2016.12.01.

Empirikus hozamgörbe modellek

Tran Dávid
ÁLLAMADÓSSÁG KEZELŐ KÖZPONT ZRT.

Vezetői összefoglaló

A tanulmány célja a különböző empirikus hozamgörbe-illesztési modellek áttekintése és eredményeinek összefoglalása. A motiváció az, hogy egy olyan hozamgörbe-illesztési módszert találjunk, amely képes minél pontosabban előrejelezni a hozamgörbe jövőbeni alakulását. Ehhez az első lépés egy, a historikus tényadatokat pontosan becslő hozamgörbe-illesztést találni. A szakirodalomban leggyakrabban előrejelzésre használt Nelson-Siegel-Svensson, valamint az ennek alternatívájaként létrejött Legendre-féle modellek kerültek áttekintésre. Az egyes modelleknek számos használt parametrizációja létezik, ezek közül lettek kiválasztva az előrejelzésre legalkalmasabbak. Végül három konkrét javaslat született az alkalmazandó modellre. Ezek közül a Nelson-Siegel modell egyszerű, de kevésbé jól illeszkedik, az Adjusted Svensson modell jól illeszkedik, de több nemlineáris paramétert használ, a Legendre modell szintén jól illeszkedik, viszont a faktorait nem lehet egyértelműen értelmezni. Az ÁKK-ban használt Spline modellhez képest ezen modellek előnye a szakirodalom alapján a jobb előrejelző képesség, hátrányuk a rosszabb illeszkedés. Az anyagban ismertetett tapasztalatok alapján azonban a második és a harmadik javasolt modell a Spline-hoz hasonlóan jó illeszkedést produkál. Mindhárom modellnek bemutatásra kerülnek az előnyei, illetve hátrányai is.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az Államadósság Kezelő Központ Zrt. (ÁKK) által fejlesztett optimális portfóliómodell kidolgozásának egy fontos lépése egy hozamgörbe modell fejlesztése, és ennek eredményeivel előrejelzések készítése. Az ÁKK-ban használt Spline-alapú hozamgörbe-illesztés ugyan jó mintán belüli illeszkedéssel rendelkezik, ám előrejelzési képessége csekély, főleg turbulensebb időszakokban, mint ahogy ez a válság során bebizonyosodott. Ennek oka az, hogy a Spline modellek egy bizonyos görbére illesztenek valamilyen (az ÁKK által használt Spline modell esetében egy harmadfokú) polinomot. Ez a polinom jó illeszkedést biztosít bármilyen görbére, azonban a polinom tagjainak nincs egyértelmű közgazdasági jelentése. A Nelson-Siegel-Svensson (Nelson & Siegel (1987), Svensson (1994)) modellek viszont abból a feltevésből indulnak ki, hogy a hozamgörbe egy adott pillanatban leírható három vagy több független, jól értelmezhető faktorral (szint, meredekség, görbületi tényezők). Ezek pedig előrejelezhetőek különböző idősoros módszerekkel. Így bár a legtöbb esetben rosszabbul illeszkednek a megfigyelt időszakban, mint a rugalmasabb Spline modellek, jobb becslést adnak a jövőre nézve (a szakirodalom alapján).

Ezért szükségessé vált egy olyan modell kifejlesztése, amellyel a hozamgörbe jövőbeli változásait nagyobb hatásfokkal tudjuk előrejelezni. Erre alkalmas a nemzetközi gyakorlatban széles körben használt Nelson-Siegel-Svensson (NSS) modellcsalád. Arra viszont, hogy az NSS modellcsalád melyik modelljét érdemes használni, nincs bevett gyakorlat, a szakirodalomban rengeteg implementációs módszerrel találkozhatunk. Nem egyértelmű például a minimalizálandó célfüggvény meghatározása. Minimalizálhatjuk a becsült és megfigyelt árak vagy YTM-ek abszolút vagy négyzetes eltérését és az egyes papírokat is különböző súllyal vehetjük figyelembe az illeszkedésnél. Megadhatunk korlátokat is a modell egyes paramétereire (faktorértékeire), így kezelhetjük a nem kívánt strukturális töréseket. Valamint az optimalizálásnál is többféle algoritmust felhasználhatunk. Ez a dokumentum az (NSS) típusú modellek becslési lehetőségeit és a hozzájuk tartozó hozamgörbe-illesztések eredményeit foglalja össze.

Jelen tanulmány nagyban épít Reguly (2015) elemzésére, viszont míg az a modellek és a módszertan átfogó bemutatását célozta, a mostani tanulmány a gyakorlati tapasztalatokat és eredményeket foglalja össze. Egy újabb elemzés létjogosultságát az optimalizálásért felelős programkódok fejlesztése is indokolja. Ez okból kifolyólag az itt leírt optimalizálásra vonatkozó javaslatok nagyban különböznek Reguly (2015) módszereitől. Ugyanakkor a használatra javasolt modellek tekintetében ez a tanulmány is megerősíti Reguly (2015) következtetéseit, miszerint a klasszikus empirikus hozamgörbe-illesztések közül a Nelson-Siegel valamint az Adjusted Svensson modelleket érdemes használni, illetve újítási lehetőségként a Legendre modell itt vázolt, a Reguly (2015) által leírtaktól különböző parametrizációját.

A modellezés során használt hozamgörbe-adatok alapját az ÁKK Magyar Államkötvény (MÁK) és Diszkont Kincstárjegy (DKJ) állampapírjainak árjegyzési adatai képezik 2002 és 2015 között.

2. Röviden a Nelson-Siegel modellcsaládról

Nelson & Siegel (1987) egy háromfaktoros statikus modellt vezetett be a hozamgörbe modellezésére. A szakirodalomban ennek leginkább a Diebold & Li (2003) által dinamikussá alakított változatát használják. A modell szerint a forwardgörbére egy konstans és egy Laguerre-függvény összegeként adható approximáció. Ez utóbbi egy exponenciális késleltetési tényező és egy polinom szorzata. A Nelson-Siegel-féle approximált forwardgörbe a következő:

$$f_t(\tau) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1} e^{-\frac{\tau}{\lambda_t}} + \beta_{t,2} (\frac{\tau}{\lambda_t}) e^{-\frac{\tau}{\lambda_t}} \ ,$$

ahol τ jelöli a lejáratot, λ_t az egyenlethez tartozó konstans, a β-k pedig látens dinamikus faktorok.

Ebből integrálással a zérókupon hozamgörbe pedig:

$$y_t(\tau) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_t}}}{\frac{\tau}{\lambda_t}} \right) + \beta_{t,2} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda_t}}}{\frac{\tau}{\lambda_t}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda_t}} \right)$$

A modell egyik előnyös tulajdonsága, hogy könnyen kiszámolható belőle a rövid-, illetve a hosszútávú hozam, ugyanis:

$$\lim_{\tau \downarrow 0} y_t(\tau) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \ ; \qquad \lim_{\tau \to \infty} y_t(\tau) = \beta_{t,0}$$

A három β faktornak közgazdasági értelmezés is adható. Az első faktor (β_0) szorzója (loading) minden időhorizonton 1, így ez a hozamgörbe szintjének, azaz a hosszú hozamoknak feleltethető meg, ez a hosszútávú faktor. A β_0 növelése minden lejárathoz tartozó hozamot egyenletesen növel, tehát a hozamgörbe szintjét növeli. A második faktor szorzója a 0. időpontban 1, majd exponenciálisan tart a 0-hoz. Így ez feleltethető meg a hozamgörbe meredekségének, ebből adódik a rövidtávú komponens. A β_1 növelése a rövidtávú hozamot növeli, a hosszútávú hozamra viszont nincs hatással, tehát a hozamgörbe meredekségét változtatja. A harmadik faktor, a középtávú komponens, pedig a hozamgörbe görbületét, csúcsosságát határozza meg. Ez 0-tól indul, és a végtelenben 0-ba tart. A β_2 növelése a középtávú hozamokat növeli, nincs hatással a hosszú- illetve rövidtávú hozamokra, ezért a hozamgörbe csúcsosabb lesz β_2 növelésével. A harmadik faktor maximumának helyét, valamint a második faktor exponenciális csökkenésének sebességét pedig a λ paraméter határozza meg.

