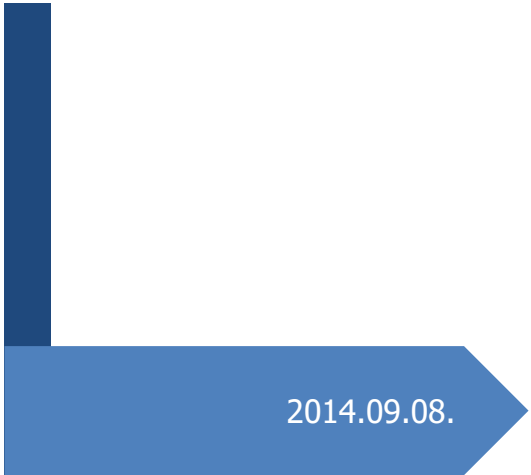
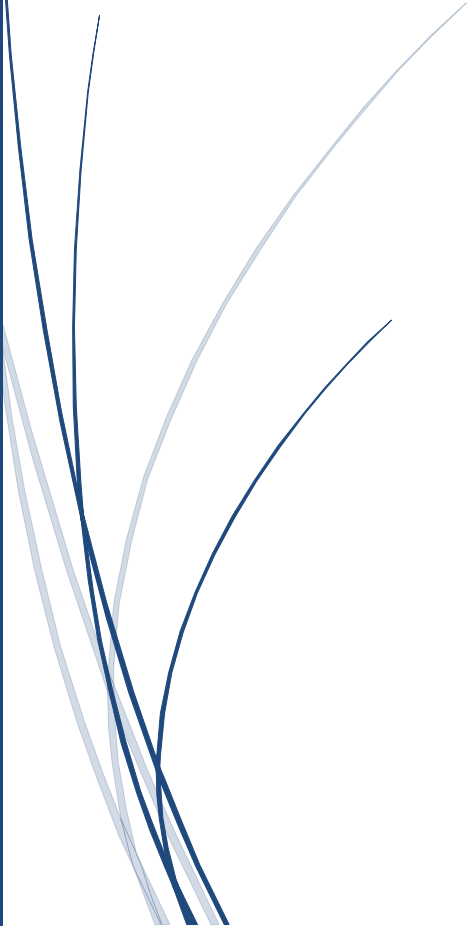




2014.09.08.

Adósságkezelési Modellek

Nemzetközi módszertani
összefoglaló



Fegyveres György, Bebes András
ÁLLAMADÓSSÁG KEZELŐ KÖZPONT ZRT.

Tartalomjegyzék

1	BEVEZETÉS	1
2	MÓDSZERTANI KÉRDÉSEK	4
3	KIINDULÓ HELYZET	8
3.1	A DÖNTÉSI IDŐTÁV ÉS AZ ADATSOROK JELLEGE	8
3.2	A KEZDŐPORTFÓLIÓ ÉS AZ ADÓSSÁGMŰVELETEK	8
3.2.1	A valós és az egyensúlyi (hipotetikus) kezdő portfólió	8
3.2.2	Adósságállomány mátrix.....	9
4	AZ ADÓSSÁGPORTFÓLIÓT LEÍRÓ MUTATÓSZÁMOK.....	11
4.1	FINANSZÍROZÁSI SZERKEZETEK	11
4.2	KÖLTSÉGEK	11
4.2.1	Költségeloszlás, költségfüggvény	12
4.2.2	Költségtípusok	13
4.2.3	Kiemelt külföldi példák a költségek figyelembe vételére.....	15
4.3	KOCKÁZATI MUTATÓK.....	15
4.3.1	A kockázatok leírása	16
4.3.2	Kockázattípusok.....	17
5	A NEMZETKÖZI GYAKORLATBAN ALKALMAZOTT MODELLEK.....	20
5.1	A GAZDASÁG ÁLLAPOTÁNAK MODELLEZÉSE	20
5.1.1	Gazdasági ciklus	20
5.1.2	Finanszírozási szükséglet.....	22
5.1.3	Kibocsátási rés, GDP növekedés	24
5.1.4	Infláció	24
5.1.5	Rövid és hosszú távú kamatok.....	25
5.1.6	Devizaárfolyam.....	26
5.2	HOZAMGÖRBE MODELLEK	26
5.2.1	Az affin, a NS típusú és a HJM hozamgörbe modellek.....	27
5.2.2	Görbeillesztéses hozamgörbe modellek	32
5.3	PARAMÉTEREK BECSLÉSE, ELŐREJELZÉS.....	36
5.3.1	Mintaújravételezési eljárások	36
5.3.2	Paraméterbecslés	37

