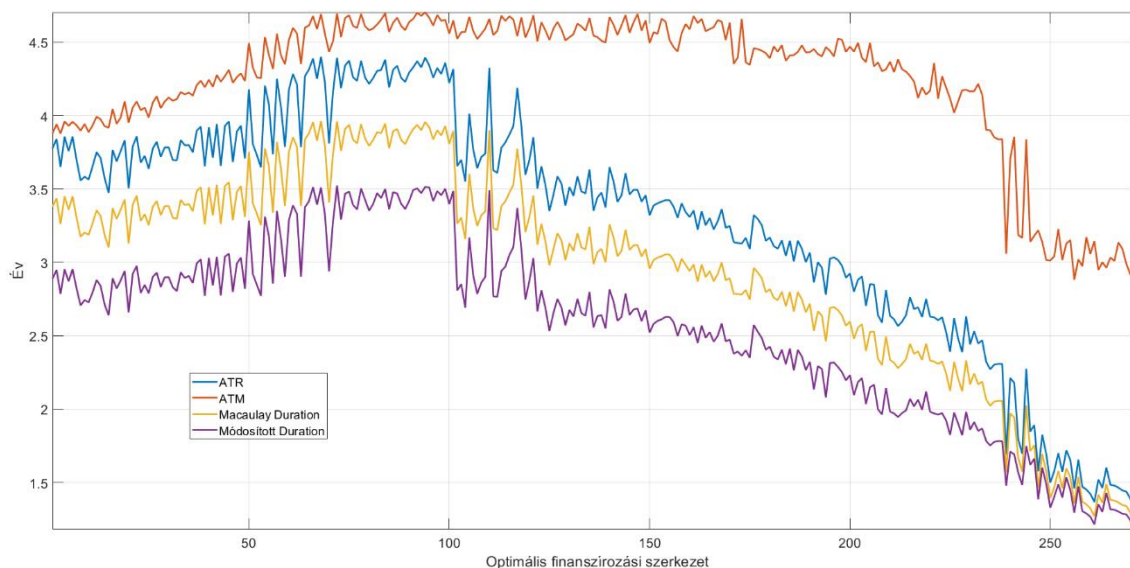


26. ábra: Az egyes optimális finanszírozási szerkezetek mentén kialakuló minimális KESZ igény várható szintje

A modellben a maximális KESZ igény, amely fölé az aktuális KESZ csak indokolt esetben (ez jelen esetben csak MÁP+ tőkésedéskor történhet meg) kerülhet, idősorosan 972 – 1108 milliárd forint között szóródik az egyes optimális finanszírozási szerkezetek mentén. Előbbi mutató tehát alkalmazható arra, hogy meghatározzuk a minimális KESZ igényt, míg utóbbi esetén érdemes úgy alakítani a finanszírozási stratégiát, hogy a KESZ állomány ezen érték fölé csak indokolt esetben kerülhessen. Ehhez képest a modellben realizált KESZ érték idősorosan átlagolva 622 – 996 milliárd forint között szóródik az adott finanszírozási szerkezettől függően. Létezik tehát olyan optimális finanszírozási szerkezet, amelyben majdnem mindig a maximális KESZ igény közelében mozog a realizált KESZ állomány, vagyis a lejáró papírok jelentős részét sikerül előfinanszírozni. Ha lenne a minimális KESZ szükséglethez közeli átlagos realizált KESZ állománnyal rendelkező finanszírozási szerkezet, az azt jelentené, hogy annak során nagy valószínűséggel jelentős likviditási költséggel járó DKJ kibocsátás történik, mivel a likviditási korlátok miatt nem tudunk kellő mértékben előfinanszírozni a kívánt instrumentumokból. Az ilyen (szélsőséges) finanszírozási szerkezeteket azonban sikeresen elkerüli az optimalizáló algoritmus.

A 27. ábra az időszak végére az egyes finanszírozási szerkezetek mentén kialakuló portfólió lejárat mutatóit tartalmazza. A 100. optimális finanszírozási szerkezetet követően a portfólióban a változó kamatozású devizakötvények arányának megnövekedése jól érzékelhetően lejjebb viszi az arra érzékeny lejárat mutatókat, úgymint az átlagos átárazódási időt (ATR), vagy a durationt. A portfólió lejáratig hátralévő átlagos ideje (ATM) azonban az egyes finanszírozási szerkezetek esetén majdnem végig 3,5 év felett marad, és csak a magasabb arányú rövid lejáratú instrumentumok megjelenésével „zuhan be”. (Megjegyzendő, hogy a modellben kibocsátásra kerülő instrumentumok futamideje a legtöbb esetben nagyon hasonló a valóságban is alkalmazotthoz, ugyanis például a modellben a 10 éves tervkötvény 12 éves lejáratig hátralévő futamidővel kerül kibocsátásra, ez pedig modellezi az ÁKK azon

gyakorlatát, miszerint az ÁKK a benchmark állampapírokat a benchmark futamidőnél hosszabb lejáráttal bocsátja ki.)



27. ábra: Az egyes optimális finanszírozási szerkezetek esetén kapott lejárat mutatók a vizsgált időszak végén

Az egyes szimulációk eredményhalmazán lehetőség adódik az egyes finanszírozási szerkezetek mentén kialakuló különféle költség és kockázati mutatók további vizsgálatára is. Egy tetszőlegesen kiválasztott finanszírozási szerkezet szemléltető ábráit tartalmazza a Függelék E: Egy kiválasztott optimális finanszírozási szerkezet mutatói című fejezet.

6 Konklúzió

Az optimális adósságportfólió modell 5 éves fejlesztés eredménye, amely során egy, a valóságot hűen tükröző szimulációs modell került kialakításra. A modell egyik motorja a Markov rezsimműtő állapotter modell, amely egyedülálló módon képezi le az államadósságra ható változókat. Képes relevánsan megjeleníteni egy kis ország (Magyarország) és egy nagyobb gazdaság (EU) makrogazdasági kapcsolatát. A vizsgált faktorok segítségével robusztus előrejelzések készíthetők, amelyek a modellező jövőről alkotott várakozásait is beépítik az adatokba. A modellben feltételezett kétféle rezsim jól tükrözi, illetve elkülöníti a gazdaság aktuális állapotát (konjunktúra és válságidőszak szempontjából).

A több célfüggvényes optimalizáló algoritmus – a modell másik motorja – kellőképpen rugalmas, hogy az adósságkezelő kockázati elvárásait megtestesítő eredményeket prezentáljon. A modellbe olyan speciális esetek is beépítésre kerültek, mint a túlzott kibocsátás költsége ill. mennyiségi korlátja, valamint a lakossági állampapírokkal történő finanszírozás tulajdonságai. A kapott Pareto-optimális költség-kockázati frontok nagy mennyiségű adatot biztosítanak további háttérelvezések elvégzéséhez és a megalapozott döntéshozási folyamathoz is.

A modellel kapcsolatban természetesen felvázolhatók továbbfejlesztési irányok is. A Markov rezsimműtő állapotter modell további vizsgálatát jelenthetné a modell előrejelzési képességének további vizsgálata in- és out-of-sample tesztekkel. A lakossági szegmens modellen belüli érzékenységvizsgálata is mindenképpen indokolt, például a megújítási hajlandóság megváltoztatásának hatáselemzésére. Az optimalizálás stressztesztelése, például az előrejelzett hozamszintek jelentős eltolásával pedig további, az adósságportfólió modellel foglalkozó tanulmánynak lehet az alapja. A modell további tesztelésére és vizsgálatára a Függelék F: Modell diagnosztika részben további lehetőségeket ismertetünk.

Összességében az optimális adósságportfólió modell véleményünk szerint egy kellően megalapozott eredmények prezentálására megfelelő szimulációs algoritmus, amely alkalmas arra, hogy az adósságkezelés döntés-előkészítési folyamatába beépülve elősegítse az adósságkezelő hatékony munkáját.

Irodalomjegyzék

- Bebes András. 2013. „Kockázati mértékek”. ÁKK belső tanulmány.
- Bebes András és Reguly Ágoston. 2015. „Optimális adósságportfólió szimuláció”. ÁKK belső beszámoló.
- Bebes András és Tran Dávid. 2017a. „Az optimális adósság-portfólió modell aktuális eredményei”. ÁKK belső elemzés.
- Bebes András és Tran Dávid. 2017b. „Az optimális adósság-portfólió modellből az adósságportfólió 2018-ban elérendő szerkezetére vonatkozó eredmények”. ÁKK belső beszámoló.
- Bebes András, Tran Dávid és Bebesi László. 2016a. „Az optimális adósság-portfólió modellből a forintadósság fix-változó megoszlására vonatkozó eredmények”. ÁKK belső elemzés.
- Bebes András, Tran Dávid és Bebesi László. 2016b. „Optimális adósság-portfólió modell”. ÁKK belső beszámoló.
- Bebesi László. 2016. „A magyar hozamgörbe modellezése makro faktorokkal”. ÁKK belső tanulmány.
- Bebesi László és Bebes András. 2016. „Devizaárfolyamok és hozamgörbék”. ÁKK belső tanulmány.
- Bebesi László és Bebes András. 2017. „Markov rezsimműtő modellek”. ÁKK belső tanulmány.
- Blake, Andrew és Haroon Mumtaz. 2012. *Applied Bayesian econometrics for central bankers*. 1. kiad. Centre for Central Banking Studies, Bank of England.
- Cheng, Ran, Miqing Li, Ye Tian, Xingyi Zhang, Shengxiang Yang, Yaochu Jin és Xin Yao. 2017. „Results of the 2017 IEEE CEC Competition on Evolutionary Many-Objective Optimization”. 2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation.
- Christensen, Jens H. E., Francis X. Diebold és Glenn D. Rudebusch. 2011. „The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models”. *Journal of Econometrics* 164 (1): 4–20.
- Clark, Todd E és Kenneth D West. 2007. „Approximately normal tests for equal predictive accuracy in nested models”. *Journal of econometrics* 138 (1): 291–311.
- Diebold, Francis X. és Canlin Li. 2006. „Forecasting the term structure of government bond yields”. *Journal of Econometrics* 130 (2): 337–64.
- Diebold, Francis X. és Glenn D. Rudebusch. 2013. *Yield Curve Modeling and Forecasting: The Dynamic Nelson-Siegel Approach*. Econometric and Tinbergen Institutes lectures. Princeton University Press.
- Drehmann, Mathias és Kleopatra Nikolaou. 2013. „Funding liquidity risk: Definition and measurement”. *Journal of Banking & Finance* 37 (7): 2173–82.

Fama, Eugene F. és Robert R. Bliss. 1987. „The Information in Long-Maturity Forward Rates”. *The American Economic Review* 77 (4): 680–692.

Fegyveres György. 2013. „Adósságkezelési Modellek - Nemzetközi kitekintés”. ÁKK belső tanulmány.

Fegyveres György. 2014a. „A hazai módszertan kivonata”. ÁKK belső beszámoló.

Fegyveres György. 2014b. „A hozamgörbe modellezésének bemutatása”. ÁKK belső tanulmány.

Fegyveres György. 2015a. „A hozamgörbe becslésének módszertani vizsgálata”. ÁKK belső tanulmány.

Fegyveres György. 2015b. „Adósságkezelési Modellek - Nemzetközi gyakorlat”. ÁKK belső elemzés.

Fegyveres György és Bebes András. 2014. „Adósságkezelési Modellek - Nemzetközi módszertani összefoglaló”. ÁKK belső elemzés.

Fleiner Tamás és Sziklai Balázs. 2012. „The nucleolus of the bankruptcy problem by hydraulic rationing”. *International Game Theory Review* 14 (1): 1–11.

Fonseca, Carlos M, Luís Paquete és Manuel López-Ibáñez. 2006. „An improved dimension-sweep algorithm for the hypervolume indicator”. In *2006 IEEE international conference on evolutionary computation*, 1157–1163. IEEE.

Galichon, A. 2016. *Optimal Transport Methods in Economics*. Princeton University Press.

Geweke, John F. 1991. „Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments”. Staff Report 148. Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Hamilton, James D. 1989. „A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle”. *Econometrica* 57 (2): 357–384.

Hamilton, James D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

Jin, Y. 2006. *Multi-Objective Machine Learning*. Studies in Computational Intelligence. Springer.

Kalman, Rudolf. 1960. „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”. *Transactions of the ASME - Journal of basic Engineering* 82: 35–45.

Kim, Chang-Jin. 1994. „Dynamic linear models with Markov-switching”. *Journal of Econometrics* 60 (1–2): 1–22.

Kim, Chang-Jin és Charles R. Nelson. 1999. *State-space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-sampling Approaches with Applications*. MIT Press.

Lan, Shiwei, Andrew Holbrook, Gabriel A. Elias, Norbert J. Fortin, Hernando Ombao és Babak Shahbaba. 2017. „Flexible Bayesian Dynamic Modeling of Correlation and Covariance Matrices”. *ArXiv e-prints*.

Liu, J., M. Gong, Q. Miao, X. Wang és H. Li. 2018. „Structure Learning for Deep Neural Networks Based on Multiobjective Optimization”. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 29 (6): 2450–63.

Nelson, Charles R. és Andrew F. Siegel. 1987. „Parsimonious Modeling of Yield Curves”. *The Journal of Business* 60 (4): 473–489.

Nyholm, Ken. 2015. „A rotated Dynamic Nelson-Siegel model with macro-financial applications”. European Central Bank.

Pooter, Michiel De. 2007. „Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models”. Tinbergen Institute Discussion Papers 07-043/4. Tinbergen Institute.

Reguly Ágoston. 2015. „A magyar állampapírok hozamgörbe modelljeinek illesztése globális optimalizáló módszerekkel és paramétereinek idősoros elemzése”. ÁKK belső tanulmány.

Riquelme, Nery, Christian Von Lücken és Benjamin Baran. 2015. „Performance metrics in multi-objective optimization”. In *2015 Latin American Computing Conference (CLEI)*, 1–11. IEEE.

Santambrogio, F. 2015. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Springer International Publishing.

Sugita, Katsuhiko. 2008. „Bayesian analysis of a vector autoregressive model with multiple structural breaks”. *Economics Bulletin* 3 (22): 1–7.

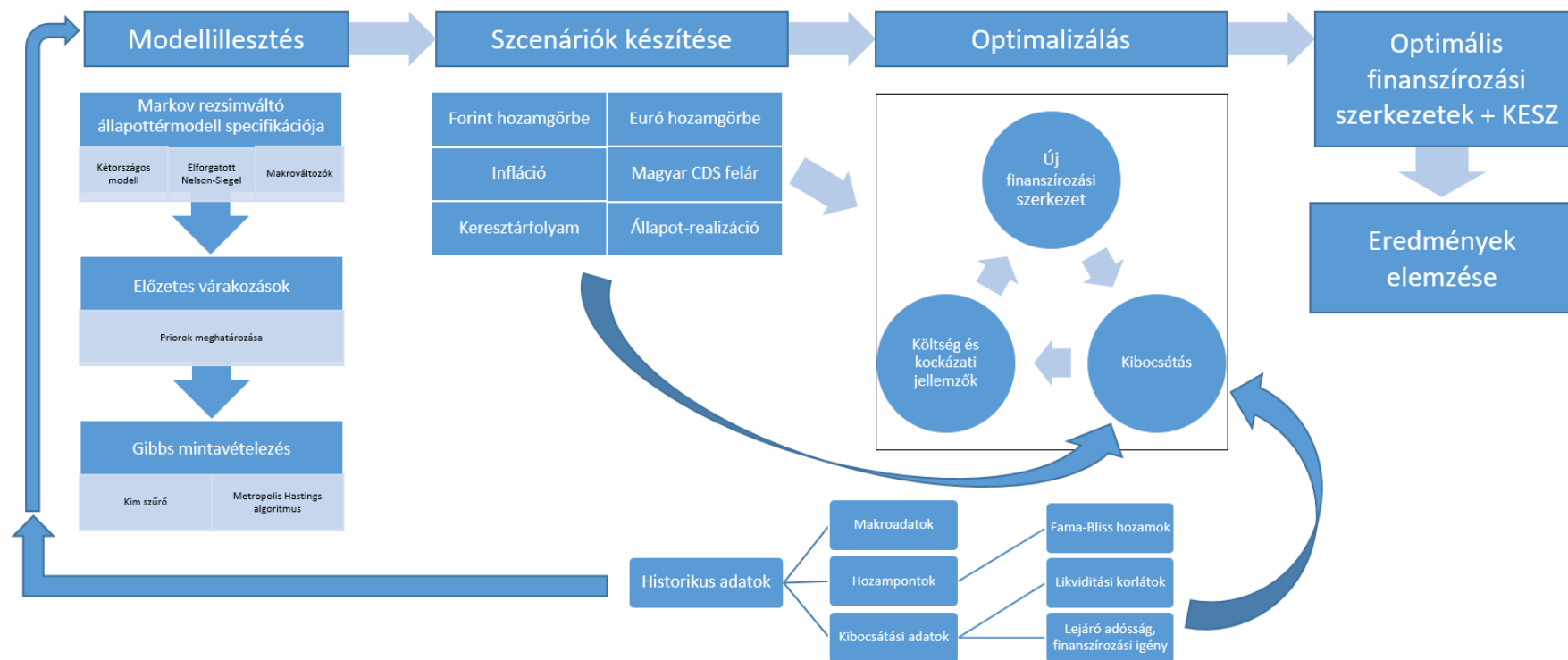
Sun, Haoran, Chunyang Zhu és Xinye Cai. 2017. „An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Based on Corner Solution Search”.