A modell kiterjesztésére és ezáltal egy rugalmasabb függvényformára lehetőséget ad extra β illetve λ paraméterek bevezetése. Így például egy második olyan faktort lehet hozzáadni a modellhez, amely a hozamgörbe középtávon jelentkező púposságáért felel. A kiterjesztési lehetőségekről bővebben értekezik De Pooter (2007).

3. Tesztelési lehetőségek

Ez a rész egy elméleti betekintést ad a modellek illeszkedésének vizsgálatába. Nincsen szakirodalmi konszenzus a különböző esetekben használandó illeszkedési mérőszámokról, hibamutatókról. Továbbá elég nehéz egy-egy modell illeszkedését egy számmal kifejezni, azonban az egyes modellek összehasonlításának céljából ideális lenne, ha tudnánk ilyen számot találni. Érdemes megjegyezni, hogy egyelőre csak a mintán belüli illeszkedést vizsgáltam, amely nem feltétlenül árul el sokat a modellek előrejelzési képességéről. Alapvetően négyféle mutatószámot használtam az illeszkedés jóságának a vizsgálatára, a mutatószámokat lehet papírok vagy napok szerint átlagolni, illetve lehet árakra, valamint YTM-ekre is hibát számolni. Most vegyük sorra a használt hibamutatók módszertanát.

Az első ilyen mutató az átlagos abszolút eltérés (MAE).

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^{n} |\,\hat{y}_t - y_t|}{n} \ ,$$

ahol $\hat{y}_t$ az adott időpontra/papírra vonatkozó becsült ár/YTM és y_t a hozzátartozó megfigyelt érték.

A következő mutató a gyökös átlagos négyzetes hiba (RMSE).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - y_t)^2}{n}}$$

Ezt a hibamutatót azért érdemes használni, mert jobban bünteti az átlagtól való nagy eltéréseket (a MAE-hoz képest), így például a bid-ask spreadbe eső viszonylag kisebb hibákat jobban elfogadja.

A harmadik használt mutató a találati arány (hit ratio). Ez azt mutatja meg, hogy egy adott napon/papír esetében a becsült árak/YTM-ek mekkora aránya esett a megfigyelt bid-ask spreadbe.

$$HIT = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\bar{y}_t)}{n} ,$$

ahol

$$\bar{y} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \hat{y} \in [y_{bid}; y_{ask}] \\ 0 & \text{ha } \hat{y} \notin [y_{bid}; y_{ask}] \end{cases}$$

Megjegyzés. A $[y_{bid}; y_{ask}]$ a bid-ask spreadet jelzi, $\bar{y}$ pedig árat és YTM-et is jelenthet. Árak esetén $[p_{bid}; p_{ask}]$ a helyes intervallum, YTM-ekre $[YTM_{ask}; YTM_{bid}]$ a korrekt. A továbbiakban a $y_{bid} < y_{ask}$ árakra helyes alapfeltevést használom, YTM-ek esetén értelemszerűen a fordított egyenlőtlenségből kell kiindulni.

Az utolsó használt mutató a spread error, amelynek módszertana:

$$SpreadError = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(\tilde{y}_t)}{n}} ,$$

ahol

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \hat{y} \in [y_{bid}; y_{ask}] \\ (\hat{y} - y_{bid})^2 & \text{ha } \hat{y} < y_{bid} \\ (\hat{y} - y_{ask})^2 & \text{ha } \hat{y} > y_{ask} \end{cases}$$

Ez a hibamutató ötvözi a hit ratio és az RMSE tulajdonságait, hiszen 0-nak veszi a hibát a bid-ask spread-be esés esetén, egyébként pedig a túllépett korláttól vett négyzetes hibát számol.

A naponkénti hibabecslés előnye, hogy lehet idősorosan is értelmezni a hibákat, illetve a célfüggvény kiszámolása is napi szinten történik mindig az adott napi árjegyzésben szereplő papírokra. A becslések elemzésekor ezért a naponkénti hibák kerülnek kiszámolásra és átlagolásra a megfigyelt időhorizonton. Az elemzésekben mind a négy mutatószámot használtam mind árakra, mind pedig YTM-ekre.

Természetesen a modelleket nem csak ezen számszerűsített hibamutatók alapján lehet összehasonlítani. Fontos tényező még a modell komplexitása, tényezőinek száma, hiszen könnyedén a túlillesztés csapdájába eshetünk, és a modellek prediktív képessége elveszhet. Intő jel, ha több tényező bevezetése esetén alig csökkennek a hibamutatók. A túlillesztést persze leginkább mintán kívüli (out-of-sample) tesztekkel lehetne detektálni. Szintén nem elhanyagolható a modell futási ideje, számításigénye. Az optimalizálás legtöbbször numerikus közelítéssel történik, nem pedig zárt formulával, ezért módszertanilag helyes beállítások is adhatnak rossz eredményeket, ha bonyolultabbá teszik az optimalizálandó függvényt. Erre kitérek majd a problémásabb eseteknél.

Az a tapasztalat, hogy az eltérő modelltípusok (Nelson-Siegel, Svensson, stb.) rendezése az illeszkedés pontossága szerint nem változik annak függvényében, hogy milyen hibamutatót választunk. Azonban egyes modelleken belül előfordulhat ilyen típusú inkonzisztencia a célfüggvény megadásából kifolyólag. Például az abszolút hibákat minimalizáló célfüggvény elméletileg jobb átlagos abszolút eltérést ad, a négyzetes hibákat minimalizáló függvény pedig jobb átlagos négyzetes eltérést. Hasonlóan, a YTM hibákat minimalizáló célfüggvény elméletileg jobb YTM illeszkedést biztosít, az árak eltérésének minimalizálása pedig jobb árilleszkedést. Azonban a gyakorlatban ezt befolyásolhatja például a hibák súlyozása és a célfüggvény bonyolultsága, számításigénye. Az eredmények vizsgálatánál erre még bővebben kitérek.

4. A baseline Nelson-Siegel modell

A modellspecifikáció, a célfüggvény és az optimalizálási metódus megadásánál összesen legalább nyolc paramétert tudunk legalább kettő, de esetenként akár tízféle értékre beállítani. Ez már önmagában többezres nagyságrendű lehetőséget jelent, ehhez jön még hozzá a kezdőértékek és korlátok beállítása, amellyel együtt gyakorlatilag végtelen beállítási lehetőségünk van. Mivel lehetetlen az összes paraméter összes kombinációját letesztelni, ezért mindig egy baseline modellből indulok ki, ehhez képest változtatok meg ceteris paribus egy-egy paramétert és elemzem ennek hatását. Természetesen esetenként, ahol módszertanilag is indokolt, több szimultán változtatás eredményeit is bemutatom. A tapasztalataok szerint az egyes hatások általánosíthatóak bármelyik alapmodellre és azok beállításaira. Például hasonló hatása van annak, ha az effektív/lineáris kamatozás helyett folytonos kamatozással számolunk egy durationnel súlyozott Nelson-Siegel modell esetében, mint egy spreaddel súlyozott Adjusted Svensson modellnél.