5.3.3	Előrejelzés.....	40
5.4	HOZAMGÖRBE MODELLEK CSOPORTOSÍTÁSA ÉS ÖSSZEHASONLÍTÁSA.....	41
5.4.1	Elméleti és empirikus modellek	41
5.4.2	Az összehasonlítás elemei	42
5.5	OPTIMALIZÁLÁS.....	43
5.5.1	Markowitz-féle portfólió elmélet.....	43
5.5.2	Az optimalizálási probléma	44
5.5.3	Az optimalizálás és annak egyszerűsítése	45
6	A MODELLEK ÉRVÉNYESSÉGE ÉS VIZSGÁLATA.....	50
6.1	MODELLKOCKÁZAT	50
6.2	MODELLSZELEKCIÓ.....	50
6.3	AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT KERESZTVÁLIDÁCIÓ.....	51
6.4	A MODELL ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK TOVÁBBI VIZSGÁLATAI.....	52
6.5	A FOLYAMATOKAT ÉRT SOKKOK ÉS AZ AZOKRA ADOTT VÁLASZOK.....	54
6.5.1	Sokkok.....	54
6.5.2	Impulzusválaszok.....	55
6.6	DIAGNOSZTIKAI TESZTEK	56
7	KÜLFÖLDI MODELLEK BEMUTATÁSA	57
7.1	AUSZTRIA	57
7.2	BELGIUM	57
7.3	BRAZÍLIA	58
7.4	BRUNEL EGYETEM	60
7.5	COMMONWEALTH SECRETARIAT	61
7.6	DÁNIA	61
7.7	EGYESÜLT KIRÁLYSÁG	62
7.8	FRANCIAORSZÁG.....	65
7.9	KANADA	66
7.10	OLASZORSZÁG.....	67
7.11	SVÉDORSZÁG	68
7.12	TÖRÖKORSZÁG	70
8	ÖSSZEGZÉS	72
	FELHASZNÁLT IRODALOM	74
	FÜGGELÉK A: MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ	77
	AUTOREGRESSZÍV- ÉS VEKTORAUTOREGRESSZÍV FOLYAMATOK	77
	ÁLLAPOTTÉR MODELL.....	77

DURATION	77
(HÁTRALÉVŐ) ÁTLAGOS FUTAMIDŐ.....	78
KONVEXITÁS.....	78
ÁTÁRAZÓDÁS ÁTLAGOS IDEJE	79
SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK	79
VALUE-AT-RISK TÍPUSÚ MUTATÓK	79
WIENER-FOLYAMAT (BROWN-MOZGÁS)	80
FÜGGELÉK B: AZ ADÓSSÁGKEZELŐK BENCHMARK ÉRTÉKEI.....	81
AZ ÁKK ÁLTAL HASZNÁLT, 2013-RA VONATKOZÓ BENCHMARK ÉRTÉKEK	81
A KÜLFÖLDI ADÓSSÁGKEZELŐK ÁLTAL HASZNÁLT BENCHMARK ÉRTÉKEK ÖSSZEFOGLALÓ TÁBLÁZATA	81
FÜGGELÉK C: A KÜLFÖLDI MODELLEK ÖSSZEFOGLALÓ TÁBLÁZATA.....	82
TÖRÖKORSZÁG, DÁNIA, KANADA	82
SVÉDORSZÁG, EGYESÜLT KIRÁLYSÁG, FRANCIAORSZÁG.....	86
OLASZORSZÁG, BRAZÍLIA.....	90
FÜGGELÉK D: ORSZÁGOK ADÓSSÁGPORTFÓLIÓJÁNAK MUTATÓI.....	94