Tran Dávid. 2016. „Empirikus hozamgörbe modellek”. ÁKK belső tanulmány.

Villani, C. 2008. *Optimal Transport: Old and New*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg.

Villani, Mattias. 2009. „Steady-state priors for vector autoregressions”. *Journal of Applied Econometrics* 24 (4): 630–50.

Függelék A: Az optimális adósságot portfólió modell sematikus működése



28. ábra: Az optimális adósságot portfólió modell sematikus ábrája

Függelék B: Modellillesztés eredmények

F_1	L_{HUN}^p	S_{HUN}^p	C_{HUN}^p	L_{EU}^p	S_{EU}^p	C_{EU}^p	cpi_{HUN}^p	cpi_{EU}^p	EUR/HUF^p	L_{CDS}^p	S_{CDS}^p
L_{HUN}^p	0,6229 (0,2734)	-0,0481 (0,2892)	0,0544 (0,2254)	0,0789 (0,4256)	0,1015 (0,3581)	-0,0095 (0,961)	0,0519 (0,2933)	0,0648 (0,7513)	0,0244 (0,4103)	0,2423 (0,5258)	0,269 (0,3104)
S_{HUN}^p	-0,2174 (0,2886)	0,3874 (0,3321)	-0,0041 (0,2581)	-0,1257 (0,5746)	0,1697 (0,5113)	-0,0446 (0,7446)	-0,0399 (0,3067)	0,0741 (0,6234)	-0,0135 (0,4781)	-0,0002 (0,6983)	0,0353 (0,4391)
C_{HUN}^p	0,0544 (0,316)	0,0028 (0,3297)	0,6447 (0,2425)	0,3257 (0,5772)	-0,1193 (0,4446)	0,0935 (0,748)	0,1012 (0,3021)	-0,0265 (0,6288)	0,3132 (0,5136)	0,0513 (0,802)	0,0566 (0,4226)
L_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,5855 (0,3369)	0,0539 (0,2798)	0,0083 (0,303)	0 (0)	0,1163 (0,3035)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
S_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	-0,0119 (0,4281)	0,6561 (0,3246)	-0,0844 (0,3819)	0 (0)	-0,0857 (0,3752)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
C_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,0022 (0,2738)	-0,0944 (0,2475)	0,702 (0,2928)	0 (0)	-0,034 (0,2775)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
cpi_{HUN}^p	0,0323 (0,2332)	0,0436 (0,2239)	0,0149 (0,1801)	-0,0622 (0,4039)	0,1171 (0,3443)	0,1453 (0,4782)	0,8042 (0,226)	0,1091 (0,3987)	-0,049 (0,3437)	-0,0483 (0,4983)	-0,0074 (0,2808)
cpi_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	-0,0042 (0,2751)	0,0661 (0,2442)	0,0792 (0,4121)	0 (0)	0,8389 (0,3645)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
EUR/HUF^p	-0,0326 (0,1872)	-0,025 (0,1901)	-0,0016 (0,1595)	0,0285 (0,3254)	0,004 (0,3075)	-0,0253 (0,3938)	-0,0067 (0,1964)	0,0226 (0,3786)	-0,0507 (0,2717)	-0,0004 (0,5036)	0,0312 (0,2164)
L_{CDS}^p	0,0254 (0,1433)	-0,0036 (0,1404)	-0,0015 (0,1194)	0,0031 (0,2036)	-0,0145 (0,1739)	-0,0154 (0,2244)	-0,0314 (0,1118)	0,0564 (0,1998)	0,0305 (0,2058)	0,6096 (0,259)	0,0463 (0,1588)
S_{CDS}^p	0,0317 (0,185)	-0,0107 (0,1853)	-0,0073 (0,1485)	0,1008 (0,3399)	0,0186 (0,2987)	-0,0045 (0,5801)	0,0079 (0,1721)	0,0084 (0,4877)	0,0289 (0,2852)	-0,0337 (0,4139)	0,8112 (0,2616)

6. táblázat: Az átmenetmátrix (F) az 1-es rezsim esetén, zárójelben az egyes értékekhez tartozó szórások

F_2	L_{HUN}^p	S_{HUN}^p	C_{HUN}^p	L_{EU}^p	S_{EU}^p	C_{EU}^p	cpi_{HUN}^p	cpi_{EU}^p	EUR/HUF^p	L_{CDS}^p	S_{CDS}^p
L_{HUN}^p	0,6373 (0,2947)	-0,0284 (0,2639)	0,0695 (0,2585)	0,0454 (0,4434)	0,0601 (0,3889)	-0,0163 (0,6458)	0,0513 (0,2574)	0,0409 (0,5366)	0,0037 (0,4019)	0,109 (0,6957)	0,1607 (0,2931)
S_{HUN}^p	-0,0893 (0,2812)	0,3518 (0,2786)	-0,0352 (0,2543)	-0,0162 (0,532)	0,0325 (0,4277)	-0,0283 (0,6757)	-0,0268 (0,2862)	0,0333 (0,5809)	0,0129 (0,461)	-0,0236 (0,6358)	-0,0067 (0,3873)
C_{HUN}^p	0,0626 (0,2668)	-0,0342 (0,262)	0,5624 (0,2369)	0,0634 (0,3596)	-0,0372 (0,4175)	0,0787 (0,4964)	0,0466 (0,2506)	-0,0122 (0,3806)	0,0774 (0,3953)	0,0674 (0,4681)	0,0754 (0,2731)
L_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,5557 (0,2932)	0,0348 (0,2713)	0,009 (0,3695)	0 (0)	0,0775 (0,312)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
S_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,0061 (0,4149)	0,6438 (0,2875)	-0,0648 (0,4002)	0 (0)	-0,0626 (0,3054)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
C_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,0196 (0,2608)	-0,0805 (0,2409)	0,6573 (0,2355)	0 (0)	-0,0128 (0,2473)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
cpi_{HUN}^p	0,0186 (0,2309)	0,0144 (0,2232)	0,0147 (0,2127)	-0,0222 (0,3787)	0,0511 (0,32)	0,0568 (0,3811)	0,7613 (0,2045)	0,0839 (0,3035)	-0,0171 (0,3102)	-0,0253 (0,4231)	0,0082 (0,2494)
cpi_{EU}^p	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,0237 (0,2729)	0,0045 (0,2328)	0,0345 (0,2652)	0 (0)	0,81 (0,2166)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
EUR/HUF^p	-0,0095 (0,2156)	-0,0175 (0,2051)	0,0036 (0,1994)	0,0227 (0,2935)	-0,0056 (0,2631)	-0,013 (0,2875)	-0,0063 (0,2081)	0,0179 (0,2778)	-0,0336 (0,2685)	-0,0075 (0,3695)	0,0053 (0,2067)
L_{CDS}^p	0,0214 (0,1915)	-0,0009 (0,1828)	0,0031 (0,1821)	0,0066 (0,2209)	-0,0165 (0,1994)	-0,0102 (0,2116)	-0,0206 (0,1779)	0,0438 (0,2002)	0,0164 (0,2241)	0,6173 (0,2627)	0,0284 (0,1715)
S_{CDS}^p	0,031 (0,2248)	-0,0041 (0,2115)	0,001 (0,1962)	0,0602 (0,3276)	0,0192 (0,3121)	-0,0056 (0,3409)	0,002 (0,2112)	0,0106 (0,4048)	0,0049 (0,2903)	-0,0017 (0,4251)	0,7537 (0,2561)

7. táblázat: Az átmenetmátrix (F) a 2-es rezsim esetén, zárójelben az egyes értékekhez tartozó szórások

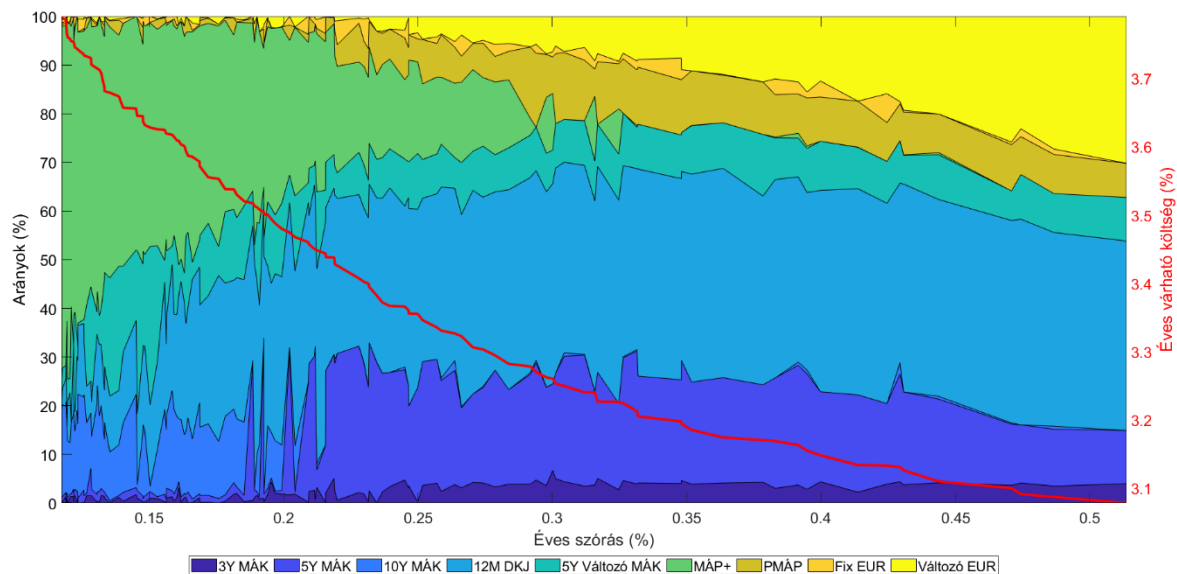
Q_1	L_{HUN}^p	S_{HUN}^p	C_{HUN}^p	L_{EU}^p	S_{EU}^p	C_{EU}^p	cpi_{HUN}^p	cpi_{EU}^p	EUR/HUF^p	L_{CDS}^p	S_{CDS}^p
L_{HUN}^p	0,3513	0,0084	-0,0102	0,0084	0,0127	0,0007	-0,0072	-0,0023	0,0076	0,0015	-0,0145
S_{HUN}^p		0,5152	-0,0468	-0,0079	0,0052	0,0041	0,0082	0,0092	0,0105	0,0007	0,0038
C_{HUN}^p			0,5012	0,0164	-0,0097	0,0020	-0,0111	-0,0090	-0,0044	-0,0026	-0,0017
L_{EU}^p				0,1042	0,0043	-0,0009	-0,0182	-0,0162	0,0006	-0,0006	0,0093
S_{EU}^p					0,1438	0,0040	0,0148	0,0031	-0,0015	0,0014	0,0059
C_{EU}^p						0,1007	-0,0085	0,0018	0,0024	-0,0012	0,0011
cpi_{HUN}^p							0,3403	0,0101	-0,0088	0,0007	-0,0018
cpi_{EU}^p								0,0782	-0,0028	0,0006	0,0007
EUR/HUF^p									0,1514	0,0064	0,0042
L_{CDS}^p										0,0694	-0,0001
S_{CDS}^p											0,1626

8. táblázat: Az átmenetegyenes kovariancia mátrixa (Q) az 1-es rezsim esetén

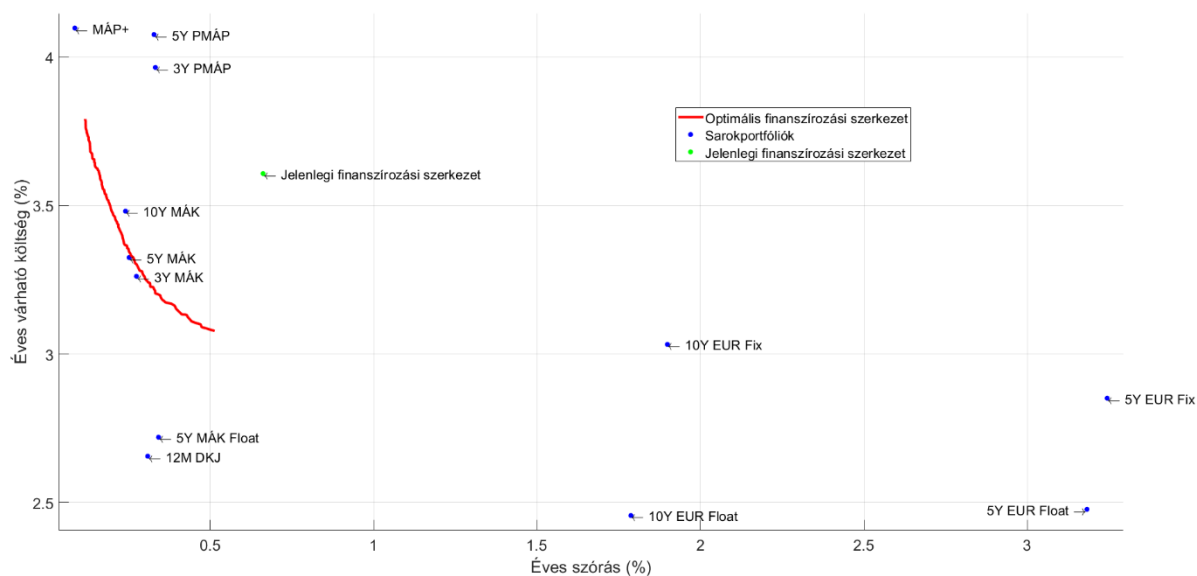
Q_2	L_{HUN}^p	S_{HUN}^p	C_{HUN}^p	L_{EU}^p	S_{EU}^p	C_{EU}^p	cpi_{HUN}^p	cpi_{EU}^p	EUR/HUF^p	L_{CDS}^p	S_{CDS}^p
L_{HUN}^p	0,8240	0,0108	-0,0227	0,0198	0,0238	0,0034	-0,0172	0,0022	0,0085	0,0042	-0,0240
S_{HUN}^p		1,0426	-0,0248	-0,0060	0,0010	-0,0071	0,0129	0,0035	0,0065	-0,0030	0,0010
C_{HUN}^p			1,1167	0,0024	-0,0085	0,0128	-0,0075	-0,0071	-0,0057	-0,0011	-0,0100
L_{EU}^p				0,2115	0,0114	-0,0021	-0,0243	-0,0221	0,0022	-0,0038	0,0165
S_{EU}^p					0,3469	0,0100	0,0263	0,0186	0,0017	-0,0013	0,0101
C_{EU}^p						0,1971	-0,0134	0,0036	-0,0022	-0,0045	0,0036
cpi_{HUN}^p							0,8281	0,0143	-0,0153	0,0005	-0,0113
cpi_{EU}^p								0,2490	-0,0060	0,0020	0,0007
EUR/HUF^p									0,3597	0,0094	0,0131
L_{CDS}^p										0,1370	0,0006
S_{CDS}^p											0,3712

9. táblázat: Az átmenetegyenes kovariancia mátrixa (Q) a 2-es rezsim esetén

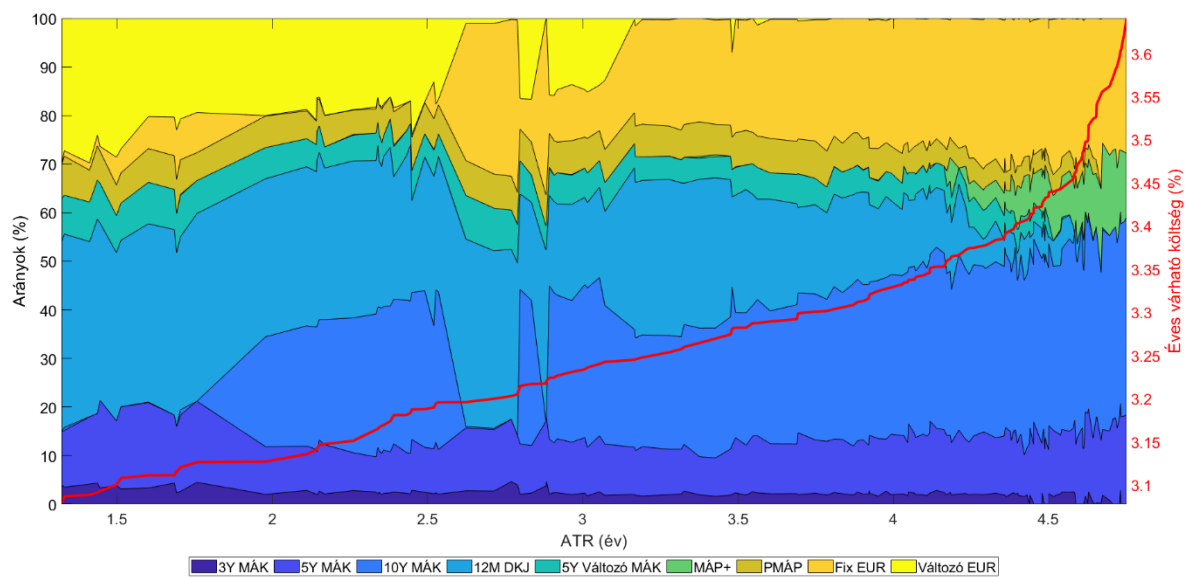
Függelék C: Optimális költség-kockázat frontok