A Nelson-Siegel a választható modelleink közül a legegyszerűbb és a szakirodalomban leggyakrabban használt, ezért érdemes ehhez viszonyítani a többit. A modell becslése során az összes $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda)$ paramétert szimultán becsüljük meg a BFGS algoritmussal, amely egy numerikus lokális optimalizálási módszer. Ez érzékeny a kezdőértékek megadására, ezért ezt az előző időszakok értékiből egyszerű mozgóátlaggal határozzuk meg, és ehhez dinamikusan korlátokat is rendelünk, azaz nem engedjük meg a faktorok hirtelen ugrásait. A rövid és hosszú hozamoknál is kikötjük a nemnegativitást. Továbbá azt is meghatározzuk, hogy a hozamgörbe a maximumát 1 és 10 év között érheti el. Ezzel megakadályozzuk azt, hogy a középtávú faktor hatással legyen a rövid és hosszú hozamokra.

A becslés során a középárfolyamok négyzetes hibáit minimalizáljuk, a papírok durationjének reciprokával súlyozva. Erre a rövid hozamok nagyobb volatilitása miatt van szükség. Az árszámításnál a megadott diszkontkincstárjegy, illetve államkötvény eredeti árszámítását (lineáris, illetve effektív) használjuk.

A baseline Nelson-Siegel és az ÁKK által használt Spline modell eredményeinek összehasonlítását az alábbi két táblázat tartalmazza. Emlékeztetőül, a Hit ratio esetében a nagyobb, a többi mutató esetében a kisebb érték jelzi a jobban illeszkedő modellt.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Spline	0.1378	0.2049	0.9229	0.0762
Nelson-Siegel	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404

1. táblázat. Árak hibamutatói, Spline és Nelson-Siegel

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Spline	0.0640	0.0844	0.9229	0.0151
Nelson-Siegel	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329

2. táblázat. YTM-ek hibamutatói, Spline és Nelson-Siegel

Látható, hogy a baseline Nelson-Siegel modell a várakozásoknak megfelelően minden hibamutató esetén elmarad a rugalmasabb Spline modelltől. Azonban a Spread error kivételével (ami a módszertanból kifolyólag százalékosan is felnagyítja az eltéréseket) nem sokkal rosszabbak a Nelson-Siegel modell mutatói. Ez azt jelenti, hogy a modell módszertanilag helyesen lett implementálva és az előrejelzések során a szakirodalom alapján a Spline-nál kisebb hibákat fog adni.

5. Modellváltozatok

Ebben a fejezetben összefoglalom az egy-egy paraméter megváltoztatásával járó hatásokat. A változtatások négy kategóriába lettek sorolva: modell, optimalizálási metódus, célfüggvény, illetve kezdőértékek és korlátok.

5.1. Modellek

Az alábbiakban bemutatásra kerül az NSS modellcsalád öt különböző hozamgörbe-modellje, valamint a különböző árazási módszerek, amellyel meghatározhatjuk a zérókupon hozamgörbét. Lehetséges továbbá a spot hozamgörbe helyett forward hozamokkal számolni, ám ennek számításigénye túl nagy (numerikus integrálás kell hozzá), és módszertanilag se jelent semmilyen előnyt ennek használata. Az alábbi táblázatban található öt modell De Pooter (2007) alapján lett definiálva.

Modell neve	Belső (β) paraméterek száma	Külső (λ) paraméterek száma
Nelson-Siegel	3	1
Björk-Christensen	4	1
Bliss	3	2
Svensson	4	2
Adjusted Svensson	4	2

3. táblázat. Modelltípusok

Ebben a részben a fenti táblázatban látható öt modelltípus eredményei kerülnek összehasonlításra. Az alábbi táblázat ezen modellek összehasonlításának eredményeit tartalmazza.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Nelson-Siegel	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Björk-Christensen	0.1592	0.2260	0.8659	0.1187
Bliss	0.1943	0.2753	0.8183	0.1788
Svensson	0.1421	0.2027	0.8973	0.0938
Adjusted Svensson	0.1447	0.2084	0.8972	0.0969

4. táblázat. Árak hibamutatói, NSS modellváltozatok

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Nelson-Siegel	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Björk-Christensen	0.0804	0.1055	0.8659	0.0308
Bliss	0.0974	0.1269	0.8183	0.0452
Svensson	0.0711	0.0948	0.8973	0.0249
Adjusted Svensson	0.0704	0.0930	0.8972	0.0226

5. táblázat. YTM-ek hibamutatói, NSS modellváltozatok

Látható, hogy a Björk-Christensen modell (Björk & Christensen, 1997) minden esetben jobb a Nelson-Siegelnél, a Svensson és Adjusted Svensson modell pedig jobb illeszkedést biztosít a Björk-Christensennél. A Bliss-modell (Bliss, 1996) azonban a eggyel több paraméter ellenére minden esetben elmarad a Nelson-Siegel modelltől. Úgy tűnik tehát, hogy eggyel több β paraméter hozzáadásával lehet javítani a modell mintán belüli illeszkedésén. Ez korántsem meglepő, hiszen egy ökonometriai modell illeszkedésén mindig javít egy extra magyarázó változó. Mindenképpen hasznos információ, hogy az Adjusted Svensson modell a legtöbb hibamutató alapján kevesebb, mint feleannyira van a Spline modell illeszkedésétől, mint a Nelson-Siegel. Ráadásul a nyolc faktort tartalmazó Spline modellhez képest ez csak hat faktort tartalmaz, amelyek mindegyike a Nelson-Siegelhez hasonló közgazdasági jelentőséggel bír. Kérdéses azonban, hogy nem túlparametrizáltak-e a több faktort tartalmazó modellek. Erre a kérdésre azonban leginkább szintén az előrejelző képesség tudatában lehet majd válaszolni. Nyílik egy további lehetőség is annak megválaszolására, hogy érdemes-e (és ha igen, milyen időszakokban) egy összetettebb, többfaktoros modellt használni, erről a következő fejezetben lesz szó.

Lehetőség van arra is, hogy áttérjünk folytonos kamatszámításra. Ebben az esetben feltesszük, hogy a papírok árai folytonos kamatszámítással számolhatóak ki, és ehhez határozzuk meg a hozamgörbét. Az összehasonlítás során a becsült árakból a YTM-eket viszont már vagy az eredeti (DKJ-k esetében lineáris, MÁK papíroknál effektív) kamatszámítással kell kiszámolni vagy egy folytonos kamatozást feltételező YTM-hez kell viszonyítani a becsült értékeket. Az alábbi táblázatban található a folytonos kamatszámítás használatának eredménye az öt modell esetén.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Nelson-Siegel	0.1713	0.2477	0.8501	0.1411
Björk-Christensen	0.1528	0.2201	0.8814	0.1116
Bliss	0.1866	0.2671	0.8323	0.1713
Svensson	0.1400	0.2013	0.9029	0.0906
Adjusted Svensson	0.1412	0.2053	0.9072	0.0929

6. táblázat. Árak hibamutatói, NSS modellváltozatok folytonos kamatszámítással

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Nelson-Siegel	0.0819	0.1065	0.8501	0.0313
Björk-Christensen	0.0715	0.0922	0.8814	0.0244
Bliss	0.0894	0.1158	0.8323	0.0398
Svensson	0.0672	0.0878	0.9029	0.0203
Adjusted Svensson	0.0647	0.0837	0.9072	0.0177

7. táblázat. YTM-ek hibamutatói, NSS modellváltozatok folytonos kamatszámítással

Folytonos kamatszámítással mind az árak, és még inkább a YTM-ek esetén kedvezőbb értékeket tapasztalunk az összes modellre. Látható, hogy valóban nem befolyásolja lényegileg az alkalmazott modell a folytonos kamatozásra való áttérés által okozott változást. A javulás oka valószínűleg az, hogy a folytonos kamatozási típus konzisztensebben elhelyezkedő hozampontokat eredményez, amire kisebb hibákkal lehet görbét illeszteni. Módszertani előnye is van, így a loghozam görbéjét lehet konkrétan megkapni, nem pedig egy lineáris és effektív kamatszámítási módszerek keverékéből összerakott görbét. Erősen javasolt tehát a folytonos kamatozás használata az elemzésben.