1 Bevezetés

Az Államadósság Kezelő Központ az akkoriban legkorszerűbb kockázatkezelési technikának megfelelően egy optimális portfóliómodellt dolgozott ki 2001-2003 során, amelynek eredményeire alapozva kerültek meghatározásra 2004 végétől az adósságportfólió szerkezetére vonatkozó benchmarkok. Az ÁKK e benchmarkok – elsősorban a forint-deviza megoszlás és azokon belül a fix-változó kamatozás megoszlás – folyamatos teljesítésével érte el, hogy az adósságkezelés mind költség, mind kockázat szempontból elfogadható adósságszerkezetet alakítson ki, és ezáltal teljesüljön az elsődleges stratégiai cél, a hosszú távon alacsony költségek és kockázatok melletti finanszírozás. A 2007-2008-ban kezdődött válság hatásai azonban elavulttá tették az addig használt benchmark modellt annak köszönhetően, hogy olyan szintű paradigmaváltás következett be a pénz- és tőkepiacokon, amely következtében a modell szélsőséges eredményeket adott, ezek azonban már nem voltak elfogadhatók költség-kockázat szempontból. A hozam- és devizaárfolyamok volatilitása megnőtt, leszűkült a magyar forint- és deviza-forrásbevonás költsége közötti különbség, kikerült a tervezési időhorizontról a korábban hozamkonvergencia-feltételként beépített EMU-csatlakozás, új kockázatként jelent meg a magas külföldi tulajdon a forintpiacon, és nem közvetlenül adósságkezelési okokból bekerült a portfólióba a nagy mennyiségű – és átmenetileg kedvező költségű – devizaadósság (IMF-EU csomag). Ezen és hasonló változások miatt a meglévő benchmark modell egyes eredményeinek alkalmazását az ÁKK 2009-től felfüggesztette. Ezzel kapcsolatban kilátásba került az optimális portfólió modell új alapokra helyezése, tekintettel arra, hogy a régi modell továbbfejlesztése nem bizonyult járható útnak.

A modell felülvizsgálatának és annak eredményei alapján a teljesítménymutatók módosításának (újak kidolgozásának) szükségességét az Állami Számvevőszék is jelezte az ötéves adósságkezelési ellenőrzésének jelentésében¹ a Nemzetgazdasági miniszternek tett javaslatok között. Az ÁSZ javaslata az volt, hogy ennek során az ÁKK vegye figyelembe a jelenlegi nemzetközi tapasztalatokat is. Ez természetesen megfelel az ÁKK szokásos gyakorlatának, a nemzetközi tapasztalatokból az ÁKK az államadósság-kezelés minden részterületén folyamatosan törekszik a legjobb megoldások („best practice”) átültetésére a hazai gyakorlatba.

Az ÁKK Kockázatkezelési Főosztálya áttekintette, hogy a nemzetközi szakirodalomban milyen módszertanok találhatók az optimális portfólió modell kialakításának részterületeire (pl. hozamgörbe becslés, optimalizálási eljárások), ezek alapján a külföldi gyakorlatban milyen optimális portfólió- illetve kibocsátási modelleket alkalmaznak egyes államadósság-kezelő intézmények, és – amennyiben ilyen célra felhasználják a modellek eredményeit – milyen benchmarkokat alakítanak ki ezen eredmények alapján.

A vizsgálat eredményeként elmondható, hogy

¹ Jelentés az államháztartás központi alrendszerének adóssága és éven túli kötelezettségvállalásának ellenőrzéséről (2012).

- bár korábban növekvő népszerűségnek örvendtek az ilyen modellek, a válság hatására több ország is revidálta a sztochasztikus modellek használatát, de legalábbis a modellek eredménye alapján nem határoz meg benchmarkokat az adósság vagy a kibocsátások szerkezetére;
- a modellezés matematikai eszköztára nagyon széles és nem létezik egyetlen kitüntetetten jó megoldás, így az egyes országok folyamatosan elemzik a különböző módszereket, keresve a modellek javítási lehetőségeit;
- az optimális portfólió modellek a legtöbb ilyen használó ország esetében makrováltozókat is modelleznek, miáltal növekszik a modellek komplexitása, azonban jobban modellezik az adósságkezelést alakító tényezőket;
- a modellek kialakítása több évet vesz igénybe és azt követően is folyamatosan alakítják azokat;
- sok modell nem ad egyértelműen felhasználható eredményt, azaz nincs vagy nem sikeres az optimalizálási fázis.