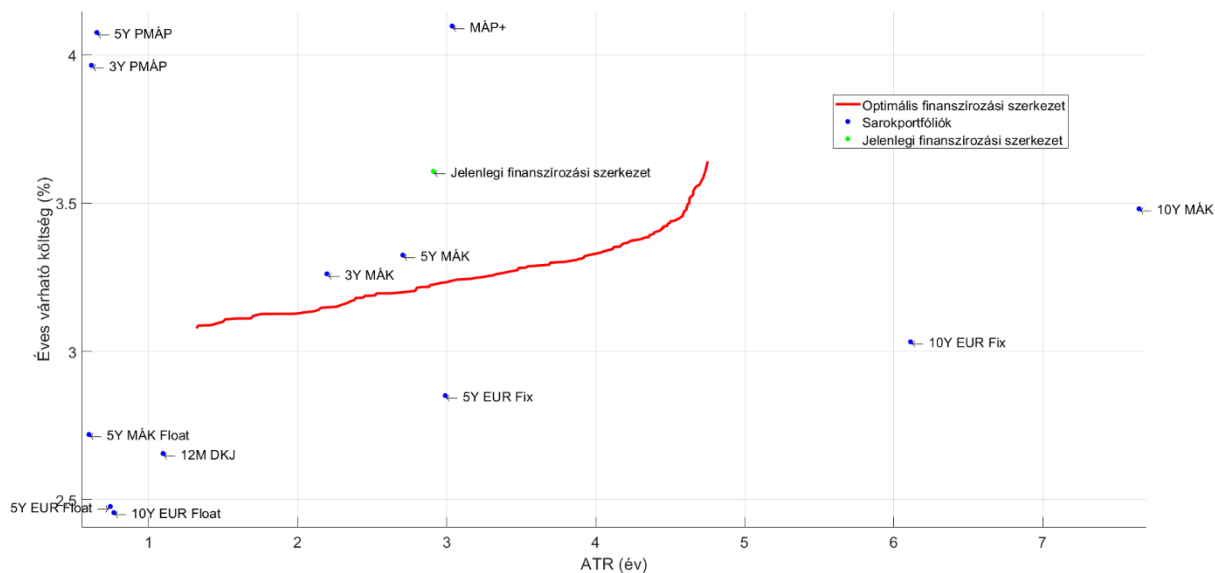
29. ábra: Optimális finanszírozási szerkezetek a szórás mint kockázati mérték szerint



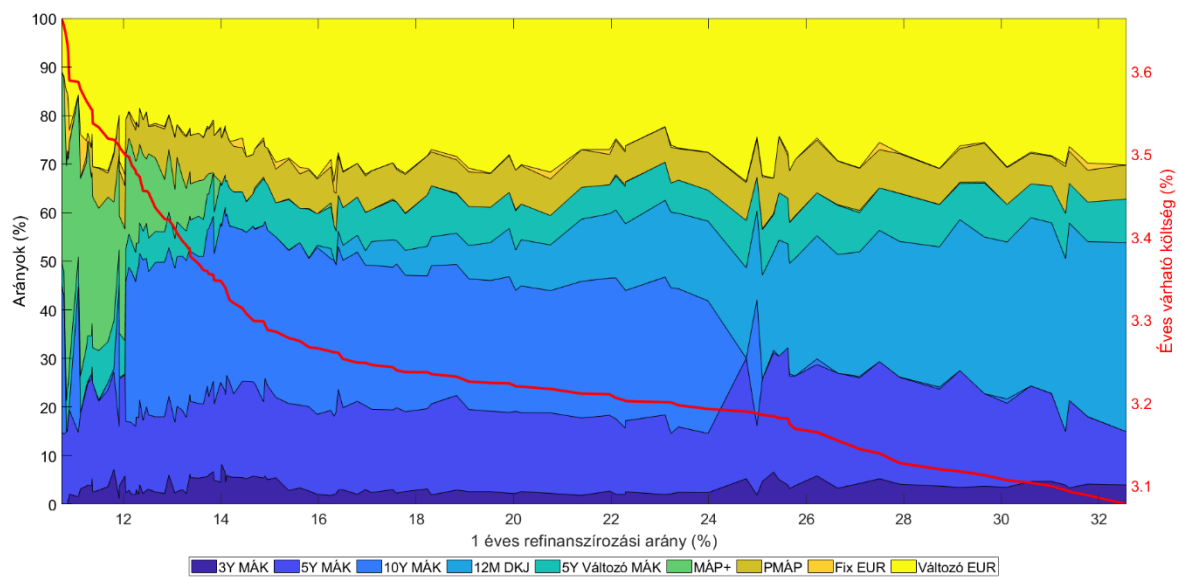
30. ábra: Optimális költség - szórás front (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)



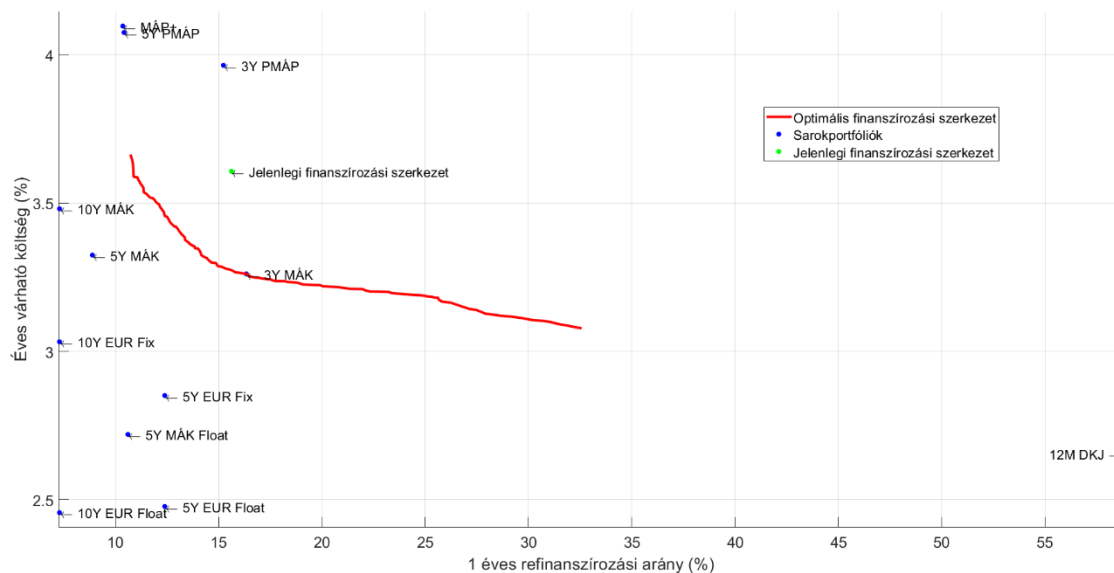
31. ábra: Optimalis finanszírozási szerkezetek az ATR (év) mint kockázati mérték szerint



32. ábra: Optimalis költség - ATR front (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)



33. ábra: Optimalis finanszírozási szerkezetek az 1 éves refinanszírozási arány mint kockázati mérték szerint



34. ábra: Optimalis költség - 1 éves refinanszírozási arány front (a sarokportfóliók a választott instrumentum 100%-os arányát jelentik, likviditási költségek és korlátok nélkül)

Függelék D: Optimális finanszírozási szerkezetek

Stratégia sorszáma	Költség	Szórás	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
1	3,79	0,15	0,84	19,39	40,14	0,00	0,00	35,24	0,23	3,98	0,18	99,76	4,16	95,68
2	3,78	0,18	1,23	16,83	40,68	0,02	0,00	35,45	0,01	5,34	0,43	99,96	5,78	92,47
3	3,78	0,15	1,06	15,10	40,05	0,00	2,44	34,53	2,94	3,75	0,14	94,41	3,89	96,47
4	3,78	0,17	0,00	19,01	41,43	0,06	0,20	34,46	0,00	4,80	0,05	99,73	4,85	98,87
5	3,76	0,16	1,25	17,62	40,20	0,12	2,40	33,58	0,40	4,13	0,31	96,95	4,44	93,07
6	3,76	0,18	3,56	17,32	41,74	0,42	0,01	31,79	0,00	5,03	0,12	99,54	5,16	97,61
7	3,73	0,17	1,06	17,43	39,97	0,00	5,30	31,64	0,00	4,58	0,03	94,44	4,61	99,46
8	3,72	0,16	0,98	16,84	39,03	0,01	6,41	28,59	4,05	3,84	0,27	89,09	4,11	93,42
9	3,72	0,19	1,31	15,09	37,40	0,15	5,84	32,16	0,90	4,73	2,41	92,57	7,14	66,28
10	3,71	0,18	3,09	17,01	37,68	0,00	5,65	26,85	4,28	5,35	0,10	89,50	5,45	98,21
11	3,71	0,19	2,03	16,55	38,95	0,34	6,45	29,42	0,94	4,95	0,38	91,84	5,33	92,78
12	3,71	0,22	2,75	16,21	39,77	0,01	5,37	29,30	0,35	6,19	0,05	93,89	6,24	99,14
13	3,70	0,21	1,91	14,63	41,39	0,00	6,38	29,83	0,00	5,86	0,00	93,23	5,86	99,95
14	3,70	0,18	1,04	15,37	41,41	0,01	6,83	26,46	4,30	4,30	0,29	88,33	4,58	93,74
15	3,70	0,20	2,58	16,06	39,39	0,00	4,70	28,48	3,71	1,54	3,55	91,14	5,09	30,20
16	3,70	0,23	3,30	17,38	40,08	0,10	3,82	24,71	3,87	6,73	0,01	91,65	6,74	99,84
17	3,70	0,20	1,59	14,91	39,25	2,43	5,59	29,54	0,86	5,54	0,29	90,57	5,83	95,05
18	3,70	0,21	0,28	14,97	40,49	2,78	4,58	29,69	0,72	6,02	0,47	91,36	6,49	92,77
19	3,70	0,25	0,59	17,89	41,15	0,32	3,40	25,57	3,66	7,40	0,00	92,01	7,40	99,94
20	3,69	0,20	2,64	16,46	40,37	0,09	4,82	26,95	3,67	1,58	3,42	90,97	5,00	31,53
21	3,69	0,26	1,11	15,45	39,82	0,06	6,05	28,57	0,76	8,19	0,00	92,52	8,19	100,00
22	3,69	0,27	0,97	17,08	40,32	0,14	5,23	27,87	0,00	8,33	0,06	94,15	8,39	99,34
23	3,69	0,21	1,95	18,03	41,51	0,08	5,12	22,43	4,97	4,65	1,25	89,19	5,90	78,81
24	3,67	0,23	3,17	16,15	41,53	0,00	6,16	22,98	3,76	6,23	0,01	89,42	6,24	99,84
25	3,67	0,22	2,90	17,62	38,43	0,00	7,12	23,35	3,97	6,62	0,00	88,13	6,62	100,00
26	3,66	0,26	2,61	16,76	40,16	0,00	5,60	22,71	3,64	8,30	0,23	89,90	8,53	97,34
27	3,66	0,27	2,34	17,48	41,96	0,17	4,97	21,39	4,06	7,59	0,05	90,05	7,64	99,32
28	3,65	0,23	4,93	16,75	42,47	0,60	4,40	17,76	6,45	6,63	0,00	87,74	6,64	99,97
29	3,63	0,25	4,79	18,25	40,40	0,75	5,62	19,36	3,46	6,81	0,56	89,38	7,37	92,39
30	3,62	0,26	4,71	19,46	40,70	0,10	4,91	16,20	6,23	7,68	0,02	87,83	7,70	99,77
31	3,62	0,26	5,46	16,13	40,48	0,06	7,42	16,22	6,76	7,41	0,07	84,62	7,47	99,11
32	3,62	0,23	4,56	16,71	43,37	0,00	4,55	16,29	6,57	5,80	2,15	87,92	7,95	72,99
33	3,62	0,27	2,54	18,94	42,28	0,14	6,09	18,52	3,72	7,44	0,33	89,21	7,77	95,79
34	3,61	0,25	3,33	18,09	43,55	0,28	6,23	17,40	4,48	6,64	0,01	88,23	6,64	99,86
35	3,61	0,27	4,26	18,90	41,12	0,03	6,25	16,58	5,01	7,42	0,44	87,75	7,86	94,41
36	3,60	0,26	3,92	17,85	42,02	0,08	7,92	16,77	4,86	6,51	0,07	86,22	6,58	98,89
37	3,60	0,29	3,43	19,19	42,05	0,65	5,12	17,03	3,87	8,26	0,40	89,45	8,66	95,38
38	3,59	0,31	3,95	17,61	42,81	0,02	5,77	17,13	3,37	9,34	0,00	89,90	9,34	99,99
39	3,59	0,26	4,97	17,93	40,80	0,00	5,93	16,52	5,09	4,63	4,13	87,93	8,76	52,85
40	3,58	0,32	2,52	20,18	40,67	0,16	5,91	16,99	3,67	9,84	0,06	89,18	9,89	99,44
41	3,58	0,29	4,07	19,02	38,95	0,07	6,40	16,19	4,94	7,31	3,04	87,27	10,36	70,61
42	3,58	0,33	2,55	18,37	41,95	0,54	5,35	15,57	4,89	10,15	0,62	87,92	10,77	94,25
43	3,58	0,28	3,19	18,07	40,64	0,10	5,85	16,63	5,26	5,47	4,80	87,51	10,27	53,27
44	3,57	0,33	2,22	20,03	40,69	0,03	6,20	16,23	4,22	10,37	0,01	88,34	10,38	99,91
45	3,57	0,35	2,60	18,48	41,85	0,07	5,70	15,20	5,19	10,66	0,24	87,69	10,90	97,78
46	3,57	0,29	5,10	18,67	40,89	0,24	5,07	14,94	5,57	5,08	4,42	87,97	9,50	53,45
47	3,57	0,33	2,72	18,36	42,20	0,00	6,40	14,68	5,52	9,60	0,52	86,74	10,12	94,83
48	3,57	0,34	2,47	16,75	42,43	0,31	5,94	15,08	5,39	11,03	0,59	86,83	11,63	94,89
49	3,56	0,29	4,67	16,88	41,37	0,84	6,36	15,44	4,75	5,89	3,80	86,77	9,70	60,77
50	3,56	0,41	3,02	14,89	39,81	0,32	5,42	16,86	3,88	15,76	0,05	88,58	15,81	99,68