5.2. Optimalizálási metódusok

Ez a rész a hozamgörbe-illesztéshez használható optimalizálási metódusokba ad betekintést. A becslések elkészítése során nyolcféle optimalizálási algoritmus került összehasonlításra. Az alábbi táblázatban található a módszerek néhány fontos tulajdonsága, mégpedig, hogy determinisztikus-e vagy függ egy véletlenszám-generátortól; hogy lokális, globális vagy hibrid optimumkereső algoritmusról van-e szó; valamint hogy mekkora számításigénye van, amelyet a futási idővel lehet szemléltetni[1]. Megjegyzendő, hogy a nem determinisztikus modellek eredményei is reprodukálhatóak.

Módszer	Determinisztikus	Típus	Futási idő (óra)
BFGS	igen	lokális	0.15
Particle Swarm Optimization	nem	globális	1.5
Simulated Annealing	nem	globális	3.7
Genetic Algorithm	nem	globális	15
PSO+BFGS	nem	hibrid	1.7
SA+BFGS	nem	hibrid	3.9
GA+BFGS	nem	hibrid	15
Global Search	igen	hibrid	3

8. táblázat. Optimalizálási módszerek tulajdonságai

Látható, hogy hatalmas különbségek vannak a futási időkben a BFGS és a többi algoritmus között. A Particle Swarm, Genetic Algorithm és Simulated Annealing módszerekről a mi szempontunkból csak az a lényeges, hogy ezeknél nem szükséges kezdőértéket megadni, hiszen az egész (korlátos) optimalizálási tartományt vizsgálják. Azonban ezek a módszerek nem determinisztikusak, a végeredményüket befolyásolja egy véletlenszám-generátor. Továbbá ezek az algoritmusok a globális optimum hozzávetőleges helyét tudják megadni, amely legtöbb esetben nem egy konkrét lokális optimum. Ráadásul az egyes futtatások során történhetnek olyan esetek, hogy az első időpontban, amikor még az idősoros korlátok hiányában elég nagy az optimalizálási tér, egy közgazdaságilag értelmezhetetlen optimumba konvergál az algoritmus, amiből rossz idősoros korlátok lesznek meghatározva. Ezen lehet javítani a hibrid metódusokkal. Ennek módszertana az, hogy az egyik globális optimalizálási metódus meghatározza a globális optimum hozzávetőleges helyét, amit a BFGS kezdőértéknek használ és meghatározza a lokális és egyben globális optimumot. Ez a módszer kevésbé érzékeny

[1]A táblázatban feltüntetett futási idők a teljes, 14 éves időszakra történő Nelson-Siegel modell futtatásának eredményei. A futtatás egy Intel 650 @ 3.2GHz CPU-n történt

a véletlenszám-generátor által meghatározott értékre, hiszen ezt csak a kezdőérték meghatározására használja. További lehetőség a Global Search, amely egy algoritmus alapján meghatározott több kezdőértékekből futtat BFGS algoritmust és ezek közül a legjobb lokális optimumot tekinti globálisnak. Az alábbi táblázatokban találhatóak a Nelson-Siegel modell becsült értékeinek hibái a különböző optimalizálási algoritmusokat használva.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
BFGS	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Particle Swarm Optimization	0.1729	0.2490	0.8524	0.1405
Simulated Annealing	0.1873	0.2706	0.8316	0.1597
Genetic Algorithm	0.1729	0.2489	0.8520	0.1406
PSO+BFGS	0.1729	0.2491	0.8526	0.1409
SA+BFGS	0.1873	0.2706	0.8316	0.1597
GA+BFGS	0.1727	0.2488	0.8528	0.1400
Global Search	0.1727	0.2488	0.8530	0.1398

9. táblázat. Árak hibamutatói, optimalizálási metódusok

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
BFGS	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Particle Swarm Optimization	0.0837	0.1095	0.8524	0.0328
Simulated Annealing	0.0913	0.1199	0.8316	0.0399
Genetic Algorithm	0.0839	0.1097	0.8520	0.0331
PSO+BFGS	0.0838	0.1096	0.8526	0.0329
SA+BFGS	0.0913	0.1199	0.8316	0.0399
GA+BFGS	0.0836	0.1094	0.8528	0.0328
Global Search	0.0836	0.1094	0.8530	0.0328

10. táblázat. YTM-ek hibamutatói, optimalizálási metódusok

Látható, hogy egyik modell sem ad lényegesen jobb eredményt a BFGS-nél, a csak globális metódusok ráadásul rosszabbul teljesítenek. A hibrid algoritmusok esetleg egy-két napon más (jobb) globális optimumot találnak, azonban ennek hatása elenyészően kicsi ahhoz képest, hogy mennyivel nagyobb a számításigényük. Egyértelmű tehát, hogy a BFGS módszert érdemes használni, és esetleg ellenőrizni valamelyik globális vagy hibrid metódussal. Könnyű ugyanis hibákat elkövetni a BFGS beállításainál, amelyek így ki tudnak derülni.

A BFGS algoritmus érzékeny bizonyos beállításokra, amire érdemes odafigyelni. Korlátok hozzáadása akkor is meg tudja változtatni az eredményt, ha a hozzáadott korlát irreleváns vagy a faktoroktól függetlenül teljesíthetetlen. Továbbá a toleranciaértékeket, amelyek az optimalizálás pontosságát befolyásolják, érdemes úgy megadni, hogy tükrözzék a célfüggvény hibájának nagyságrendjét. Például Fama-Bliss hozamok optimalizálása esetén (10^{-2} nagyságrend) érdemes kisebb toleranciaértékeket beállítani, mint áraknál (10^2 nagyságrend).

5.3. A célfüggvény meghatározása

A célfüggvény meghatározásánál kétféle megfigyelés hibáinak minimalizálása közül választhatunk: árak, illetve YTM-ek. Számolhatunk négyzetes, illetve abszolút eltérésekkel, illetve többféle módszerrel súlyozhatjuk a papírokat. Például a spread inverzével való súlyozás a likviditást hivatott kifejezni, nagyobb súllyal veszi figyelembe a kisebb spreaddel rendelkező, így likvidebb papírokat. A szakirodalomban leggyakrabban használt módszer a (modified) duration inverzével, avagy ennek négyzetével való súlyozás. A dutation-ös súlyozás közgazdaságilag azzal indokolható, hogy a rövidebb durationnel rendelkező papírok megfigyelt ára pontosabban tükrözi a valódi árukat. Az alábbi táblázat hat modell hibamutatóit tartalmazza. A baseline-hoz képest a második modell közép YTM-ből számított árfolyammal dolgozik, a harmadik a célfüggvényt a Spread error hibamutató szerint határozza meg, a negyedik abszolút hibákkal számol négyzetes helyett, az ötödik a YTM-ek súlyozatlan hibáit minimalizálja, folytonos kamatszámítás mellett, amely az egyik helyes módszertan Berenguer et al. (2013) szerint, ha a YTM hibák homoszkedaszticitását feltételezzük. Megjegyzendő, hogy az utolsó modell (YTM becslések) futási ideje nagyjából a hatvanszorosa (10 óra) az árak hibáját minimalizáló becslésnek.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline (középár, abszolút hibák)	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Számított középár	0.1729	0.2491	0.8524	0.1418
Spread	0.2565	0.3847	0.8086	0.2439
Abszolút hibák	0.1820	0.3159	0.8702	0.2341
Súlyozatlan YTM becslés, folytonos kamatozás	0.1902	0.2911	0.8465	0.1794