Mindazonáltal, a szakirodalom és a külföldi gyakorlat alapján meghatározható azon részmodellek és eljárások köre, amelyet az ÁKK-nak is szükséges megvizsgálnia az új hazai modell készítése során. Jelen anyagban ismertetjük a modellezés jellemző kérdésköreit, lépéseit és az egyes fejlett modellel rendelkező országok modellalkotási gyakorlatát, modelljeik jellemzőit.

Tekintettel arra, hogy az egyes országok gyakorlatának megfigyelése önmagában nem ad elegendő információt az új optimális adósságportfólió modell követelményeiről, illetve célszerű kialakítását illetően, az ÁKK készített több belső tanulmányt is a modellezési szakirodalomban található (matematikai szempontú) módszertanokról (hozamgörbe modellek, optimalizálás stb.). Az ÁKK által az új modellben használandó megoldásokat az új modell kialakítását bemutató anyag fogja ismertetni, tehát ez a tájékoztató anyag még nem foglal állást egyik vagy másik eljárás mellett, csak feltérképezi a külföldi gyakorlatot.

Az új optimális adósságportfólió modell kialakításával kapcsolatban az mindenesetre elmondható a külföldi példák alapján, hogy a modell kialakítása bonyolult, magas szintű matematikai tudást igénylő folyamat. Az új modell első verziójának kidolgozását többéves kutató és fejlesztői munka előzte meg, ezt követte a modell finomhangolása.

Alapvetően két modell típust lehet megkülönböztetni, a determinisztikus és a sztochasztikus szimulációs modellt. Előbbi esetén van egy alapesete a lényeges változók alakulásának és a kockázatot az előre definiált sokkhatások miatti eltérések jelentik. Ennek a módszernek az előnye az eredmények könnyű értelmezhetősége és interpretálhatósága, azonban a sokkok irányát és nagyságát önkényesen határozza meg, illetve a változók közti kölcsönhatásokat lehetséges, hogy nem jól írja le. A legtöbb adósságkezelő ezért a sztochasztikus szimulációs modelleket alkalmazza, melyek leginkább abban térnek el az előzőtől, hogy itt már a véletlennek is van szerepe. Ezeknél a modelleknél szükséges a kezdő portfólió meghatározása, a jövőbeli finanszírozási szükségletekre és szerkezetekre vonatkozó feltevések megléte, a kibocsátás mennyiségének és az egyes papírok pénzáramlásainak számítási módszertana és végül a modell alapjául szolgáló változók generálásának módszertana. A szimuláció folyamán a világ lehetséges (általában több ezer) megvalósulásait állítjuk elő. E modellek eredményei a különböző költség és kockázat mérőszámok, illetve azok tapasztalati valószínűségi eloszlásai

(lásd alább). Ezekre a szimulációs modellekre lehetséges optimalizációs modelleket építeni, amik egy előre adott célfüggvényhez, korlátok kielégítésével határozzák meg az optimális finanszírozási szerkezetek halmazát, az utóbbi fogalom definiálása azonban nehézkes lehet (Bolder és Rubin 2007). Bolder és Deeley (2011) munkájában egy hasonló szimulációs, optimalizációs modellt mutat be.

A szimulációs modelleket további csoportokra bonthatjuk aszerint, hogy miket tekintünk endogén változónak, azaz miknek a fejlődését számolja a modell. Első esetben a makrogazdasági változókat (például a GDP növekedése, infláció, elsődleges egyenleg) előre adottnak (exogénnek) tekintik. Ilyen modelleket alkalmaz például a dán, az osztrák és a portugál adósságkezelő. A másik lehetőség, hogy a pénzügyi- és a makrováltozók is endogének, azaz a modellben változik az értékük, ezáltal vizsgálni lehet azok egymásra való hatását is. A svéd, kanadai és angol adósságkezelő ezt a típust használja, a brazil adósságkezelő pedig ötvözni próbálja a kettőt.