OPTIMÁLIS ADÓSSÁGPORTFÓLIÓ MODELL | Bebes András, Tran Dávid, Bebesi László

Stratégia sorszáma	Költség	Szórás	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
51	3,56	0,34	3,44	17,72	40,20	0,01	5,56	16,44	4,12	8,28	4,23	88,93	12,51	66,20
52	3,56	0,31	4,66	16,83	40,78	0,84	6,34	15,34	4,73	6,64	3,85	86,69	10,49	63,29
53	3,55	0,30	3,82	18,22	40,02	0,00	6,92	16,58	3,89	5,17	5,38	87,91	10,54	49,01
54	3,55	0,43	1,68	14,98	39,52	0,28	5,75	16,49	4,39	16,89	0,01	87,46	16,90	99,92
55	3,55	0,39	4,14	16,16	41,27	0,15	5,59	14,37	4,73	13,27	0,32	87,89	13,59	97,62
56	3,54	0,33	2,60	19,35	40,13	0,00	5,57	16,11	4,14	6,85	5,26	88,96	12,11	56,55
57	3,54	0,44	1,95	15,71	40,16	0,14	5,82	16,33	3,00	16,89	0,00	89,22	16,89	99,99
58	3,54	0,39	3,13	16,30	41,78	0,19	6,27	13,96	4,79	13,58	0,00	86,98	13,58	100,00
59	3,54	0,35	1,90	17,17	41,05	0,00	7,06	15,80	4,21	8,47	4,34	87,07	12,81	66,14
60	3,53	0,43	2,68	16,58	39,23	0,34	5,76	14,38	4,67	16,26	0,09	87,12	16,36	99,43
61	3,53	0,45	2,35	16,23	38,92	0,17	4,54	14,36	4,88	18,41	0,13	88,22	18,54	99,32
62	3,53	0,45	2,68	15,65	37,56	0,23	5,85	14,95	4,32	17,57	1,21	87,21	18,78	93,56
63	3,53	0,35	3,16	17,76	40,17	0,03	6,51	15,02	3,99	8,62	4,74	87,85	13,36	64,51
64	3,52	0,45	2,82	14,73	39,10	0,62	5,66	14,41	4,43	18,23	0,00	86,90	18,23	100,00
65	3,52	0,46	4,26	15,10	39,59	0,21	4,40	13,60	4,31	18,53	0,01	89,06	18,55	99,92
66	3,52	0,48	3,24	14,35	35,88	0,19	4,64	15,01	3,67	22,87	0,13	88,95	23,00	99,44
67	3,52	0,47	3,43	15,50	35,48	0,04	6,35	14,51	4,20	20,49	0,00	86,69	20,49	99,98
68	3,51	0,49	2,27	15,63	37,45	0,03	4,66	14,39	3,64	21,66	0,27	89,33	21,92	98,79
69	3,51	0,45	2,82	15,20	41,47	0,15	5,77	13,25	4,46	16,63	0,24	87,51	16,87	98,59
70	3,51	0,39	4,60	16,62	39,48	0,18	5,47	13,20	5,39	9,46	5,60	87,00	15,05	62,82
71	3,50	0,45	4,82	15,03	39,87	0,14	5,78	12,03	5,00	16,89	0,45	86,78	17,34	97,42
72	3,50	0,50	2,77	15,02	35,63	0,10	4,43	13,42	4,43	24,19	0,02	88,18	24,21	99,92
73	3,50	0,45	2,24	16,27	41,57	0,15	5,89	12,29	4,99	16,49	0,11	86,77	16,60	99,31
74	3,49	0,50	2,83	15,42	36,99	0,00	4,79	12,27	5,34	22,36	0,00	86,95	22,36	99,99
75	3,49	0,50	2,85	15,44	38,81	0,00	4,70	12,39	4,54	21,26	0,02	88,27	21,28	99,92
76	3,49	0,49	2,39	16,18	37,15	0,26	6,15	12,46	4,94	20,42	0,05	85,73	20,47	99,74
77	3,49	0,48	2,02	16,66	38,00	0,11	6,86	12,39	4,63	18,92	0,40	85,61	19,33	97,91
78	3,48	0,51	4,47	13,08	36,19	0,05	5,69	12,92	3,95	23,64	0,00	87,31	23,64	99,99
79	3,48	0,50	4,03	14,53	33,76	0,00	5,97	12,20	5,19	23,43	0,89	85,25	24,32	96,33
80	3,48	0,49	2,62	16,48	37,33	0,27	6,48	11,55	5,41	19,82	0,04	84,83	19,87	99,78
81	3,48	0,49	4,72	14,36	36,09	1,33	6,08	11,98	4,43	21,02	0,01	85,01	21,03	99,96
82	3,48	0,51	4,80	15,38	33,70	0,17	4,75	11,47	4,97	24,76	0,00	86,86	24,76	100,00
83	3,47	0,50	2,89	14,90	37,68	0,15	5,60	11,01	5,35	21,71	0,70	85,70	22,42	96,86
84	3,46	0,51	2,86	15,61	38,13	0,21	5,25	11,22	4,24	22,48	0,01	87,50	22,48	99,97
85	3,46	0,50	4,79	15,42	35,53	0,00	6,40	9,15	6,49	22,17	0,05	83,43	22,22	99,79
86	3,46	0,52	4,25	15,07	33,93	0,72	4,97	10,91	4,92	25,20	0,02	85,79	25,22	99,93
87	3,46	0,52	2,30	15,10	37,61	0,08	5,34	11,11	4,78	23,64	0,03	86,64	23,67	99,88
88	3,46	0,51	2,27	17,92	36,88	0,40	6,14	10,10	5,14	20,91	0,24	85,18	21,15	98,87
89	3,46	0,50	2,26	17,90	37,76	1,34	6,13	10,15	4,88	19,43	0,17	84,65	19,60	99,14
90	3,45	0,51	2,95	15,81	38,85	0,97	6,15	9,99	4,54	20,64	0,10	85,30	20,73	99,54
91	3,45	0,53	2,05	16,35	34,12	0,45	5,50	10,71	4,75	26,08	0,00	85,53	26,08	99,99
92	3,44	0,53	3,03	14,35	37,82	0,00	5,28	9,79	4,86	24,70	0,18	86,50	24,88	99,27
93	3,44	0,53	3,28	15,52	36,86	0,00	6,69	9,67	4,28	23,50	0,19	85,62	23,69	99,20
94	3,44	0,53	2,23	13,90	39,03	2,21	4,76	10,12	4,51	23,25	0,00	85,05	23,25	100,00
95	3,44	0,55	2,72	16,18	33,84	0,00	5,58	9,94	4,16	27,39	0,18	86,55	27,57	99,34
96	3,43	0,51	2,41	14,54	34,82	3,93	6,47	10,46	4,68	22,64	0,04	80,50	22,69	99,81
97	3,43	0,53	2,42	13,67	34,57	1,65	6,92	10,04	4,54	26,14	0,06	82,24	26,20	99,77
98	3,43	0,53	2,00	13,16	33,74	2,89	6,46	10,08	5,23	26,31	0,12	80,18	26,43	99,54
99	3,43	0,53	1,81	16,46	35,70	4,79	4,20	9,33	4,25	23,44	0,01	82,69	23,45	99,97
100	3,42	0,52	2,56	16,93	33,90	4,42	5,77	9,29	4,62	22,50	0,00	80,89	22,50	100,00

Stratégia sorszáma	Költség	Szórás	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
101	3,42	0,54	1,45	14,87	33,90	3,43	5,48	9,51	4,75	26,60	0,02	81,38	26,61	99,94
102	3,42	0,45	2,97	17,43	39,06	1,15	5,70	10,39	5,26	8,34	9,70	85,22	18,04	46,24
103	3,42	0,47	2,38	17,59	38,68	0,43	5,30	10,73	5,32	9,58	9,99	86,26	19,57	48,96
104	3,42	0,44	2,02	14,22	42,09	0,03	5,92	12,69	4,88	5,86	12,30	86,77	18,16	32,27
105	3,42	0,52	2,06	15,39	37,41	0,06	6,08	9,88	5,01	17,88	6,23	85,31	24,11	74,15
106	3,42	0,47	2,13	17,64	40,77	0,00	5,53	9,94	5,04	10,16	8,78	86,96	18,94	53,64
107	3,42	0,45	1,99	17,10	41,16	0,11	6,43	10,65	5,01	7,82	9,74	86,00	17,56	44,52
108	3,42	0,47	1,81	16,47	40,91	0,00	6,05	10,47	5,10	9,95	9,26	86,20	19,20	51,79
109	3,42	0,48	2,23	17,10	37,43	0,55	5,80	11,23	4,56	11,24	9,86	86,17	21,10	53,28
110	3,42	0,55	1,80	14,22	34,71	3,23	5,38	8,43	5,13	27,05	0,06	81,15	27,10	99,79
111	3,41	0,46	2,85	16,67	41,86	0,10	5,31	10,62	4,62	7,01	10,95	87,77	17,96	39,02
112	3,41	0,47	2,91	15,54	39,50	0,10	6,51	10,97	5,06	8,07	11,34	85,52	19,41	41,57
113	3,41	0,50	2,28	15,09	37,64	0,05	5,23	11,09	4,93	12,66	11,02	86,61	23,68	53,46
114	3,41	0,50	3,01	15,30	38,80	0,04	4,96	10,19	4,82	13,10	9,79	87,26	22,88	57,23
115	3,41	0,52	2,59	15,70	35,13	0,11	5,87	10,71	4,31	16,05	9,53	86,17	25,58	62,74
116	3,41	0,52	2,06	15,84	35,28	1,37	5,46	10,08	4,75	17,23	7,94	84,54	25,17	68,46
117	3,41	0,51	2,34	15,02	33,65	6,66	6,27	8,91	4,71	22,39	0,05	77,25	22,44	99,78
118	3,40	0,51	2,30	14,07	36,53	2,53	5,82	10,60	4,42	15,88	7,85	83,25	23,73	66,93
119	3,40	0,47	2,68	16,86	40,81	0,02	6,03	10,25	4,44	7,74	11,15	87,06	18,90	40,98
120	3,40	0,49	2,41	17,04	36,11	2,27	5,48	10,38	4,82	10,97	10,51	83,98	21,48	51,08
121	3,40	0,52	1,91	15,07	36,02	0,09	6,29	10,40	4,64	15,92	9,66	85,19	25,58	62,24
122	3,40	0,46	3,55	16,77	39,50	1,20	6,66	10,05	4,64	5,78	11,84	84,83	17,63	32,80
123	3,39	0,49	2,52	16,80	39,80	0,00	5,02	9,98	4,93	8,84	12,10	87,41	20,94	42,23
124	3,39	0,47	2,71	16,67	38,63	1,50	5,50	10,80	4,71	6,36	13,11	85,45	19,47	32,67
125	3,39	0,45	2,73	18,34	38,49	0,00	5,96	9,82	6,15	3,94	14,59	85,15	18,52	21,25
126	3,39	0,48	2,03	18,59	35,75	0,00	5,75	11,40	4,91	6,76	14,81	86,41	21,57	31,34
127	3,39	0,49	2,73	14,51	38,44	0,89	5,75	11,05	4,75	8,54	13,33	85,42	21,87	39,04
128	3,39	0,47	1,58	16,62	40,02	1,41	5,46	10,77	4,70	6,35	13,08	85,64	19,42	32,67
129	3,39	0,46	2,98	17,00	37,58	1,07	6,87	10,48	5,19	4,93	13,89	83,83	18,82	26,18
130	3,38	0,47	2,17	16,93	39,93	0,00	6,23	9,94	4,88	7,28	12,64	86,13	19,92	36,56
131	3,38	0,46	1,69	17,59	37,29	2,35	5,66	10,72	5,06	5,81	13,84	83,74	19,65	29,55
132	3,38	0,49	2,76	14,77	39,07	0,90	5,84	10,15	4,83	8,68	13,00	85,22	21,68	40,02
133	3,38	0,48	2,11	17,01	39,06	0,34	5,40	9,85	5,43	6,39	14,40	85,90	20,80	30,74
134	3,38	0,47	2,66	14,69	40,05	0,20	8,02	10,56	4,52	6,02	13,27	84,22	19,30	31,22
135	3,38	0,51	2,04	16,83	38,90	0,00	5,41	9,48	4,81	9,48	13,05	86,81	22,53	42,08
136	3,38	0,48	2,24	17,54	36,19	0,00	7,07	10,12	5,84	5,85	15,16	83,66	21,01	27,84
137	3,38	0,47	2,96	16,69	35,84	3,40	5,05	10,58	4,86	6,50	14,10	83,23	20,60	31,55
138	3,37	0,45	2,82	14,89	38,78	4,70	5,54	10,26	4,62	5,72	12,67	81,80	18,38	31,11
139	3,37	0,45	2,30	16,81	37,86	4,04	5,32	10,66	4,81	3,94	14,26	82,67	18,20	21,66
140	3,37	0,51	1,92	16,33	39,07	0,00	5,74	9,30	4,69	10,14	12,81	86,46	22,95	44,18
141	3,37	0,50	2,24	15,82	37,87	0,21	6,48	9,65	4,97	9,32	13,45	84,91	22,77	40,93
142	3,37	0,48	2,44	19,85	37,18	0,24	6,28	9,55	4,74	5,33	14,38	85,97	19,72	27,05
143	3,37	0,49	3,04	14,30	39,17	0,03	5,48	10,81	4,72	6,83	15,63	86,81	22,46	30,39
144	3,37	0,51	2,56	14,09	37,37	0,92	5,91	9,91	4,87	10,46	13,92	84,53	24,38	42,89
145	3,37	0,48	2,27	15,39	37,70	2,43	6,67	10,41	4,39	6,93	13,81	82,99	20,74	33,43
146	3,36	0,49	2,14	14,69	36,95	2,34	6,29	10,45	4,67	7,85	14,62	82,84	22,47	34,93
147	3,36	0,51	2,40	14,56	36,50	0,07	6,71	10,78	4,35	8,48	16,16	85,23	24,63	34,41
148	3,36	0,49	2,71	15,15	37,40	2,14	5,68	10,32	4,54	6,52	15,54	84,15	22,06	29,56
149	3,36	0,51	4,33	14,52	34,64	0,08	6,50	9,87	4,51	9,11	16,43	85,10	25,54	35,66
150	3,36	0,47	2,10	16,24	35,75	3,72	6,65	10,84	4,52	5,14	15,04	81,35	20,18	25,47

Stratégia sorszáma	Költség	Szórás	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
151	3,36	0,48	2,09	16,18	36,51	3,32	6,58	10,10	4,57	5,72	14,95	81,76	20,66	27,66
152	3,35	0,48	1,73	16,19	35,43	4,39	6,37	10,50	4,41	6,33	14,66	80,79	20,98	30,16
153	3,35	0,51	1,93	14,44	37,21	0,48	7,07	9,67	5,31	7,52	16,37	83,11	23,89	31,49
154	3,35	0,50	1,77	15,51	35,33	2,54	6,05	10,16	4,56	7,67	16,41	82,68	24,08	31,85
155	3,35	0,47	2,60	15,95	34,87	6,21	5,69	9,75	4,27	6,92	13,73	79,62	20,65	33,52
156	3,35	0,46	1,82	16,28	34,72	6,41	6,52	9,45	4,94	6,73	13,14	77,71	19,86	33,86
157	3,35	0,45	1,59	16,67	36,65	6,34	6,58	9,67	4,53	4,02	13,95	78,73	17,97	22,39
158	3,35	0,48	2,86	13,85	38,95	4,95	5,53	9,51	4,26	5,18	14,92	81,57	20,10	25,78
159	3,35	0,50	3,10	13,23	33,64	2,77	6,74	10,79	4,49	7,47	17,77	81,27	25,23	29,60
160	3,34	0,48	2,64	13,84	37,02	4,39	5,95	9,97	4,77	4,66	16,75	80,77	21,42	21,78
161	3,34	0,51	1,98	13,90	36,64	1,08	6,14	9,74	5,19	6,78	18,54	83,38	25,32	26,79
162	3,33	0,50	1,89	15,35	34,23	2,57	6,48	10,59	4,45	4,71	19,73	82,12	24,43	19,26
163	3,33	0,52	1,55	15,08	34,36	2,47	5,89	9,89	4,44	7,44	18,87	82,63	26,31	28,28
164	3,33	0,50	2,04	15,31	33,74	3,84	5,98	10,17	4,57	5,89	18,46	80,99	24,35	24,19
165	3,33	0,50	2,79	15,03	34,59	4,48	6,29	9,08	4,48	6,08	17,20	80,14	23,28	26,11
166	3,32	0,50	2,30	14,34	34,11	4,02	6,59	9,37	5,05	5,47	18,76	79,34	24,23	22,56
167	3,32	0,52	2,09	14,31	35,72	1,52	7,21	9,15	4,69	6,27	19,05	82,05	25,32	24,76
168	3,32	0,52	2,12	14,78	34,09	4,36	5,11	9,43	4,07	7,51	18,53	81,69	26,04	28,83
169	3,32	0,50	2,04	16,77	35,36	5,04	6,41	7,60	5,22	5,00	16,56	78,74	21,55	23,18
170	3,32	0,51	2,33	14,58	34,51	4,07	6,66	9,48	4,12	5,26	18,98	80,39	24,24	21,70
171	3,32	0,49	3,20	18,24	39,28	4,61	6,46	0,02	7,72	5,81	14,65	76,38	20,47	28,39
172	3,32	0,50	2,64	18,00	37,52	4,50	7,12	0,00	8,35	6,81	15,06	74,44	21,87	31,15
173	3,32	0,52	2,01	14,30	34,69	2,19	7,35	9,78	4,33	3,75	21,59	81,41	25,34	14,81
174	3,31	0,48	2,40	19,11	39,12	6,30	4,95	0,37	7,70	5,42	14,62	76,29	20,04	27,04
175	3,31	0,49	3,79	18,17	37,73	4,83	6,57	0,06	7,79	5,73	15,34	75,69	21,07	27,18
176	3,31	0,52	2,50	15,82	36,78	6,18	5,51	0,11	7,75	11,09	14,26	73,96	25,35	43,74
177	3,31	0,51	1,92	15,05	39,58	6,63	5,85	0,17	7,74	9,24	13,82	73,72	23,06	40,06
178	3,30	0,52	2,27	16,43	39,69	5,30	5,37	0,03	7,46	8,40	15,05	76,31	23,45	35,81
179	3,30	0,50	2,75	14,50	38,06	5,87	7,78	0,00	8,13	7,74	15,18	71,75	22,91	33,77
180	3,30	0,50	2,42	16,05	37,47	7,12	5,87	0,00	8,11	7,76	15,20	72,62	22,97	33,80
181	3,30	0,51	2,30	15,48	39,35	5,06	6,02	0,17	8,06	6,21	17,35	74,96	23,56	26,37
182	3,29	0,50	2,36	17,71	38,50	6,23	4,87	0,36	7,56	4,99	17,42	75,94	22,41	22,26
183	3,29	0,53	2,82	16,69	37,48	4,61	6,20	0,13	7,26	7,25	17,58	75,97	24,82	29,20
184	3,29	0,50	2,44	17,73	37,38	6,81	6,21	0,00	7,62	5,15	16,67	73,61	21,82	23,61
185	3,29	0,51	1,79	14,97	36,79	7,91	7,06	0,31	7,71	8,15	15,31	70,37	23,46	34,75
186	3,29	0,51	3,18	17,43	38,15	5,85	5,63	0,00	7,17	4,25	18,33	75,90	22,59	18,82
187	3,28	0,53	1,73	15,61	37,68	6,32	5,87	0,00	7,33	8,31	17,15	73,81	25,46	32,63
188	3,28	0,54	2,04	16,33	36,98	4,79	6,89	0,00	7,34	7,05	18,59	74,43	25,64	27,50
189	3,28	0,50	2,10	15,35	37,81	7,05	6,08	0,00	8,03	5,09	18,49	72,31	23,58	21,60
190	3,28	0,50	1,65	14,62	38,43	7,97	6,21	0,04	7,73	6,04	17,31	71,42	23,35	25,86
191	3,28	0,50	2,37	16,90	39,53	6,22	6,28	0,04	7,97	0,18	20,51	74,20	20,69	0,87
192	3,27	0,51	2,48	14,64	34,98	7,31	6,98	0,56	7,53	6,79	18,74	70,71	25,53	26,59
193	3,27	0,53	2,28	16,34	33,28	5,70	9,47	0,00	7,10	6,83	19,00	69,97	25,83	26,43
194	3,27	0,51	2,93	16,41	36,94	5,77	6,16	0,00	8,03	0,17	23,59	73,81	23,75	0,70
195	3,27	0,53	1,90	16,17	34,61	7,34	4,81	0,12	7,16	7,13	20,77	73,22	27,90	25,55
196	3,27	0,51	2,33	13,49	35,66	9,72	5,62	0,01	7,75	7,18	18,23	69,04	25,42	28,25
197	3,27	0,55	1,89	13,69	37,36	4,60	5,47	0,01	7,57	6,79	22,61	75,00	29,40	23,10
198	3,27	0,55	1,89	13,77	37,39	4,61	6,42	0,01	7,58	6,05	22,27	74,04	28,32	21,38
199	3,26	0,52	2,97	14,14	34,76	6,85	7,35	0,60	7,13	5,18	21,02	71,10	26,20	19,77
200	3,26	0,54	2,29	13,68	34,01	6,18	6,71	0,09	7,55	6,73	22,77	71,02	29,50	22,81