11. táblázat. Árak hibamutatói, különböző célfüggvények

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline (középár, abszolút hibák)	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Számított középár	0.0837	0.1096	0.8524	0.0329
Spread	0.1029	0.1232	0.8086	0.0221
Abszolút hibák	0.0749	0.1057	0.8702	0.0330
Súlyozatlan YTM becslés, folytonos kamatozás	0.0849	0.1102	0.8465	0.0307

12. táblázat. YTM-ek hibamutatói, különböző célfüggvények

A fenti táblázatból az derül ki, hogy a durationnel való súlyozás miatt[2] a várt eredmények a YTM hibamutatóknál jelennek meg és nem az áraknál. Ott minimalizálja a spread módszertan a Spread errort és az abszolút hibák használata a MAE mutatót. Igazából nem lényeges, hogy melyik középárfolyamot használjuk. Az abszolút hibák használata az árakra több nagy hibát eredményez, mint a négyzetes hibáké, ezért a Spread error és RMSE mutatói gyengék. A spread módszertan pedig egy rosszul viselkedő célfüggvényt eredményez, hiszen végtelen sok globális minimuma lehet egy-egy papírra, a hiba ugyanis 0, ha a spread sávba esik az optimalizálás. Leginkább a négyzetes hibákat érdemes használni.

A YTM becslések eredményei csak folytonos árazás esetén adnak értékelhető eredményeket, de illeszkedésben nem jobbak az árhibákat minimalizáló becsléseknél. Ezért inkább az utóbbiakat érdemes használni.

A papírok súlyozására is többféle lehetőségünk van. Az ÁKK által használt Spline módszertan a spread nagyságának inverzével való súlyozást alkalmazza. Berenguer et al. (2013) alapján a súlyozatlan YTM becslés mellett a modified duration négyzetének inverzével való súlyozás a helyes módszertan. Az alábbi táblázatban találhatóak a különböző súlyozáshoz kapcsolódó hibamutatók. A spread súlyozás nem összekeverendő a spread error-t minimalizáló célfüggvénnyel.

[2]A modified duration négyzetének inverzével való súlyozás a YTM hibákat minimalizálja (Berenguer et al. , 2013). A

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline (Duration)	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Spread	0.1910	0.2906	0.8767	0.1695
Ár	0.1789	0.2363	0.7849	0.1431
Lejárat	0.1742	0.2550	0.8576	0.1452
Modified Duration	0.1731	0.2433	0.8385	0.1388
Duration^2	0.1928	0.3000	0.8713	0.1966
Modified Duration^2	0.1800	0.2646	0.8721	0.1548

13. táblázat. Árak hibamutatói, különböző súlyozás

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline (Duration)	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Spread	0.0799	0.1032	0.8767	0.0248
Ár	0.1156	0.1630	0.7849	0.0812
Lejárat	0.0821	0.1070	0.8576	0.0308
Modified Duration	0.0884	0.1167	0.8385	0.0389
Duration^2	0.0790	0.1002	0.8713	0.0248
Modified Duration^2	0.0794	0.1013	0.8721	0.0253

14. táblázat. YTM-ek hibamutatói, különböző súlyozás

Az adatok elemzéséből az derül ki, hogy van valamennyi átváltás az árak és a YTM-ek hibamutatói között. A spread és a négyzetes modified duration adja a legjobb YTM hibamutatókat, míg az árak esetében ezek kevésbé jók. A tapasztalatok alapján a szakirodalomban ajánlott, modified duration négyzetének inverzével súlyozó modellt érdemes használni, ez viszonylag jó értékeket ad mind árakra, mind YTM-ekre.

5.4. Kezdőértékek és korlátok

A kezdőértékek és korlátok meghatározásának nincsen kiforrott szakirodalma, egyértelmű módszertana a hozamgörbe-modellezésben. A numerikus lokális optimalizálási algoritmusok (például az itt használt BFGS) érzékenyek a kezdőértékek megadására. Rossz kezdőértékkel előfordulhat, hogy egy, a globális optimumtól távol eső lokális optimumot ad megoldásként az optimalizálási algoritmus. Alapvetően kétféle módszert választhatunk a kezdőértékek megadására. Vagy az előző napok faktorértékei alapján következtetünk az adott napi optimum helyére, tehát idősoros technikákkal határozzuk meg a kezdőértéket, vagy pedig az adott napi hozamokból számoljuk ezt ki. A lokális optimalizálási algoritmus elméleti kezdőérték-érzékenységéből adódó várt problémák azonban nem jelentek meg az elemzés során. Ebben a konkrét optimalizálási feladatban a tapasztalatok alapján a kezdőérték meghatározása nem befolyásolja jelentős mértékben a kiszámított optimális faktorértéket. Az optimalizálási probléma nem annyira komplikált, hogy az algoritmus egy, a globális optimumtól távol eső lokális optimumba konvergáljon.

Azonban a mi esetünkben fennáll ennek a problémának az ellentéte, mégpedig, hogy az optimalizálási tér több, hasonlóan jó lokális optimummal rendelkezik, ám ezek közül néhány (sokszor beleértve a globális optimumot is) idősorosan értelmezhetetlen faktorértékeket ad. Ez például abban nyilvánul meg, hogy a β_0 faktor a kelleténél kevésbé korrelál a megfigyelt hosszútávú hozamokkal.

Ennek kezelésére érdemes az egyes faktorokra korlátokat is megadni. Erre is többféle módszert alkalmazhatunk. Egyrészt megadhatunk úgynevezett vágási értékeket a kezdőértékekhez képest. Ez azt jelenti, hogy az optimalizálási teret úgy korlátozzuk, hogy az egyes faktorok az adott napi idősoros vagy empirikus módszerrel meghatározott kezdőértéktől csak kevéssel (1-3) térhetnek el. Ezt kombinálhatjuk konstans korlátok bevezetésével is. Ezek meghatározása a modellben részben De Pooter (2007) alapján történt. Az első faktor 0 és 30 közé, a többi β faktor pedig -30 és 30 közé lett szorítva, a λ korlátai pedig úgy lettek meghatározva, hogy a hozamgörbe a púposságának maximumát 1 és 10 év között érheti el. A konstans β korlátok jelentéstartalma a hosszú hozamok korlátozása 0 és 30% közé, valamint a rövid hozamok korlátozása 0 és 60% közé. A gyakorlatban természetesen sosem ütközik bele egyik β faktor sem ezekbe a korlátokba, pusztán az optimalizálási tér szűkítése végett lettek implementálva.