OPTIMÁLIS ADÓSSÁGPORTFÓLIÓ MODELL | Bebes András, Tran Dávid, Bebesi László

Stratégia sorszáma	Költség	Szórás	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
201	3,26	0,52	1,90	15,61	36,92	7,35	6,13	0,08	7,39	1,61	23,00	72,31	24,62	6,55
202	3,25	0,55	1,69	14,63	34,37	5,31	6,52	0,01	7,00	5,63	24,84	72,92	30,47	18,48
203	3,25	0,53	1,85	15,23	33,91	8,61	6,08	0,04	6,84	6,04	21,39	70,32	27,43	22,02
204	3,25	0,52	2,28	16,79	34,37	8,22	6,39	0,00	7,56	0,40	24,00	70,69	24,40	1,62
205	3,25	0,55	1,71	13,99	35,10	6,49	5,87	0,03	6,85	4,71	25,24	72,58	29,95	15,73
206	3,25	0,52	1,99	14,03	33,57	10,16	5,78	0,16	7,29	5,87	21,15	68,18	27,02	21,72
207	3,25	0,53	2,40	18,04	31,84	7,34	7,90	0,04	6,96	0,64	24,84	70,21	25,48	2,53
208	3,24	0,52	2,72	17,23	31,27	8,46	7,52	0,00	7,54	1,21	24,04	68,53	25,25	4,77
209	3,24	0,51	2,37	13,88	32,67	11,69	5,89	0,00	7,36	5,34	20,80	66,23	26,13	20,42
210	3,24	0,52	1,60	14,21	33,24	9,60	6,22	0,00	7,77	0,75	26,61	67,53	27,35	2,73
211	3,24	0,51	2,02	16,51	32,29	10,09	7,90	0,00	7,31	1,36	22,52	66,76	23,88	5,69
212	3,24	0,55	2,07	17,19	30,17	6,14	6,91	0,00	7,09	0,22	30,20	71,04	30,42	0,73
213	3,24	0,53	2,04	19,53	30,51	8,86	6,27	0,10	7,04	0,18	25,47	70,18	25,65	0,69
214	3,24	0,51	2,17	14,31	33,16	11,02	7,30	0,25	7,36	1,15	23,28	66,01	24,43	4,69
215	3,24	0,50	2,45	13,89	36,40	13,95	6,42	0,00	6,89	0,71	19,29	65,93	20,00	3,55
216	3,23	0,49	2,15	16,47	34,10	13,76	5,86	0,00	7,09	0,29	20,27	66,37	20,56	1,43
217	3,23	0,50	2,70	16,19	30,49	14,08	7,29	0,00	6,87	4,43	17,96	63,62	22,39	19,78
218	3,23	0,51	2,68	17,77	31,72	13,51	5,56	0,00	6,53	0,74	21,49	67,09	22,23	3,32
219	3,23	0,51	2,42	15,72	30,27	14,63	6,51	0,00	6,54	5,77	18,14	63,62	23,90	24,13
220	3,23	0,50	1,83	14,31	33,59	15,42	6,38	0,00	7,72	0,82	19,93	62,74	20,75	3,95
221	3,22	0,52	1,73	13,43	32,95	12,71	4,82	0,05	6,89	0,50	26,93	66,36	27,43	1,81
222	3,22	0,49	1,75	14,58	33,37	16,77	6,53	0,01	7,70	0,43	18,86	61,59	19,29	2,23
223	3,22	0,51	2,52	13,22	33,57	14,74	5,83	0,04	6,87	0,02	23,18	64,26	23,20	0,07
224	3,22	0,52	2,23	18,45	29,87	13,03	6,46	0,13	6,72	0,00	23,12	65,92	23,13	0,01
225	3,22	0,50	2,00	15,31	28,60	13,86	6,90	0,33	8,25	0,32	24,43	61,45	24,75	1,29
226	3,22	0,49	2,48	16,07	33,10	18,31	6,41	0,00	6,54	0,02	17,08	62,30	17,09	0,10
227	3,21	0,52	2,80	18,39	28,55	14,07	5,97	0,00	6,87	0,72	22,62	64,90	23,34	3,10
228	3,21	0,52	1,82	15,94	28,12	12,78	6,55	0,00	7,76	0,03	27,00	62,87	27,04	0,11
229	3,21	0,50	2,52	12,62	33,59	17,51	5,67	0,01	7,00	0,93	20,15	61,76	21,08	4,43
230	3,21	0,52	2,03	15,54	29,00	13,98	7,00	0,30	7,02	0,33	24,80	62,60	25,13	1,33
231	3,20	0,51	1,81	13,24	31,57	17,06	5,69	0,00	7,32	0,68	22,63	60,78	23,31	2,93
232	3,20	0,52	2,15	12,41	29,98	15,56	5,99	0,00	7,34	0,48	26,10	60,65	26,58	1,81
233	3,20	0,51	2,75	12,75	30,68	17,39	6,35	0,14	7,28	0,01	22,65	59,90	22,66	0,04
234	3,20	0,49	1,86	17,46	27,20	18,54	6,99	0,01	7,91	0,06	19,98	58,18	20,04	0,30
235	3,19	0,51	2,71	16,41	25,97	18,77	6,08	0,01	7,73	0,71	21,61	58,06	22,32	3,18
236	3,19	0,51	2,95	17,51	26,20	19,68	7,49	0,00	6,62	0,04	19,50	58,00	19,54	0,21
237	3,19	0,51	2,66	18,07	26,13	20,87	5,81	0,00	6,72	0,01	19,73	58,39	19,74	0,07
238	3,18	0,54	2,71	17,49	26,18	21,36	6,78	0,00	6,00	0,00	19,48	57,60	19,48	0,00
239	3,18	0,42	3,22	24,84	0,23	27,82	10,08	6,85	8,95	0,03	17,98	42,86	18,01	0,19
240	3,18	0,49	2,52	14,82	25,75	24,40	5,25	0,00	8,32	0,14	18,80	53,16	18,94	0,73
241	3,18	0,54	3,34	15,09	24,51	20,04	7,12	0,00	7,13	0,21	22,56	55,61	22,76	0,91
242	3,18	0,44	1,67	21,06	0,25	29,42	9,60	13,47	3,37	0,50	20,66	46,24	21,16	2,38
243	3,18	0,44	4,18	19,95	0,03	27,55	9,61	8,65	8,30	0,69	21,03	41,92	21,73	3,19
244	3,18	0,53	2,73	13,85	26,78	23,57	5,95	0,00	6,89	0,01	20,22	54,36	20,23	0,07
245	3,17	0,43	3,12	18,73	0,00	31,48	7,02	10,33	5,77	4,65	18,90	42,10	23,55	19,76
246	3,17	0,44	3,16	16,64	0,11	31,75	7,09	10,42	5,86	5,91	19,06	40,43	24,97	23,67
247	3,17	0,46	3,46	22,15	0,00	25,95	9,23	4,74	9,57	0,08	24,82	40,42	24,89	0,31
248	3,17	0,43	3,13	17,16	0,03	32,65	6,99	10,30	5,75	4,65	19,33	40,29	23,98	19,38
249	3,16	0,45	3,94	25,35	0,00	29,64	10,54	5,19	6,80	0,92	17,62	42,32	18,55	4,97
250	3,16	0,45	5,00	26,25	0,60	27,14	11,01	0,00	9,63	0,01	20,36	40,00	20,37	0,04

Stratégia sorszáma	Költség	Szórás	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
251	3,16	0,46	5,11	22,10	1,31	27,61	8,23	0,30	9,63	4,83	20,89	38,80	25,72	18,77
252	3,15	0,46	4,19	14,40	0,00	30,57	9,66	10,80	5,85	1,03	23,48	38,95	24,51	4,19
253	3,15	0,45	2,92	23,03	1,36	28,78	8,57	0,32	9,83	5,03	20,16	36,94	25,19	19,98
254	3,15	0,48	3,64	21,08	0,05	27,93	8,30	0,01	8,99	8,26	21,75	35,39	30,01	27,52
255	3,15	0,45	1,90	17,68	0,00	32,55	10,30	9,48	6,26	0,01	21,82	37,17	21,83	0,04
256	3,14	0,42	3,87	22,84	1,46	32,53	10,69	0,00	10,08	0,00	18,53	34,58	18,53	0,00
257	3,14	0,47	3,81	23,60	0,00	31,25	7,89	0,03	8,12	5,64	19,66	36,74	25,30	22,28
258	3,13	0,44	4,05	23,54	0,00	33,27	7,92	0,00	9,50	0,01	21,71	35,25	21,72	0,07
259	3,13	0,50	4,12	22,00	0,04	27,90	9,87	0,05	8,13	0,19	27,70	36,35	27,89	0,67
260	3,13	0,47	3,95	17,10	1,58	32,75	7,34	0,00	10,70	1,50	25,09	30,83	26,59	5,63
261	3,12	0,47	3,12	17,23	0,00	31,67	7,89	0,00	11,13	0,00	28,95	28,65	28,95	0,00
262	3,12	0,47	3,56	23,24	1,21	34,95	6,97	0,00	7,27	1,91	20,89	36,28	22,80	8,39
263	3,11	0,46	4,12	20,85	0,00	35,43	7,93	0,00	8,06	0,50	23,11	32,68	23,61	2,11
264	3,11	0,48	3,33	17,58	0,11	36,67	8,54	0,00	6,95	6,57	20,25	28,73	26,82	24,49
265	3,11	0,49	4,15	22,26	0,00	35,88	8,03	0,00	6,08	0,20	23,40	34,57	23,60	0,83
266	3,10	0,49	4,09	19,91	0,00	37,69	7,58	0,41	6,05	1,10	23,16	32,23	24,26	4,54
267	3,10	0,52	4,68	19,66	0,00	34,61	6,95	0,00	6,33	0,24	27,53	33,70	27,77	0,85
268	3,09	0,50	3,37	17,98	0,02	36,49	8,15	0,00	6,62	0,98	26,39	29,43	27,38	3,60
269	3,09	0,50	4,34	14,33	0,00	40,00	8,03	0,00	7,00	2,24	24,07	25,33	26,30	8,50
270	3,09	0,47	4,13	11,94	0,00	42,24	9,17	0,00	7,78	1,62	23,11	21,35	24,73	6,54
271	3,09	0,49	3,51	11,68	0,60	39,80	7,98	0,00	8,05	1,11	27,27	22,05	28,38	3,91
272	3,08	0,51	3,99	10,92	0,00	38,93	8,96	0,00	7,00	0,00	30,20	21,36	30,20	0,00
273	3,08	0,51	3,99	10,92	0,00	38,93	8,96	0,00	7,00	0,00	30,20	21,35	30,20	0,00

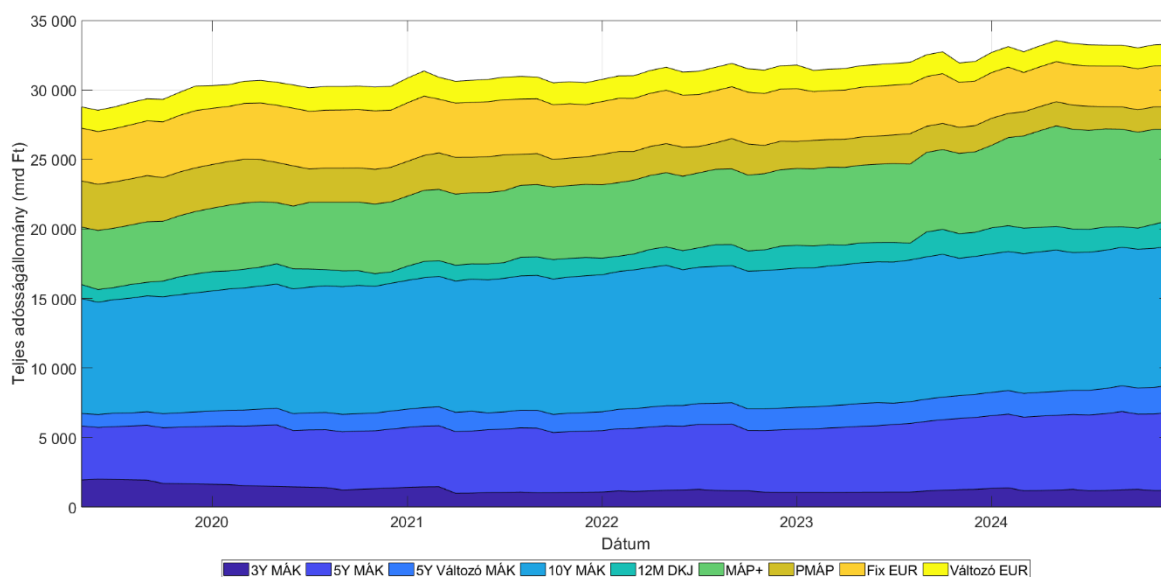
10. táblázat: Az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint kapott optimális finanszírozási szerkezetek összetétele százalékpontban megadva. A fix arányok az adott devizanemen belül értendők.

Függelék E: Egy kiválasztott optimális finanszírozási szerkezet mutatói

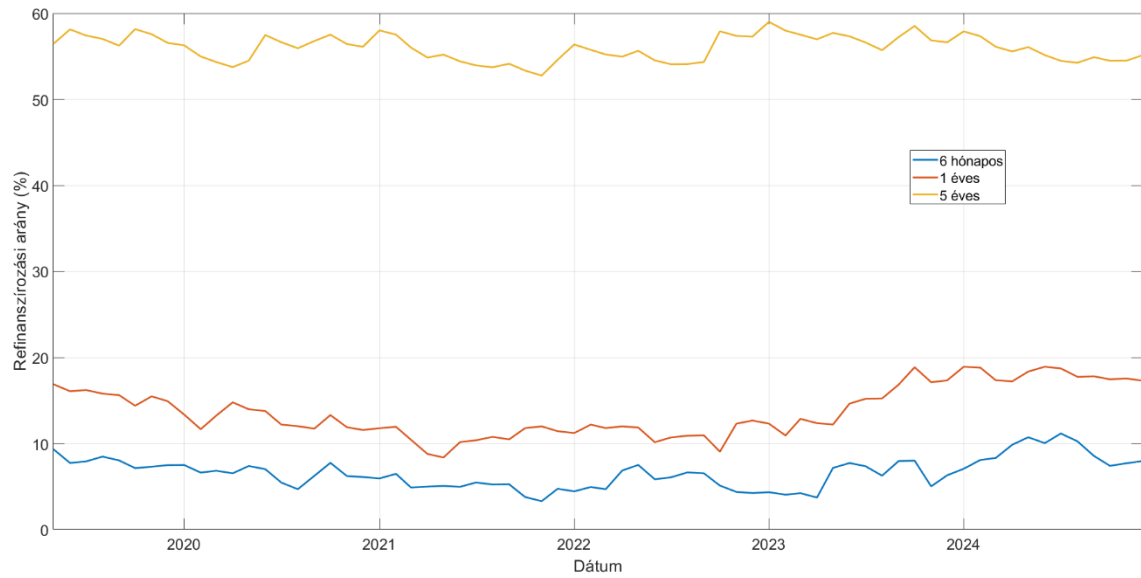
Az alábbiakban Függelék D: Optimális finanszírozási szerkezetek című fejezetben szereplő 51. optimális finanszírozási szerkezet eredményeit mutatjuk be az $1/3 - 1/3 - 1/3$ (szórás, ATR, 1 éves refinanszírozási arány) arányú kompozit kockázati mérték szerint.

Év végi arány	3Y MÁK	5Y MÁK	10Y MÁK	12M DKJ	5Y MÁK Változó	MÁP+	PMÁP	Euro fix	Euro változó	Forint Fix összesen	Deviza összesen	Deviza Fix összesen
2019	5,48	13,61	28,29	4,48	3,51	14,82	10,37	13,59	5,85	77,20	19,44	69,91
2020	4,53	14,01	30,37	2,71	4,29	16,62	8,24	13,56	5,68	81,13	19,25	70,48
2021	3,50	14,39	32,22	4,31	4,39	17,22	6,49	12,32	5,16	81,60	17,48	70,49
2022	3,35	14,15	31,43	5,25	4,92	17,34	6,44	11,80	5,31	79,95	17,12	68,95
2023	3,98	16,15	30,95	5,40	5,17	18,07	5,86	10,02	4,39	80,80	14,41	69,54
2024	3,60	16,85	30,10	5,48	5,85	19,73	4,88	8,94	4,57	81,26	13,51	66,15

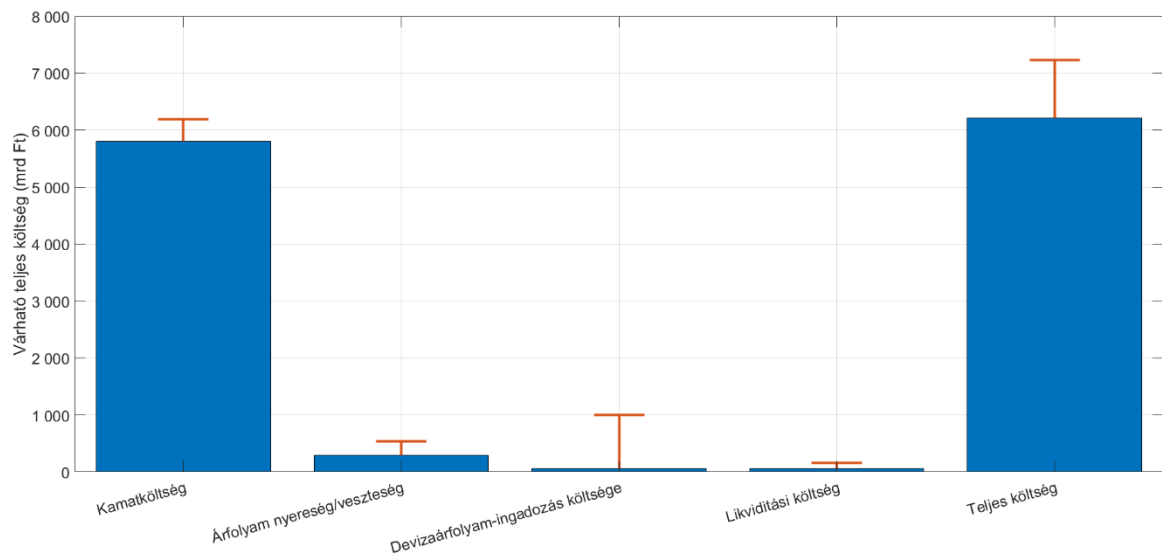
11. táblázat: Az 51. optimális finanszírozási szerkezet végrehajtása során kapott év végi adósságportfólió-összetételek



35. ábra: A választott finanszírozási szerkezet esetén kapott adósságállomány időbeli alakulása



36. ábra: A választott finanszírozási szerkezet esetén az egyes időtávokon vett refinanszírozási arányok alakulása



37. ábra: A választott finanszírozási szerkezet esetén a teljes időtávon várható költség dekompozíciója, valamint az egyes költségelemek CaR_{95} értékei

Függelék F: Modell diagnosztika

A modellezés késői szakaszában, azonban még a modell alkalmazását megelőzően kiemelten fontos annak vizsgálata, hogy a választott modell mennyiben alkalmas a kijelölt célok elérésére, vajon más modellek alkalmazása nem vezetne-e robusztusabb, jobb eredményekhez. A modell használatából eredő modellkockázat részletes és alapos vizsgálata emiatt elengedhetetlenül fontos része a modellalkotás folyamatának. A helyes modellalkotás mérsékelheti a modellválasztásból (pl. alkalmazhatóság, hibás specifikáció), a kivitelezésből (programozási, vagy technikai hibák, pontatlan numerikus közelítések), vagy a használatból (adathibák, kalibráció) eredő kockázatot. A modellkockázat, valamint a modellszelekció fontosságára hívja fel a figyelmet Fegyveres és Bebes (2014). A modellszelekció vizsgálatára a különféle információs kritériumok, míg a modellek érvényességére az általánosított keresztvalidáción alapuló módszerek alkalmazhatók.

Az optimális adósságportfólió modellben alkalmazott Markov rezsimváltó modell érvényességét és megalapozottságát vizsgálja többek között Bebesi és Bebes (2016), Bebesi (2016) valamint Bebesi és Bebes (2017).

A Nelson-Siegel függvényformula választását a nemzetközi adósságkezelési gyakorlat, valamint formula paramétereinek a korábbiak során már leírt könnyű értelmezhetősége igazolja. A függvényformulát a magyar adatokon alaposan megvizsgálta Fegyveres (2014b, 2015a), valamint Reguly (2015), összehasonlítva a spline alapú hozamgörbe modellekkel. Az empirikus hozamgörbe modellek elemzését, valamint a háromfaktoros Nelson-Siegel modell alkalmazását javasolja Tran (2016) és Bebesi (2016) is.

A magyar euró hozamgörbe modellezését vizsgálja Bebesi és Bebes (2016), amiben a szerzők arra a megállapításra jutnak, hogy a kockázatmentes euró hozamgörbe, valamint a magyar CDS felár együttesen jól közelítik a magyar euró hozamgörbét. A Nelson-Siegel függvényformula elforgatását pedig praktikus okok indokolják, mégpedig a rendezettebb, átláthatóbb paraméterstruktúra kialakítása. A Fama-Bliss kötvényszelekciós algoritmus alkalmazása a környezetétől eltérő papírok szelektálásával törekszik az elvárt simasági feltételeknek való megfelelésnek, azonban itt érdemes megjegyezni, hogy hasznos lehet a későbbiek során tovább vizsgálni az eljárásnak az alkalmazott paraméterek választására való érzékenységet, különös tekintettel arra, hogy válság és konjunktúra időszakokban eltérő paraméterezés lehet indokolt.

Az alábbiakban felsorolunk további szempontokat, amelyek mentén érdemes a modell működését és annak helyességét további vizsgálatoknak alávetni, illetve esetleges bővítéseket megfontolni a robusztusabb eredmények érdekében.

A választott modell más modellekkel való összehasonlítását végzi el Bebesi és Bebes (2017). A szerzők arra a megállapításra jutnak, hogy a választott modell több szempontból is jobb eredményekre jut, mint más modellezési variációk esetén. A választott modell az elvárt stilizált tényeket jól adja vissza. Összességében a szerzők

arra jutnak – hasonlóan a Bebesi (2016) munkájában vizsgáltakhoz – hogy a választott modell alkalmas és használható alternatíváját nyújtja egy kis gazdaság, valamint egy jelentős gazdasági térség közötti kapcsolatok leírásához. A rezsinváltó modell további összehasonlítása más – a gazdaságot leíró – modellekkel azonban további tapasztalatokat nyújthat, így érdemes lehet további vizsgálatokkal igazolni az eddigi eredményeket.

A rezsinváltó modellben használt λ paraméterek – vagyis az exponenciális késleltetés paraméterei a Nelson-Siegel függvényformulában – választásának vizsgálatát végezte el Bebesi és Bebes (2017). Az eredmények tekintetében az időben változó λ paraméter alkalmazására került sor a rezsinváltó modellben. A későbbiek során érdemes azt is megvizsgálni, hogy az optimális adósságportfólió modell eredményeit mennyiben befolyásolja a λ -k időben függetlennek való választása, illetve az előrejelzésben alkalmazott konstans λ választásának lecserélése a λ -k véletlenszerű választására az illesztés során fellépő λ -kból.

Az optimális adósságportfólió modellben alkalmazott likviditási korlátok és küszöbök értékeinek hatására hasznos lehet a modellillesztési szakaszt kibővíteni egy visszacsatolási mechanizmussal, amelyben a modellillesztés folyamatában eltekintünk a kapott küszöböket megsértő kibocsátások értékeitől valamilyen formában, így néhány illesztési kört követően a likviditási küszöbök teljes összhangba kerülnének a rezsinváltó modell eredményeivel.

Megfontolandó, hogy a Markov rezsinváltó modellben a Markov-láncot a jelenleg használt kettő állapot helyett három állapotúvá fejlesszük, miszerint a konjunktúra és a válság állapotok közé bekerülne egy harmadik, úgynevezett átmeneti állapot is. Ez az állapot csak a válságállapotból volna elérhető, és azt modellezné, hogy a gazdaság a válsághelyzetből nem közvetlenül kerülne a konjunktúra állapotába, hanem csak egy átmeneti időszakot követően, ahol még nagy valószínűséggel a válságállapotba is van visszatérés.

A modell fejlesztése, illetve alkalmazása során érdemes lehet azt is megvizsgálni, hogy milyen hatással lenne a modell működésére, ha az F_1 , F_2 átmenetmátrixok esetében a statisztikailag inszignifikáns elemeket (vagy azok egy részét) strukturálisan nullának vennénk. A Függelék B: Modellillesztés eredmények fejezetben a 6., valamint 7. táblázatokat tanulmányozva megállapítható, hogy elég sok ilyen előfordul. Érdemes továbbá azt is megfigyelni, hogy a 5.3 részben található 5. táblázatban a Q mátrix bizonytalan konvergenciát mutat, így némely nem szignifikáns együttható nullának vétele növelheti a rendszer stabilitását is.

Kiemelt figyelmet érdemel még a költségek számolásának módja, jelenleg ugyanis nem számít a költség bekövetkezésének időpontja, vagyis nincs jelenérték-számolás az egyes trajektóriák mentén. Az alkalmazott megközelítés alapja az a feltételezés, miszerint a kibocsátások maguk határozzák meg a kamatkörnyezetet. A kérdéskör alaposabb vizsgálata mindenképp javasolt a későbbiekben. Az induló értékektől való függés további vizsgálata is indokolt.

A modellkockázat és a modellszelekció vizsgálatát követően érdemes az optimális adósságportfólió modell egyes moduljainak eredményeit külön-külön valamint együttesen is megvizsgálni. Az alábbi részekben az egyes modulok vizsgálatának lehetséges módozatait, lehetőségeit járjuk körbe. Azonban miután jelen tanulmány célja a modell, valamint a benne alkalmazott módszerek bemutatása, ezért az alábbiakban csak a modell teszteléséhez alkalmazható lehetőségeket mutatjuk be (valamint a már korábban elvégzett diagnosztikai eredményekre hivatkozunk).

Modellillesztés

Az alkalmazott rezsimváltó állapotter modell kiértékelésére az egyik legfontosabb lehetőséget a hozampontra való illeszkedés vizsgálata jelenti. Az illeszkedés mértékét a teljes időtávon, valamint időpontonként külön-külön is lehet vizsgálni az egyes főbb hozamponatok esetén az átlagos négyzetes eltérés (RMSE), valamint az átlagos abszolút eltérés (MAE) mutatók segítségével. A háromfaktoros Nelson-Siegel modell illeszkedését mutatja be Fegyveres (2014b), Reguly (2015) valamint Tran (2016) a magyar idősorokon. Bebesi (2016) az általunk is használt kétországos modell egy korábbi változatán arra a következtetésre jut, hogy a forint hozamok becslési hibája magasabb az euró hozamok esetén tapasztaltaknál, ugyanakkor ismert tény, hogy a magyar hozamidősorok zajosabbak a nagyobb gazdaságok hozam idősorainál, így ezt a jelenséget az általa használt modell is visszatükrözi. Azonban a fenti tanulmányok, valamint Bebesi és Bebes (2017) külön-külön is arra következtetésre jutnak, hogy az alkalmazott modellek illeszkedése jónak mondható.

A VAR modellek használhatóságának vizsgálatára jó lehetőséget nyújtanak az impulzusválasz-függvények, amelyek azt jelzik, hogy az egyik változót ért egységnyi sokk hogyan befolyásolja a változót, valamint a többi változó fejlődését, amennyiben nincs más zaj. Ennek részletesebb elemzését adja Bebesi (2016). Az eredmények ismeretében hasznos eszköz lehet a variancia-dekompozíció, amely azt mutatja meg, hogy egy adott változóban bekövetkező sokkok mennyiben magyarázhatók a többi változóban bekövetkező sokkokkal. Az elvégzett vizsgálatok segítségével információt kaphatunk az innovációk relatív fontosságáról is.

Érdemes a becslési hibák hisztogramjának vizuális vizsgálata és a hibák normalitásának vizsgálata is, ugyanakkor ez utóbbi esetében a normalitás hiánya nem feltétlenül jelent problémát a rendelkezésre álló kis elemszámú minta miatt. Kiemelt figyelmet érdemel még a faktorokra ható sokkok (Q) elemzése is.

A modell érzékenységvizsgálata során azt elemezhetjük, hogy az eredmények mennyire érzékenyek a modell feltevéseire, míg stressztesztekkel az extrém makrogazdasági környezet melletti eredményeket tudjuk elemezni. Különböző diagnosztikai tesztekkel pedig megbizonyosodhatunk arról, hogy az elméleti modell a modellalkotó szándékának megfelelően viselkedik, az alkalmazott paraméterek megfelelőek-e.

A modellillesztés során a Markov-lánc módszerrel generált véletlen sorozatokból nyert statisztikák megbízhatóságával kapcsolatban alapkérdés, hogy a figyelembe vett generátum rész ténylegesen túljutott-e az úgynevezett felfűtési szakaszon. A problémát a generátum korreláltsága jelenti, valamint a feladatot nehezíti a koordináták közti függés figyelembe vételének követelménye. A szakirodalom egybehangzó véleménye szerint egyelőre nincs általánosan megbízható módszer, ugyanakkor hallgatólagos konszenzus mutatkozik a Geweke-féle tesztelés alkalmazása mellett.

A Geweke-teszt teszt-statisztikája a nem feltétlen azonos szórású, kétmintás t-próba teszt-statisztikájához hasonlítható. Az egyik minta a felhasználni kívánt láncrész egy utolsó része, míg a másik minta a felhasználni kívánt láncrész egy első része. A két mintarész varianciájának számolása speciális, ugyanis figyelembe kell venni, hogy a lánc elemeinek feltehetően erős, viszonylag lassan lecsengő autokorrelációs sorozata van. Ezért skálázó tényezőként nem a láncrészek tapasztalati varianciáját, hanem a folyamat adott szakaszon vett stacionaritását feltételezve a spektrálsűrűség-függvény 0-beli v_0 értékét használja.

A spektrálsűrűségen alapuló variancia becsléshez először az Akaike-kritérium alapján meg kell keresni a láncra maximum likelihood módszerrel illeszthető autoregresszív folyamat optimális rendjét. Amennyiben az így illeszthető folyamat rendje p , együtthatói $a_1, \dots, a_p$, továbbá az innováció becsült varianciája v_{pred} , akkor a skálázó variancia $v_0 = v_{pred} / (1 - \sum_{k=1}^p a_k)^2$, így a Geweke-statisztika értéke

$$d = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b}{\sqrt{\frac{v_0(x_a)}{n} + \frac{v_0(x_b)}{m}}}$$

ahol $\bar{x}_a$ és $\bar{x}_b$ a lánc első és utolsó részének az átlaga, $v_0(x_a)$ és $v_0(x_b)$ pedig a két láncrész spektrál-nulla varianciája. Eloszlása – tekintettel a tipikusan nagy n és m mintaelemszámra – normális eloszlással közelíthető.

A Geweke-teszt alapesetben a generált folyamatok egyenkénti vizsgálatára alkalmas. Többdimenziós folyamatok vizsgálatára a folyamatok közötti kovariancia folyamat figyelembe vétele ad lehetőséget. Ebben az esetben a Geweke-teszt konvergencia hipotézisét nemcsak a koordináta folyamatokra egyenként, hanem a páronkénti szorzat folyamataikra is vizsgáljuk.

Fontos további ellenőrzési szempont, hogy a jelenleg konstansként alkalmazott mintanagyság meghatározását részben az effektív mintanagyságra alapozzuk. Az effektív mintanagyság azt jelenti, hogy a ténylegesen figyelembe vett megfigyelési szám helyett a megfigyelés-sorozat pozitív autokorrelációjára való tekintettel mekkora mintanagysággal számolunk. Ennek meghatározására a szakirodalomban kétféle változat létezik. Legyen x a megfigyeléssor, amelynek hossza n és amelynek k . autokorrelációja ρ_k , szórásnégyzete $var(x)$ és spektrál-nulla varianciája v_0 . Az egyik változat a két variancia hányadosán alapul:

$$n_{EFF} = \frac{var(x)}{v_0},$$

míg a másik változat a folyamat autokovarianciáiból közvetlenül számolt

$$n_{EFF} = n / \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \right),$$

Itt az összegzés felső határa a végtelen helyett az az index lehet, ahol $\varrho_k \approx 0$.

Előrejelzés

Az előrejelzés erejét vizsgálhatjuk a realizált értékek és a mintán kívüli előre jelzett értékek segítségével. Az előrejelzések esetén a legfontosabb benchmark a véletlen bolyongás folyamat, amely esetében az a feltételezés, hogy az utolsó időszaki érték lesz az előrejelzés a teljes időhorizonton. Elvárható, hogy a modell kisebb hibát vétsen, mint a véletlen bolyongás folyamat.

Az alábbiakban egy lehetséges validációs stratégiát vázolunk fel az előrejelzés erejének tesztelésére.

Első lépésként folyamatosan bővülő „ablakolással” újra becsüljük a modellt. Létrehozunk m darab becslési időszakot a már meglevő adatokból (n). Az első becslésnél még csak $(n - m)$ időszak adatait használjuk fel, a következő időszakban már egy új időszak becslését is felhasználjuk, így az utolsó becslés megegyezik a teljes időszakra vonatkozó becsléssel, ennél azonban már további időszakok hiányában nem lehet kiértékelni az előrejelzés jóságát, így marad az m vizsgált becslés.

A faktor értékek prior permanens értékeit két szám összegeként állítjuk össze: (1) az utolsó időszaki faktor érték, (2) az utolsó 5 időszakban történt változás. E középértékeknek nagy szórást adunk. A kapott becslésekkel előrejelzünk a következő 36 időszakra és ezeket összehasonlítjuk:

- „keresztmetszetben”: az összes becslés átlagosan hogyan jelzi előre pl. egy adott hozampont értékét adott időhorizonton. Ekkor az RMSE és MAE mutatókat használjuk relatívan a véletlen bolyongás folyamat előrejelzéséhez képest.
- „idősorosan”: adott időszak végén rendelkezésre áll egy modell eredmény (aminek becslése során csak az addig rendelkezésre álló információkat használtuk fel), ezen eredmény alapján a következő 36 hónapra adott előrejelzést a már realizáltak segítségével kiértékeljük. Ebben az esetben a Clark és West (2007) féle tesztet alkalmazzuk.