Az alábbi táblázatban láthatjuk hét különböző kezdőérték-korlát módszertan eredményét. A baseline modell egyszerű lineáris mozgóátlag alapján, az előző 20 nap faktorértékeiből határozza meg a következő napi kezdőértéket. A lineáris mozgóátlag minden megfigyelést egyenlő súllyal vesz figyelembe. A második modell exponenciális mozgóátlagot használ az összes eddigi megfigyelést figyelembe véve, a régebbieket egyre csökkenő súllyal. Az első két modellnél a fent említett konstans korlátok mellett a β paramétereknél 2-es, a λ-nál 0.25-ös vágási érték lett meghatározva. Ez utóbbi a púposság helyére nagyjából fél év eltolódást tesz lehetővé mindkét irányban- A harmadik és negyedik modell a baseline-hoz hasonlóan lineáris mozgóátlagot használ, kevésbé szigorú (a másodikhoz képest kétszer akkora, illetve végtelen) vágási értékekkel. Az ötödik modell empirikus módszerrel, a megfigyelt hozamokból határozza meg a kezdőértékeket. A β_0 kezdőértékét a 10 évnél hosszabb átlaghozamtól tesszük függővé, a β_1-ét a 6 hónapnál rövidebb hozamokból határozzuk meg, a harmadik faktorét pedig a középtávú hozamok alapján. A β paraméterek vágási értékei 1, 1 és 3; a λ-hoz csak konstans korlát tartozik. A hatodik és hetedik modell a β-k korlátait lazítja.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Exponenciális mozgóátlag	0.2498	0.3541	0.7957	0.2354
Alacsonyabb idősoros korlátok	0.1609	0.2318	0.8677	0.1219
Idősoros kezdőérték, nincs korlát	0.1528	0.2206	0.8804	0.1100
Empirikus korlát	0.1792	0.2820	0.8780	0.1631
Alacsony empirikus korlát	0.1581	0.2335	0.8877	0.1207
Empirikus kezdőérték, nincs korlát	0.1536	0.2243	0.8882	0.1104

15. táblázat. Árak hibamutatói, kezdőértékek és korlátok módosítása

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Exponenciális mozgóátlag	0.1190	0.1492	0.7957	0.0660
Alacsonyabb idősoros korlátok	0.0782	0.1032	0.8677	0.0282
Idősoros kezdőérték, nincs korlát	0.0746	0.0991	0.8804	0.0258
Empirikus korlát	0.0779	0.1025	0.8780	0.0296
Alacsony empirikus korlát	0.0735	0.0972	0.8877	0.0252
Empirikus kezdőérték, nincs korlát	0.0727	0.0962	0.8882	0.0241

16. táblázat. YTM-ek hibamutatói, kezdőértékek és korlátok módosítása

Megfigyelhető, hogy a korlátok csökkentésével, illetve elhagyásával javítani lehet a modell illeszkedésén. Ha idősoros korlátokat használunk, érdemes inkább kevesebb időpontot figyelembe venni és lineáris mozgóátlagot használni. Az empirikus kezdőértékek és korlátok viszont a legtöbb esetben valamennyivel jobb YTM illeszkedést biztosítanak a hasonlóan szigorú korlátokat használó mozgóátlagos becsléshez képest. Érdemes megfigyelni a negyedik és hetedik modell közötti különbséget. Mindkettőnél csak konstans korlátokat használunk, mindössze a kezdőérték meghatározása különbözik. Látható, hogy a kezdőérték meghatározása valóban nem befolyásolja jelentősen az illeszkedést. A jobb illeszkedés ellenére nem érdemes elhagyni a korlátokat. Ennek okáról bővebben az idősoros vizsgálatnál lesz szó.

5.5. A Fama-Bliss bootstrap módszer

A Fama-Bliss bootstrap módszer (Fama & Bliss, 1987) a megfigyelt államkötvények, illetve diszkontkincstárjegyek árjegyzéseiből határozza meg a forward hozamgörbét. A különböző lejáratok közötti forward rátát konstansnak véve ki lehet számolni ebből a zérókupon hozamokat. A módszer használatával közvetlenül a hozamokra lehet NSS típusú modelleket illeszteni. A módszer használatának előnye, hogy konzisztensen mindenhol folytonos kamatozást feltételez és elkerüli az optimalizálás során a hozamokról árakra vagy YTM-ekre történő átszámítást. Azonban jelentősen befolyásolhatja az eredményeket, hogy konkrétan milyen lejáratokat veszünk bele az illesztésbe. Az alábbi táblázatban látható néhány Fama-Bliss illesztés eredménye a baseline Nelson-Siegel modellhez viszonyítva. Érdemes a hosszabb lejáratú papírokat kisebb súllyal figyelembe venni, de a szakirodalom alapján nem egyértelmű, hogy mennyivel. Az egyenletesen elhelyezkedő pontok rosszabb YTM és jobb árilleszkedést biztosítanak annál, mint ha sávosan, körülbelül a huszadára ritkul a hosszú lejáratoknál a pontok száma a rövid lejáratokhoz képest. Ez utóbbihoz hasonló eredményt ad, bár némileg jobb árilleszkedéssel, ha négyzetesen ritkulnak a pontok. A gyorsabb ritkulás általánosan jobb YTM és rosszabb árilleszkedést ad.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Egyenletes	0.1774	0.2451	0.8159	0.1400
Sávosan ritkuló	0.1809	0.2839	0.8673	0.1725
Négyzetesen ritkuló	0.1762	0.2592	0.8637	0.1419
Harmadfokú függvény szerint ritkuló	0.1793	0.2667	0.8677	0.1477
Exponenciálisan ritkuló	0.1889	0.2884	0.8703	0.1738

17. táblázat. Árak hibamutatói, Fama-Bliss illesztés

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Egyenletes	0.0947	0.1253	0.8159	0.0478
Sávosan ritkuló	0.0775	0.0993	0.8673	0.0255
Négyzetesen ritkuló	0.0785	0.1002	0.8637	0.0255
Harmadfokú függvény szerint ritkuló	0.0773	0.0981	0.8677	0.0237
Exponenciálisan ritkuló	0.0764	0.0961	0.8703	0.0223

18. táblázat. YTM-ek hibamutatói, Fama-Bliss illesztés

5.6. Legendre-féle modellek

Az Laguerre-polinomokat használó NSS modellek alternatívájaként jött létre a Legendre modell (Hubig (2013), Almeida (2005)), amelynek faktorai transzformált Legendre polinomok. Előnye, hogy így tetszés szerinti belső paraméterszámot választhatunk, viszont faktorok és a hozamok közötti kapcsolat értelmezése körülményesebb, mint az NSS esetében. Egy n-faktoros Legendre modellből a következőképpen számolható ki a hozam:

Legyen

$$x(\tau_t) = \frac{2\tau_t}{\max(\tau_t)} - 1$$

.

Vegyük észre, hogy az x értéke -1 lesz egy ebben a pillanatban lejáró papír esetén és 1 az adott napon leghosszabb lejáratú papír esetén.

Továbbá legyen $P_k(x)$ a k-adik Legendre-polinom értéke az x helyen. Ekkor

$$y_t(x_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{t,k} P_k(x_t)$$

A Legendre-modell esetében a rövid hozam a faktorok váltakozó előjelű összege, a hosszú hozam pedig a faktorok összege, tehát:

$$\lim_{\tau \downarrow 0} y_t(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \beta_{t,k} \; ; \qquad \lim_{\tau \to \max(\tau_t)} y_t(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{t,k}$$

Megjegyzendő, hogy az itt vázolt parametrizáció különbözik a Reguly (2015) elemzésében leírt változattól.