E módszernek megvannak a maga korlátai. Egyrészt a minta továbbra is kis elemszámú, és a becsléshez felhasznált idősor hosszúsága még jobban megrövidül, másrészt az előrejelzések létrehozásához mechanikusan, különböző szabályok alapján hozzuk létre a prior értékeket. Ez utóbbi azt eredményezi, hogy csak az adatokban rejlő információkra hagyatkozunk. Azonban a modell ennél sokkal rugalmasabb,

ugyanis a prior értékek (különösen a prior permanens értékek) változtatásán keresztül lehetőség van döntéshozói várakozásokat is beépíteni a modellbe, aminek révén az előrejelzés minősége jelentősen javítható.

Tapasztalataink szerint a modellből kapott eredmények összességében jónak tekinthetők, figyelembe véve azt is, hogy a modell erősen integrált. A forint hozamok előrejelzése a tesztek szerint megbízható, az előrejelzési hiba a véletlen bolyongás hibájának alig 60-70 százaléka bizonyos időszakokban. Általánosságban elmondható, hogy a jóval volatilisabb és az új innovációknak, a monetáris politikának jobban kitett rövidebb hozamok előrejelzésénél nagyobb a hiba mértéke, míg a hosszabb lejáratok esetén a hiba jóval kisebb. A modell inkább hosszútávon jelez jól előre, így általánosságban 6 hónapos idő táv felett lehet arról beszélni a legtöbb változónál, hozampontnál, hogy a modell jobban teljesít, mint a véletlen bolyongás.

A MAE és RMSE értékek összehasonlítása alapján azonban csak az állapítható meg, hogy melyik modell teljesít jobban az adott mintán, azonban arra nem alkalmas, hogy eldöntsük, van-e ezek között szignifikáns különbség. Erre egy lehetséges megoldást nyújt a Clark és West (2007) féle teszt, amely a két modell egymásba ágyazottságát vizsgálja.

Legyen az előrejelezni kívánt idősor most y_t és legyen ezen időornak a null modellhez tartozó t időpontban (t -ben elérhető információk alapján) megalkotott $t + h$ időszakra vonatkozó becslése: $y_{0,t+h} = y_t$ (ez lesz a véletlen bolyongás által adott előrejelzés, az utolsó ismert értéket jelezzük előre minden időszakban). Az alternatív modell t időszaki információk alapján megalkotott előrejelzése pedig legyen: $\hat{y}_{1,t+h}$. Ekkor megalkotható a következő formula:

$$f_h = (y_{t+h} - y_{0,t+h})^2 + (\hat{y}_{1,t+h} - y_{0,t+h})^2 - (y_{t+h} - \hat{y}_{1,t+h})^2.$$

A formulához tartozó intuíció egyszerű, a kifejezés első tagja mutatja a null modellhez tartozó hibák négyzetét, míg az utolsó tag mutatja az alternatív modell hibáinak négyzetét. A középső tag a két becslés közötti eltérést jeleníti meg. Ha a két előrejelzés megegyezik, akkor f_h értéke értelemszerűen nulla. Ha viszont az alternatív modell előrejelzése jobb (kisebb hibával jelez előre), akkor az utolsó négyzetes tag értéke relatíve kicsi, míg a növekvő eltérés miatt a második tag is növeli az összeget. Ekkor f_h értéke nagy. A Clark-West (2007) statisztika megalkotása innentől egyszerű; f_h átlagát kell venni az előrejelzési horizonton ($h \in \{1, 2, \dots, H\}$) és osztani az átlagot az f_h értékek standard hibájával, így lényegében egy t-teszt kapható az előrejelzések hibáira vonatkozóan. Ez nyilván (mivel a teszt nagy értékénél vetjük el a null modellt) egy jobb oldali próba lesz 10 százalékos szignifikancia szint esetén 1,28, vagy 5 százalékos szignifikancia szint esetén 1,64 körüli kritikus értékekkel.

Az előrejelzés erejének vizsgálatára kidolgozhatók még további in és out-of-sample tesztek, valamint kiemelten fontos figyelni arra, hogy a megalkotott modell jól adja vissza a stilizált tényeket, erre akár különféle vizualizációs ábrák segítségével lehet vizsgálatokat építeni.

Optimalizálási folyamat

Az optimalizálási folyamat stabilitását, az algoritmus hatékonyságát többféle módon lehet vizsgálni. Az első lehetséges módszer az optimalizálás többszöri lefuttatása változatlan paraméterek mellett, és annak vizsgálata, hogy mekkora hatása van a genetikus algoritmusokban nélkülözhetetlen véletlen folyamatoknak az optimalizálás kimenetelére. E célból ötvenszer lefuttattuk az optimalizálást az összehasonlítási alapként használt (1 000 realizáció, 5 000 finanszírozási szerkezet, 1 000 iteráció) paraméterekkel. (Meggjegyezzük, hogy az itt használt előrejelzés különbözik az Eredmények című fejezetben használttól, ennek időhorizontja 2019. április – 2024. december volt.)

A 12. táblázat tartalmazza az 50 futtatásról készült leíró statisztikákat. Látható, hogy a mértékeknek csak elhanyagolható szórása van, tehát az optimalizálási algoritmus kellően konzisztens. A mértékek közül magától értetődő az egyes futtatások 5 000 – 5 000 finanszírozási szerkezetéből számolt átlagos és legjobb (minimális vagy maximális) célfüggvény-értéke. Észrevehető, hogy a legjobb célfüggvény-értékek szórása elenyésző, tehát az optimalizálási algoritmus konzisztensen megtalálja a sarokponti megoldásokat.

Mérték	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
Lebesgue-mérték	8 460,39	5,96	8 445,59	8 470,04
Pareto-optimális arány (%)	99,9948	0,0139	99,9400	100,0000
Átlagos éves költség (%)	3,0415	0,0009	3,0397	3,0433
Átlagos éves szórás (%)	0,3475	0,0007	0,3457	0,3489
Átlagos ATR (év)	2,9041	0,0048	2,8920	2,9157
Átlagos 1 éves refinanszírozási arány (%)	19,3041	0,0412	19,2075	19,3737
Minimális éves költség (%)	2,7717	0,0000	2,7717	2,7718
Minimális éves szórás (%)	0,1798	0,0000	0,1798	0,1801
Maximális ATR (év)	4,3003	0,0001	4,3001	4,3004
Minimális 1 éves refinanszírozási arány (%)	9,8007	0,0502	9,7103	9,9231

12. táblázat: Stabilitás teszt - 50 futtatás

A *Pareto-optimális arány* azt jelenti, hogy az egyes futtatásokban az 5 000 – 5 000 finanszírozási szerkezet hány százaléka Pareto-optimális. Jól működő optimalizálási algoritmus esetén ennek meg kell közelítenie a 100%-ot, ami jelen esetben teljesül. A *Lebesgue-mérték* (másnéven *hipertérfoogat*, *hypervolume*) a 2-dimenziós terület és 3-dimenziós térfogat n -dimenziós megfelelője, a szakirodalomban leginkább elfogadott és leggyakrabban használt mérőszám többcélűfüggvényes optimalizálási algoritmusok esetén (Riquelme, Von Lücken és Baran 2015). A Lebesgue-mértéket mi arra használjuk, hogy kiszámoljuk az optimalizálás eredményeként kapott ponthalmaz által lefedett optimalizálási tér méretét egy referenciaponthoz viszonyítva. A számolást Fonseca, Paquete és López-Ibáñez (2006) algoritmusának segítségével végezzük. A nagyobb Lebesgue-mérték optimálisabb, változatosabb eredményeket jelent.

Mérték	Nadírpon
Éves költség (%)	9,4825
Éves szórás (%)	8,4277
ATR (év)	0,8828
1 éves refinanszírozási arány (%)	56,847

13. táblázat: Nadírpon

Referenciapontnak az úgynevezett *nadírpon*t használjuk, amelyet az egyes célfüggvények külön-külön vett legrosszabb értékeiből alkotott vektor határoz meg. Ezeket egyváltozós optimalizálással számoltuk ki. A nadírpon

A következő teszt az iterációk számának megváltoztatása és ennek hatásvizsgálata.

A 14. táblázat tartalmazza az iterációk számának hatását az optimalizálás eredményére. Megállapítható, hogy 5 000 finanszírozási szerkezet esetén nincs érdemi haszna 100-nál több iteráció használatának. Már 100 iteráció esetén is az összes finanszírozási szerkezet Pareto-optimális. A Lebesgue-mérték sem emelkedik az iterációk számának növelése esetén. Az átlagos és optimális célfüggvényértékek is lényegében változatlanok. Érdekes megvizsgálni a finanszírozási szerkezetek számának hatását is.

Iterációk száma	100	200	500	2 000	5 000	10 000
Lebesgue-mérték	8 449,92	8 457,38	8 457,06	8 429,33	8 457,81	8 458,85
Pareto-optimális arány	1,0000	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000	0,9998
Átlagos éves költség (%)	3,0440	3,0414	3,0416	3,0381	3,0414	3,0404
Átlagos éves szórás (%)	0,3428	0,3470	0,3465	0,3470	0,3485	0,3480
Átlagos ATR (év)	2,8856	2,8964	2,8987	2,8924	2,9076	2,9033
Átlagos 1 éves refinanszírozási arány (%)	19,1828	19,2860	19,2745	19,4372	19,3194	19,3667
Minimális éves költség (%)	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717
Minimális éves szórás (%)	0,1798	0,1798	0,1798	0,1799	0,1798	0,1799
Maximális ATR (év)	4,3004	4,3004	4,3001	4,2916	4,3004	4,3004
Minimális 1 éves refinanszírozási arány (%)	9,8539	9,7730	9,7639	9,8807	9,8095	9,8417

14. táblázat: Iterációk számának összehasonlítása

A 15. táblázat tartalmazza a finanszírozási szerkezetek számának hatását. A Lebesgue-mérték alapján észrevehető, hogy több finanszírozási szerkezet esetén az optimalizálási tér nagyobb része van lefedve. Ellenben feltűnő, hogy az egyes célfüggvények szerinti optimális értékek kevéssé függenek akár a finanszírozási szerkezetek, akár az iterációk számától. Ez azt jelenti, hogy az első lépésekben sarokponti megoldásokat kereső optimalizálási algoritmus az elvártaknak megfelelően teljesít, azokat kellő pontossággal találja meg.

Finanszírozási szerkezetek száma	500	1 000	2 000	10 000	20 000	50 000
Lebesgue-mérték	8 371,02	8 387,78	8 439,21	8 481,55	8 494,49	8 507,55
Pareto-optimális arány	1,0000	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000	0,9999
Átlagos éves költség (%)	3,0450	3,0439	3,0418	3,0409	3,0399	3,0388
Átlagos éves szórás (%)	0,3508	0,3499	0,3508	0,3456	0,3445	0,3434
Átlagos ATR (év)	2,8514	2,8533	2,8910	2,9134	2,9209	2,9278
Átlagos 1 éves refinanszírozási arány (%)	19,7987	19,4233	19,3637	19,2675	19,2285	19,1835
Minimális éves költség (%)	2,7718	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717
Minimális éves szórás (%)	0,1798	0,1798	0,1801	0,1798	0,1799	0,1798
Maximális ATR (év)	4,3004	4,3004	4,3004	4,3004	4,3004	4,3004
Minimális 1 éves refinanszírozási arány (%)	9,9834	9,9934	9,8871	9,6940	9,6953	9,7154

15. táblázat: Finanszírozási szerkezetek számának összehasonlítása

Érdekes viszont megfigyelni, hogy az átlagos célfüggvény-értékek – habár kis mértékben – de tendenciózusan javulnak. Ennek oka abban keresendő, hogy több vizsgált finanszírozási szerkezet esetén nagyobb arányban vannak kiegyensúlyozott finanszírozási szerkezetek, mint sarokponti megoldások, és a sarokponti megoldások

felé haladva egyre rosszabb a trade-off a célfüggvények között. Érdemes tehát meggondolni több finanszírozási szerkezet használatát az iterációk rovására.

Iterációk száma	50	100	200	400	700	1 000
Lebesgue-mérték	8 460,76	8 506,83	8 508,55	8 511,14	8 509,47	8 507,55
Pareto-optimalis arány	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9996
Átlagos éves költség (%)	3,0094	3,0419	3,0401	3,0394	3,0392	3,0388
Átlagos éves szórás (%)	0,3104	0,3396	0,3421	0,3433	0,3434	0,3434
Átlagos ATR (év)	2,3649	2,9281	2,9295	2,9318	2,9321	2,9278
Átlagos 1 éves refinanszírozási arány (%)	21,9585	18,9615	19,1322	19,1460	19,1627	19,1835
Minimális éves költség (%)	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717	2,7717
Minimális éves szórás (%)	0,1798	0,1798	0,1798	0,1798	0,1798	0,1798
Maximális ATR (év)	4,3004	4,3004	4,3004	4,3004	4,3004	4,3004
Minimális 1 éves refinanszírozási arány (%)	9,9421	9,7133	9,7169	9,7015	9,7101	9,7154

16. táblázat: Iterációk számának hatása 50 000 finanszírozási szerkezet esetén

A 16. táblázat tartalmazza az iterációk számának hatását 50 000 finanszírozási szerkezet használata esetén. Látható, hogy a leginkább számottevő különbség az 50 és a 100 iteráció között van. 100-nál több iteráció esetén nincs jelentős növekedés a Lebesgue-mértékben, valamint ennyi iteráció elég az egyes célfüggvények optimumának megtalálásához. Megállapítható tehát, hogy ezen mértékek alapján 50 000 finanszírozási szerkezet esetén is elég mindössze 100 iterációt használni az optimalizálás során. Végül azt is megvizsgáltuk, hogy az előrejelzés realizációinak ismételt generálása (ugyanazon paraméterek átmenetegyenesletbe történő behelyettesítése) milyen hatással van az optimalizálási térre, kellően stabil-e 1 000 realizációt használni.

Mérték	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
Pareto-optimalis arány	1,0000	0,0001	0,9998	1,0000
Átlagos éves költség (%)	3,0246	0,0091	3,0038	3,0384
Átlagos éves szórás (%)	0,3356	0,0080	0,3217	0,3541
Átlagos ATR (év)	2,8988	0,0202	2,8426	2,9360
Átlagos 1 éves refinanszírozási arány (%)	19,4394	0,1482	19,2623	19,7994
Minimális éves költség (%)	2,7558	0,0091	2,7353	2,7703
Minimális éves szórás (%)	0,1724	0,0029	0,1651	0,1775
Maximális ATR (év)	4,2891	0,0119	4,2697	4,3080
Minimális 1 éves refinanszírozási arány (%)	9,7553	0,0596	9,5853	9,8367

17. táblázat: Előrejelzés újragenerálása

Az optimalizálás hússzor lett lefuttatva ilyen módon, az eredményeket a 17. táblázat tartalmazza. A Lebesgue-mértéket nem használtuk, ugyanis különböző optimalizálási terek összehasonlítására nem megfelelő. Az eredmények tanulsága szerint így is viszonylag alacsony az egyes optimalizálások közötti szórás, ráadásul ennek egy részére az optimalizálási algoritmus véletlenszerűsége is hatással van. Megállapítható, hogy nem érdemes 1 000-nél több realizációt használni, a trajektóriák generálásából adódó véletlenszerűség nincs jelentős befolyással az optimalizálás végeredményére.

Megvizsgáltuk még, hogy páronként összehasonlítva a különböző finanszírozási szerkezet/realizáció párosok milyen eredményt adnak. Az eredményeket a 18. táblázat tartalmazza. A 18. táblázat eredményeit a következő módszerrel kaptuk meg: két-két futtatás eredményeit összegyűjtöttük, majd megvizsgáltuk, hogy az összesített eredmények közül melyek Pareto-optimalisak. Az egyes sorok értékei mutatják, hogy az adott futtatást összepárosítva az egyes oszlopokban jelölt futtatásokkal, a sorban

jelölt futtatás eredményeinek hány százaléka Pareto-optimalis. Az átló elemei az adott futtatások fentebb látott Pareto-optimalis arányai. Ezekből az eredményekből is az derül ki, hogy adott „keret” mellett a finanszírozási szerkezetek számát érdemes növelni. Például az 50 000/1 000-es futtatás (utolsó sor) értékei jóval magasabbak az 5 000/10 000-es futtatásnál. Az iterációk növelésével a javulás általában 200 körül áll meg.