A β paramétereknek itt is adhatunk az NSS modellekhez hasonló közgazdasági értelmezést (szint, meredekség, görbület, görbület változásai, stb.). Látható viszont, hogy ez a modell nem tartalmaz λ paramétert, amely egy teljes egészében lineáris, tehát legkisebb négyzetek módszerével (OLS) becsülhető modellt eredményez, ha Fama-Bliss hozamgörbére illesztünk. Közvetlenül az árra való illesztés esetén még szükség van numerikus optimalizálási módszerekre. A Legendre modellek illesztésénél az előzőekben javasolt beállításokat (folytonos kamatszámítás, modified duration inverzével való súlyozás) használom. Az alábbi két táblázat 4-, 6-, valamint 8-faktoros Legendre modellillesztések eredményeit tartalmazza. Az első három modell az árakra BFGS-sel becsült illesztés, a második három pedig Fama-Bliss hozampontokra történő illesztés.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline NS	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Árillesztés, 4 faktor	0.1785	0.2527	0.8540	0.1500
Árillesztés, 6 faktor	0.1165	0.1662	0.9213	0.0656
Árillesztés, 8 faktor	0.0895	0.1274	0.9465	0.0391
Fama-Bliss, 4 faktor	0.1833	0.2584	0.8346	0.1401
Fama-Bliss, 6 faktor	0.1315	0.1856	0.9115	0.0692
Fama-Bliss, 8 faktor	0.1189	0.1667	0.9347	0.0533

19. táblázat. Árak hibamutatói, Legendre modellek

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Baseline NS	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Árillesztés, 4 faktor	0.0822	0.1042	0.8540	0.0268
Árillesztés, 6 faktor	0.0598	0.0792	0.9213	0.0147
Árillesztés, 8 faktor	0.0504	0.0677	0.9465	0.0101
Fama-Bliss, 4 faktor	0.0874	0.1111	0.8346	0.0321
Fama-Bliss, 6 faktor	0.0632	0.0827	0.9115	0.0163
Fama-Bliss, 8 faktor	0.0563	0.0740	0.9347	0.0127

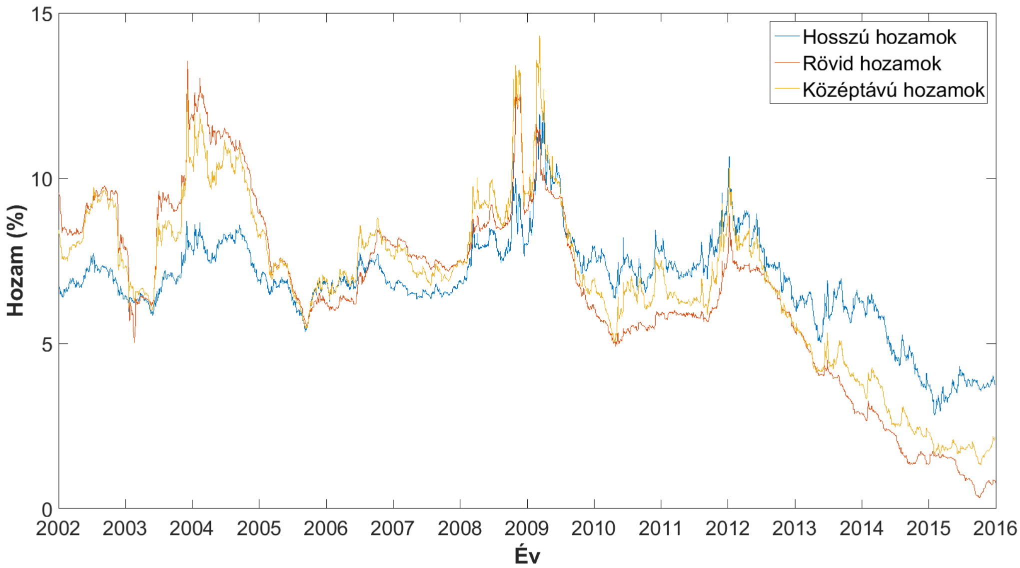
20. táblázat. YTM-ek hibamutatói, Legendre modellek

Látható, hogy a Fama-Bliss modellek valamivel rosszabb illeszkedést adnak az árillesztésnél. Ez utóbbiak közül a négyfaktoros modell illeszkedésben a baseline Nelson-Siegel szintjén van, holott paramétereiben gyakorlatilag lineáris. A hatfaktoros jobb eredményt ad az erősen nemlineáris Svensson modellnél, a nyolcfaktoros pedig a szintén nyolc paramétert használó Spline-nál is pontosabb illesztést ad.

A Legendre-modell komoly hátránya a faktorok és hozamok közötti kapcsolat körülményes értelmezése, különös tekintettel a középtávú hozamokra. Továbbá a Legendre modell nem használható a becslésben szereplő leghosszabb lejáraton túli extrapolációra, ugyanis λ paraméter hiányában a rövid- és középtávú faktorok loadingjai nem konvergálnak 0-ba, mint az NSS modelleknél. Ezen felül a szakirodalomban nincs bizonyíték a Legendre-modell előrejelzési képességéről, szemben a bizonyítottan jó előrejelzési mutatókkal rendelkező NSS modellekről.

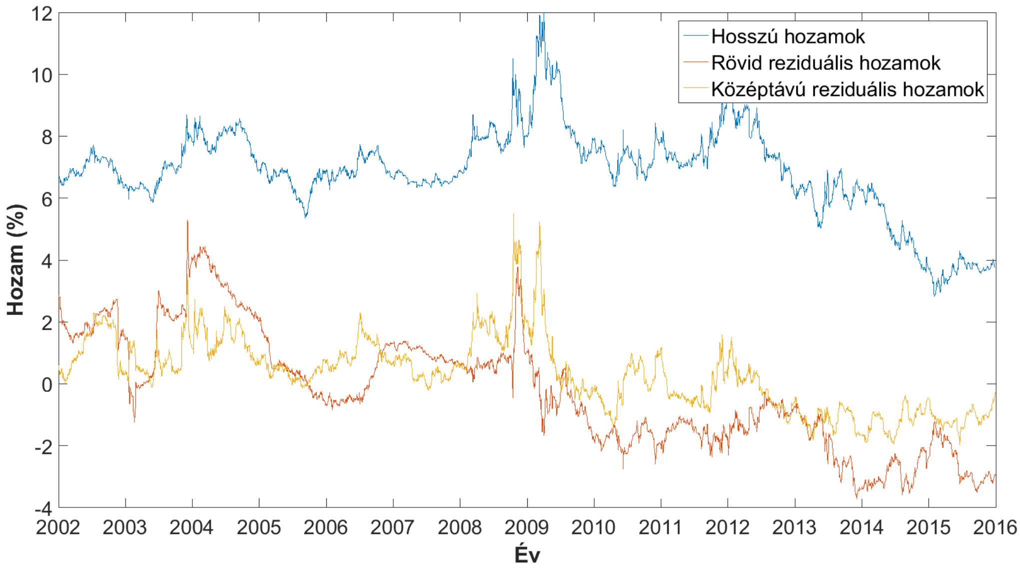
6. A faktorok idősoros vizsgálata

Az idősoros vizsgálatoknál két fontos kérdés merül fel: megfelelnek-e a faktorok értékei a közgazdasági értelmezésnek, miszerint az NSS modellek első faktorai a hosszú, második faktorai rövid, harmadik faktorai pedig a középtávú hozammal állnak kapcsolatban. Az alábbi ábrán láthatóak az államkötvény- illetve diszkontkincstárjegy-árjegyzések alapján számolt hosszú (10 éven túli), középtávú (1.5 és 3.5 év között) illetve rövid (6 hónapnál rövidebb) átlaghozamok.



1. ábra. Magyar forint átlaghozamok 2002-2015

Természetesen ránézésre is látható, hogy elég nagy korreláció van a három átlaghozam között. A következő ábrán a reziduális hozamok láthatók, amelyek (ha helyes a modellspecifikációnk), megfeleltethetőek az egyes NSS, illetve Legendre-féle faktoroknak. A hosszú hozam továbbra is a 10 év fölötti átlaghozam. A rövid reziduális hozamot úgy kaphatjuk meg, hogy a rövid hozamból kivonjuk a hosszú hozamot. A középtávú reziduális hozam pedig a középtávú hozam kétszerese mínusz a rövid és a hosszú átlaghozam.



2. ábra. Reziduális hozamok 2002-2015

Az alábbi táblázat az abszolút korrelációs értékeket tartalmazza a releváns faktorok, illetve a hosszú, valamint középtávú és rövid reziduális hozamok között. A Legendre modellek eltérő karakterizációja miatt a középtávú faktorra nem lehet egyértelmű faktormegfeleltetést találni, így csak a rövid- és hosszú hozamok korrelációi lettek feltüntetve.

Változat	Rövid hozam	Középtávú hozam	Hosszú hozam
Baseline NS	0.8971	0.8535	0.7070
Idősoros NS, korlát nélkül	0.9609	0.8235	0.6181
Empirikus NS, magas korlátok	0.9852	0.9604	0.8659
Empirikus NS, alacsony korlátok	0.9787	0.9355	0.7398
Empirikus NS, korlát nélkül	0.9666	0.9201	0.6308
Legendre árillesztés, 6 faktor	0.9798	N/A	0.9620
Legendre árillesztés, 8 faktor	0.6831	N/A	0.9136

21. táblázat. Faktorok és hozamok korrelációja

A rövid hozamokkal való korreláció két modell kivételével mindenhol 95% fölötti. Ezért nyolcfaktoros Legendre modellt nem érdemes alkalmazni, valamint az idősoros korlátok hozzáadása szintén rontja a rövid hozamokkal való korrelációt. Ez nem meglepő, hiszen így lassabban reagál a modell a változásokra. Azonban korlátok hiányában csak 60% körüli a hosszú hozammal való korreláció. Idősoros korlátokkal ezt 70%-ra, hasonlóan szigorú empirikus korlátokkal pedig 85% fölé lehet vinni. Mivel az empirikus korlátok használata jobb YTM illeszkedést is biztosít, ezért egyértelműen ezt (3. modell) érdemes használni a Nelson-Siegelek közül. Mindazonáltal érdemes megjegyezni, hogy a hatfaktoros Legendre mind illeszkedésben, mind korrelációban jobb eredményeket ad a Nelson-Siegelnél. Komoly hibája azonban a középtávú hozamok egyértelmű értelmezésének nehézsége.

7. Néhány javasolt modell

Az előzőekben leírtak tanulságait felhasználva álljon itt néhány konkrét javaslat, hogy milyen modelleket érdemes használni. Viszonyításképpen az első két modell legyen a Spline és a baseline Nelson-Siegel. A harmadik modell a Nelson-Siegel egy feljavított változata, folytonos kamatszámítással és inverz modified durationnel való súlyozással, valamint empirikus kezdőértékekkel és korlátokkal. A negyedik modell egy Adjusted Svensson, az ötödik pedig egy hatfaktoros Legendre árillesztés.

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Spline	0.1378	0.2049	0.9229	0.0762
Baseline NS	0.1728	0.2489	0.8526	0.1404
Javított NS	0.1992	0.3171	0.8830	0.2142
Adjusted Svensson	0.1412	0.2053	0.9072	0.0929
Legendre	0.1165	0.1662	0.9213	0.0656

22. táblázat. Árak hibamutatói, javasolt modellek

Változat	MAE	RMSE	Hit ratio	Spread error
Spline	0.0640	0.0844	0.9229	0.0151
Baseline NS	0.0837	0.1096	0.8526	0.0329
Javított NS	0.0783	0.0986	0.8830	0.0261
Adjusted Svensson	0.0647	0.0837	0.9072	0.0177
Legendre	0.0598	0.0792	0.9213	0.0147

23. táblázat. YTM-ek hibamutatói, javasolt modellek

A táblázatból kiderül, hogy a Nelson-Siegel modellnek leginkább a YTM illeszkedésén lehet javítani, valamennyire az árilleszkedés kárára. Több faktor bevonásával lehet javítani az illeszkedésen: a hatfaktoros Adjusted Svensson és Legendre modellek sok esetben hasonló vagy kicsit jobb illeszkedési mutatókkal rendelkeznek, mint a Spline. Leginkább az előrejelző képesség a döntő abban, hogy melyik modellt érdemes alkalmazni. A Nelson-Siegel modell előnye a viszonylagos egyszerűsége, hátránya a kevésbé rugalmas illeszkedés. Az Adjusted Svensson modell előnye a paraméterek értelmezhetősége nagyobb rugalmasság mellett, hátránya az erős nemlinearitása. A Legendre modell szintén rugalmas illeszkedést biztosít, gyakorlatilag paramétereiben lineáris, azonban a középtávú hozamok és a hozzájuk tartozó faktorok nem értelmezhetőek egyszerű módon.

8. Konklúzió

Az előzőek során áttekintésre kerültek a Nelson-Siegel-Svensson modellek paraméterbecsléséivel kapcsolatos kérdések. A legfőbb következtetés az, hogy érdemes mindenképp a szakirodalomban leggyakrabban használt módszertannal (folyamatos kamatozás, négyzetes modified duration inverzével való súlyozás) elvégezni a hozamgörbeillesztést. A folytonos kamatozás használatának csak modellezési jelentősége van, a gyakorlatban továbbra is az adott papírnak megfelelő kamatkonvenciót érdemes használni. A Nelson-Siegel modellek jó illeszkedési mutatókkal rendelkeznek, több faktor hozzáadásával (Svensson modellek), vagy eltérő parametrizációval (Legendre modell) pedig akár a Spline-hoz hasonló illeszkedés is elérhető. A javasolt modellek teljesítik az alapvető idősoros kritériumokat, a megfelelő faktorok és a rövid-, illetve hosszú hozamok magas korrelációval rendelkeznek. A használatra javasolt modell tekintetében a jelen elemzésben foglalt álláspont összeegyeztethető Reguly (2015) tanulmányával is, miközben a javasolt optimalizálási módszertan tekintetében a két elemzés jelentősen különbözik. Ennek oka az optimalizáláshoz használt programkódok azóta történt fejlesztése és finomhangolása. Mindhárom modellnek bemutatásra kerültek az előnyei, illetve hátrányai is. A következő kérdés arra irányul, hogy e modellek közül melyik a leginkább alkalmas a hozamgörbék előrejelzésére is, melynek megválaszolása további kutatást igényel a hozamgörbe, valamint a faktorok előrejelzésének és az előrejelzések pontosságának vizsgálatának irányában, melyet az ÁKK a következő lépésben kíván megtenni.

Hivatkozások

Almeida, Caio Ibsen Rodrigues De. 2005. Affine Processes, Arbitrage-Free Term Structures Of Legendre Polynomials, And Option Pricing. International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF), 8(02), 161–184.

Berenguer, Emma, Gimeno, Ricardo, & Nave, Juan M. 2013 (May). Term structure estimation, liquidity-induced heteroskedasticity and the price of liquidity risk. Banco de Espana Working Papers 1308. Banco de Espana.

Björk, Tomas, & Christensen, Bent Jesper. 1997 (Nov.). Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 209. Stockholm School of Economics.

Bliss, Robert R. 1996. Testing term structure estimation methods. Tech. rept.

De Pooter, Michiel. 2007 (June). Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models. Tinbergen Institute Discussion Papers 07-043/4. Tinbergen Institute.

Diebold, Francis X., & Li, Canlin. 2003 (October). Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. Working Paper 10048. National Bureau of Economic Research.

Fama, Eugene F, & Bliss, Robert R. 1987. The Information in Long-Maturity Forward Rates. American Economic Review, 77(4), 680–92.

Hubig, A. 2013. Introduction of a New Conceptual Framework for Government Debt Management: With a Special Emphasis on Modeling the Term Structure Dynamics. Empirische Finanzmarktforschung/Empirical Finance. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Nelson, Charles R, & Siegel, Andrew F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. The Journal of Business, 60(4), 473–89.

Reguly, Ágoston. 2015 (Apr.). A magyar állampapírok hozamgörbe modelljeinek illesztése globális optimalizáló módszerekkel és paramétereinek idősoros elemzése. Adósság Kezelési Tanulmányok. Államadósság Kezelő Központ Zrt.

Svensson, Lars E O. 1994 (Oct.). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-4. CEPR Discussion Papers 1051. C.E.P.R. Discussion Papers.