Fin. Szerk./ Iteráció	5 000/ 1 000	5 000/ 100	5 000/ 200	5 000/ 500	5 000/ 2 000	5 000/ 5 000	5 000/ 10 000	500/ 1 000	1 000/ 1 000	2 000/ 1 000	10 000/ 1 000	20 000/ 1 000	50 000/ 1 000
5 000/1 000	99,98	94,62	93,12	92,92	92,44	93,16	92,58	99,54	99,32	97,26	83,02	69,16	46,30
5 000/100	88,70	100,00	89,78	88,72	88,62	89,40	89,52	99,40	98,60	96,20	77,66	60,54	37,94
5 000/200	92,48	93,58	99,98	92,44	91,50	92,82	92,20	99,40	99,32	97,50	82,24	67,82	44,78
5 000/500	92,98	94,38	94,14	99,96	93,16	93,30	93,68	99,68	99,30	97,84	83,42	69,86	48,60
5 000/2 000	93,30	94,52	93,52	93,16	99,94	93,56	93,18	99,60	99,28	97,66	84,56	69,64	48,32
5 000/5 000	92,52	93,64	93,20	92,64	92,58	99,98	93,08	99,66	99,40	97,68	82,68	68,76	46,92
5 000/10 000	93,34	93,92	93,46	92,62	93,08	93,68	100,00	99,58	99,38	97,46	84,34	69,28	47,24
500/1 000	65,80	67,00	65,60	62,00	64,00	64,80	63,20	100,00	89,60	83,00	51,80	37,60	25,80
1 000/1 000	70,60	73,00	68,60	67,00	68,80	67,80	69,40	96,70	100,00	85,60	53,10	40,90	26,20
2 000/1 000	82,15	86,20	83,15	82,00	83,10	82,80	82,40	98,65	97,55	99,95	69,60	55,00	35,00
10 000/1 000	97,16	97,51	97,07	97,27	97,09	97,33	97,17	99,82	99,68	99,09	99,96	81,64	59,91
20 000/1 000	98,87	99,05	98,99	98,88	98,86	99,02	98,93	99,92	99,86	99,71	96,93	99,98	75,47
50 000/1 000	99,71	99,75	99,70	99,75	99,70	99,72	99,69	99,95	99,94	99,89	99,13	97,77	99,93

18. táblázat: Páronkénti összehasonlítások

Az ebben a fejezetben ismertetett eredmények alapján megállapítható, hogy az optimalizálási algoritmus kellően stabil, nem érzékeny az optimalizálás és a realizációk generálása során fellépő véletlenszerűségekre. Megfontolandó viszont a számítási kapacitás másféle módon történő elosztása. A viszonyítási alapként használt 5 000/1 000-es arány (finanszírozási szerkezetek / iterációk száma) helyett például a hasonló számítási kapacitást igénylő 25 000/200 arány javasolható. A finanszírozási szerkezetek számának növelésével betölthető az optimalizálási tér, arányaiban kevesebb sarokponti megoldást kapunk. Az itt ismertetett eredmények hatására 2019. májustól a gyakorlatban is a 25 000 finanszírozási szerkezet – 200 iteráció arány került alkalmazásra.

A kibocsátási algoritmus és az optimalizálási módszertan jelen formájában is megfelel az elvárásainknak, azonban távlati célként érdemes kijelölni fejlesztési lehetőségeket, amelyek segítségével néhány egyszerűsítő feltevés elhagyható.

Az első lehetőség egy adaptív, dinamikus kibocsátási algoritmus kialakítása, illetve a finanszírozási szerkezet mellett a kibocsátások optimalizálása. Jelenleg a kibocsátási algoritmus a gazdaság (realizáció által meghatározott) állapotától nagyrészt függetlenül működik. Érdemes lehet megfontolni a szélsőségesjellemzőkkel rendelkező realizációk detektálását és ilyen esetekben a tervmátrixban a tervinstrumentumok arányainak megváltoztatását. Ezzel például lehetőség lenne a modellben válság esetén csak alacsony kockázatú instrumentumokat kibocsátani, vagy túl magas hozamkörnyezet esetén csak rövid lejáratú papírokból finanszírozni. A kibocsátások optimalizálása egy kétlépcsős optimalizáló algoritmust jelentene. Az első lépésben az eddigiekhez hasonlóan kialakításra kerülnének az optimális finanszírozási szerkezetek, a második lépésben pedig a konkrét, havi szinten kibocsátandó mennyiségek kerülnének optimalizálásra úgy, hogy a legalacsonyabb költségek és kockázatok

mellett, lehetőleg minimális likviditási költséggel, minél hatékonyabb módon elérhetőek legyenek az optimális finanszírozási szerkezetek által meghatározott portfóliók.

Egy másik elméleti lehetőség a kibocsátási algoritmus átalakítása szállításméleti megközelítésből (C. Villani 2008; Santambrogio 2015; Galichon 2016) kiindulva. Ezen matematikai ág témái között megtalálható az optimális transzport, amelynek relevanciája a kiindulási portfólióból való lehatékonyabb eljutás a kívánt finanszírozási szerkezet által meghatározott portfólióig, valamint az optimális erőforrás-allokáció, amelyet egy-egy periódus kibocsátásainak optimalizálására lehetne hasznosítani.

Végezetül az optimalizáló algoritmuson is lehet fejleszteni. A jelenleg használt genetikus algoritmus ugyan saját műfajában a legjobbak közé tartozik, azonban egy általános, nem applikációs-specifikus módszer. Érdemes tehát megvizsgálni egy kifejezetten többcélű-függvényes költség-kockázat optimalizálásra tervezett algoritmus kifejlesztésének lehetőségét. Továbbá érdemes lehet kutatásokat folytatni a gépi tanulásra (machine learning, deep learning) épített algoritmusok felhasználhatóságáról. Ezek az algoritmusok (Jin 2006; Liu és mtsai. 2018) is képesek többcélű-függvényes feladatok megoldására, és számos más területen alkalmazzák sikeresen komplex optimalizálási problémák megoldására.

Függelék G: Szószedet

Értékpapír alapfogalmak

Kötvény: Hosszabb lejáratú, hitelviszonyt megtestesítő, átruházható értékpapír. A kötvény kibocsátója hiteladósa a kötvény tulajdonosának.

Elemi kötvény: Olyan kötvény, amelynek nincs kamatszelvénye, és csak egyetlen jövőbeli időpontban teljesít kifizetést. Kibocsátásuk diszkont árfolyamon történik. Erre példa Magyarországon a Diszkont Kincstárjegy (DKJ).

Névérték: Az az összeg, amelyet a kibocsátó legkésőbb lejáratkor köteles visszafizetni az értékpapír tulajdonosának.

Par árfolyam: Par árfolyamról akkor beszélünk, amikor a kötvény kibocsátási értéke megegyezik a névértékével. Amennyiben a kibocsátási árfolyam ennél magasabb, akkor a kötvény prémiummal lett kibocsátva, míg, ha ennél alacsonyabb, akkor a kötvény diszkonttal lett kibocsátva.

Kamatozó kötvény: Olyan kötvény, amely rendszeres időközönként fizet kamatot, kibocsátása általában névértéken történik. A kamatozó kötvények pénzáramlását tekinthetjük úgy is, mint elemi kötvények együttesét. Kamatozó kötvényre példa a Magyar Államkötvény (MÁK).

Névleges kamatláb: Az éves kamat összegének a névérték százalékában kifejezett nagysága.

Felhalmozott kamat: A legutolsó kamatfizetési időpont óta eltelt időszak időarányos kamata.

Kockázatmentes kötvény: Az állam által, hazai devizában kibocsátott kötvényeket értjük alatta. A kockázatmentességet itt a nemteljesítés kockázatára kell érteni, hiszen például a hozamok változásából fakadó árfolyamkockázat ezeknél is fennáll.

Bruttó árfolyam: A kötvény névértékre vetített piaci ára a felhalmozott kamattal együtt.

Nettó árfolyam: A kötvény névértékre vetített piaci ára a felhalmozott kamat nélkül.

Fix kamatozású kötvény: Olyan kötvény, amelynek az összes kamatfizetéséhez azonos kupon tartozik, melynek meghatározása a kibocsátáskor történik. Az első kamatperiódus törtidőszak is lehet, ekkor a ténylegesen kifizetett kamat a kötvény kuponjának időarányos része.

BUBOR: Budapesti bankközi forint hitelkamatláb.

Változó kamatozású kötvény: Olyan kötvény, amelynél előre meghatározott kamatfixálási időpontokban kerül meghatározásra a következő időszaki kupon értéke bizonyos referenciaérték alapján. A változó kamatot a magyar államkötvények esetén legtöbbször a DKJ-k aukciós átlaghozamaiból, a fogyasztói árindex változásából, vagy a BUBOR-ból származtatják.

Lejárat hozam (yield to maturity, YTM): Egy instrumentum belső megtérülési rátája, ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy lejáratig tartjuk.

Matematikai alapfogalmak

Elemi esemény: Egy véletlen kísérlet lehetséges, tovább már nem bontható eredményeit nevezzük elemi eseménynek, jelölése $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Eseménytér: Az adott kísérlethez tartozó összes elemi esemény halmaza, jelölése Ω .

Esemény: Az elemi eseményekből álló halmazokat – Ω részhalmazait – nevezzük eseménynek. Az egyes eseményeket $A, B, C, \dots$ betűkkel jelöljük, az összes esemény halmazát pedig $\mathcal{F}$ -fel.

Valószínűség: P valószínűség az Ω eseménytéren, ha teljesülnek a Kolmogorov-axiómák, vagyis $P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, valamint $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Feltételes valószínűség: Amennyiben $P(B) > 0$, az A eseménynek B esemény bekövetkezése utáni valószínűsége, azaz feltételes valószínűsége $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Valószínűségi változó: Egy olyan X függvény, amely elemi eseményekhez rendel valós számokat, tehát $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Egy valószínűségi változó diszkrét, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen elemű az értékkészlete; folytonos, ha értékkészlete kontinuum számosságú.

Eloszlásfüggvény: Ha X valószínűségi változó, akkor az $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvényt, ahol $F_X(x) = P(X < x)$, X eloszlásfüggvényének nevezzük.

Súlyfüggvény: Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor az $f_X(x) = P(X = x)$ függvényt súlyfüggvénynek nevezzük.

Sűrűségfüggvény: Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f , ha X eloszlásfüggvénye, F előállítható az $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ alakban.

Várható érték: Egy X valószínűségi változó várható értéke $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$, ha X diszkrét és értékkészletének elemszáma véges; $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$, ha X diszkrét és elemszáma megszámlálhatóan végtelen; $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$, ha X folytonos.

Szórás, variancia: Egy X valószínűségi változó szórásnégyzete, avagy varianciája $D^2(X) = E(X - E(X))^2$. Ennek négyzetgyöke pedig X szórása ($D(X) = \sqrt{D^2(X)}$).

Medián: A nagyság szerint sorbarendezett értékek közül a középső érték, tehát $median(X) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid P(X < x) \geq \frac{1}{2} \right\}$.

Kovariancia: Legyenek X és Y valószínűségi változók. Ekkor X és Y kovarianciája $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

Likelihood függvény: Ha X egy diszkrét valószínűségi változó egy θ -tól függő p súlyfüggvénnyel, akkor az $L(\theta|x) = p_\theta(x) = P_\theta(X = x)$ függvényt, folytonos esetben pedig az $L(\theta|x) = f_\theta(x)$ függvényt likelihood függvénynek nevezzük.

Egyenletes eloszlás: Egy X folytonos valószínűségi változó az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású, ha sűrűségfüggvénye felírható a következő alakban:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \cup x > b \end{cases}.$$

Normális eloszlás: Egy X folytonos valószínűségi változó normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Jelölése: $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Többdimenziós standard normális eloszlás: Az $X = (X_1, \dots, X_n)'$ $n \times 1$ valószínűségi vektorváltozó n -dimenziós standard normális eloszlású, ha az X_i -k független $N(0,1)$ eloszlásúak.

Többdimenziós normális eloszlás: Az X pontosan akkor (k dimenziós) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, ha előáll egy $A: k \times n$ -es mátrix, egy $m: k \times 1$ -es vektor, valamint egy Z n -dimenziós standard normális valószínűségi vektorváltozó segítségével, mint $X = AY + m$. Jelölése: $X \sim N(m, \Sigma)$, ahol $\Sigma = AA'$. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \cdot |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m)'\Sigma^{-1}(x-m)},$$

ahol $x = (x_1, \dots, x_k)'$, valamint Σ pozitív-definit, míg $|\Sigma|$ jelöli a Σ mátrix determinánsát.

Béta eloszlás: Egy X folytonos valószínűségi változó béta eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases},$$

ahol B a béta függvény.

Wishart eloszlás: Legyen $Z: n \times m$ mátrix, ahol Z sorai egymástól független többdimenziós normális eloszlást követnek, $Z_{(i)} = (z_i^1, \dots, z_i^m) \sim N_m(0, \Omega)$. Valamint legyen $X = \sum_{i=1}^n Z_i' Z_i$. Ekkor $X \sim W(\Omega, n)$ Wishart eloszlású.

Inverz Wishart eloszlás: Legyen $Z: n \times m$ mátrix, ahol Z sorai egymástól független többdimenziós normális eloszlást követnek, $Z_{(i)} = (z_i^1, \dots, z_i^m) \sim N_m(0, \Omega^{-1})$. Valamint legyen $X^{-1} \sim W_m(\Omega^{-1}, n)$ Wishart eloszlású, ahol $X^{-1} = \sum_{i=1}^n Z_i' Z_i$. Ekkor $X \sim IW(\Omega, n)$, inverz Wishart eloszlású, Ω kovariancia mátrixszal és n szabadságfokkal.

Statisztikai sokaság: Egy halmaz elemei, valamint a hozzájuk rendelhető számértékek, amelyen statisztikai vizsgálatot végzünk.

Mérés: Egy elem kiválasztása a statisztikai sokaságból.

Statisztikai sokaság eloszlása: Egy mérés eredményeképp a statisztikai sokaságból egy valószínűségi mezőt és egy X valószínűségi változót kapunk. Az X eloszlását a statisztikai sokaság eloszlásának nevezzük.

Mintavétel: A sokaság n elemének véletlenszerű kiválasztása.

N-elemű minta: Egymástól független és X valószínűségi változóval megegyező eloszlású $x_1, x_2, \dots, x_n$ valószínűségi változók (mintaelemek) összessége.

Tapasztalati (empirikus) eloszlás: Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ mintaelemekből készített hisztogram.

Empirikus várható érték: A mintaelemek átlaga, tehát $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Empirikus szórásnégyzet: $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Korrigált tapasztalati szórásnégyzet: $s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Empirikus várható érték valószínűségi vektorváltozókra: Legyen a minta n -elemű és a vektorváltozó k -elemű. Ekkor az empirikus várható érték $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)})$.

Korrigált tapasztalati kovariancia mátrix: $c_{ij}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^{(i)} - \bar{x}^{(i)}) \cdot (x_i^{(j)} - \bar{x}^{(j)})$.
A mátrix $k \times k$ méretű.

Statisztikai becslés: A statisztikai eloszlás vagy egy paraméter (várható érték, szórással) meghatározási eljárása.

Statisztikai függvény (statisztika): Egy statisztikai sokaság elemein értelmezett $\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény.

Torzítatlan becslés: $\hat{a}$ várható értéke megegyezik a -val.

A modellhez kapcsolódó alapfogalmak

Tényinstrumentum: A kiinduló adósságállományban szereplő instrumentumok.

Tervinstrumentum: A modell által a szimulációs időtávon kibocsátandó instrumentumok.

Likviditási korlát: Az a maximális összeg, amennyit egy hónapban/évben kibocsáthatunk egy adott tervinstrumentumból vagy tervinstrumentum-csoportból.

Likviditási küszöb: Az a maximális forintban vett érték, amennyit egy hónapban további költségnövekedés nélkül kibocsáthatunk egy adott tervinstrumentumból vagy tervinstrumentum-csoportból. Csak piaci (DKJ és MÁK) instrumentumokra alkalmazzuk.

Likviditási költség: A likviditási küszöb fölötti kibocsátás által eredményezett többlethozamból kifolyólag fizetendő költségnövekmény.

Realizáció: A hozamgörbe faktorok és a makro változók megvalósult (realizált) értékei egy adott időtávon. A realizációk összessége adja meg a vizsgált faktorok többdimenziós eloszlását. A realizációkat az előrejelzés során generáljuk, mégpedig a faktordinamika egyenletének felhasználásával véletlenszám-generálással.

Finanszírozási szerkezet: A tervinstrumentumok egy súlyozása, amely a tervinstrumentumok elméleti (hosszútávú) kibocsátási arányait határozza meg. Ezen arányok elérése akkor válik realitássá, amikor a tényinstrumentumok mindegyike lejár, és a kívánt arányok elérése nem ütközik likviditási korlátokba (a kiinduló állapotban meglévő tényinstrumentumok lejáratát ugyanakkor a modell 5 éves időhorizontján nem következik be teljeskörűen).

Kibocsátási algoritmus: Egy szimulációs eljárás, amely a finanszírozási szerkezet, a realizáció, a tényinstrumentumok, a deficit, illetve a likviditási korlátok ismeretében havi szinten meghatározza, hogy melyik tervinstrumentumból mekkora állomány kerüljön kibocsátásra. A kibocsátási algoritmus megpróbálja a finanszírozási szerkezet által meghatározott arányokat elérni, amennyiben ez lehetséges.

Menekülő instrumentum: Likviditási korlát nélküli (de likviditási költséggel viszont rendelkező) tervinstrumentum, a modellben konkrétan a DKJ. A kibocsátási algoritmus bármilyen összegű finanszírozási igényre ad valamilyen megoldást, melyhez azt feltételezzük, hogy a menekülő instrumentumból korlátlan kereslet áll rendelkezésre.

Iteráció: Az optimalizálás során használt ciklikus algoritmus lépései.

Pareto-optimális pont: Egy olyan pont (finanszírozási szerkezet) az optimalizálási térben, amelynél minden másik pont legalább egy tulajdonságában rosszabb.

Pareto-front: A Pareto-optimális pontok halmaza.