A költség-kockázat optimalizáció segítségével elviekben meghatározhatóak benchmarkok, azaz a portfólió fő mutatószámainak olyan numerikus célértékei, amik kijelölik a kívánt kibocsátási szerkezetet, ám számos esetben az optimalizációnak nincs egyértelmű eredménye. Ilyen benchmark értéket lehet meghatározni például a devizaadósság arányára a teljes adósságon belül, a fix, változó és inflációindexált adósságelemek arányára, a rövid (éven belül) lejáró adósság arányára, az éven belül átárazódó adósság arányára vagy a durationre.

2 Módszertani kérdések

Az államadósság-kezelés fő célja a hosszú távon alacsony költségek és kockázatok mellett való finanszírozás, és az olyan adósságszerkezet kialakítása, ami lehetővé teszi ezt. A feladatot többek között az teszi nehezzé, hogy a költségek és a kockázatok között gyakran átváltás van, azaz egy kisebb költségű megoldás magasabb kockázatot hordoz (pl. a rövid futamidejű finanszírozás sokszor olcsóbb, viszont magasabb kamat- és megújítási kockázatot hordoz), így meghatározott preferenciák melletti optimalizációra van szükség. A problémát tovább bonyolítja, hogy míg a költségek mérése egyszerűbb, a kockázatok mérése és előrejelzése nagyon komplex, tekintettel arra, hogy a piaci környezet megváltozását nem lehet előre látni, csak becsülni. A válság hatására strukturális törés, paradigmaváltás következett be, így kezdetben nem állt rendelkezésre elég adat a jövőre nézve a kockázatok pontosabb becsléséhez. E problémák megoldásához komoly pénzügyi-matematikai eszköztárat kell alkalmazni a modellezés során, és szükséges a modell folyamatos tesztelése.

Az adósságportfólió optimalizálása esetén azt keressük, hogy milyen finanszírozási szerkezet mellett lesznek legalacsonyabbak a költségek úgy, hogy a kockázatok is a megfelelő szinten maradjanak. Az optimalizáció alapján a modelleket megkülönböztethetjük aszerint, hogy csak az adósságportfólió szerkezetére adnak eredményt, nem tekintve a kibocsátásokat és az időközbeni finanszírozási igényt, vagy pedig egy optimális kibocsátási szerkezetet határoznak meg, és ebből adódik a vizsgált időszak végén az optimálisnak tekinthető portfólió.

A modellek számos további kérdéskör mentén alakíthatók ki. A modellezési feladat megoldásához a modell kiindul egy adósságportfólióból, itt azonban több lehetőség van aszerint, hogy a valós, illetve valamilyen hipotetikus portfóliót használunk-e a költség-kockázat elemzéshez. Szintén eldöntendő kérdés, hogy a nem piaci adósságot (például a nemzetközi szervezetektől felvett hiteleket) is belevegyük-e a portfólióba, ezek tulajdonságai (elsősorban költségei) ugyanis sokszor egyediak, és eltorzíthatják az eredményeket. A kibocsátást is tekintő modellek további inputja a finanszírozási szükségletek (költségvetési hiány vagy többlet) sorozata. Egy időszak során emellett refinanszírozási szükséglet is felmerül a lejáró instrumentumok miatt, így ezt is fedezni kell új kibocsátásokkal. A kibocsátandó instrumentumok futamidejére a tervezési időszak hossza is hatással van, ugyanis a rövidebb futamidejű papírokat esetlegesen többször meg kell újítani az időhorizont során (ez több kockázatot is rejt magában). A finanszírozási szükségletek kielégítésére finanszírozási szerkezeteket² kell meghatározni, és ezek közül kell kiválasztani a döntéshozó számára optimális költség-kockázat jellemzőjűt. Eldöntendő kérdés továbbá, hogy mit tekintünk költségnek. A kamatkidadások tekinthetők pénzforgalmi vagy eredményszemléletben is, és az is egy kapcsolódó kérdés, hogy a modell hogyan határozza meg az egyes kifizetések időpontját.

² A nemzetközi szakirodalom alapján az anyagban finanszírozási szerkezetnek nevezzük a kibocsátási szerkezetről való döntést, azaz, hogy az adott mennyiségű bevonandó forrást milyen megoszlásban és ütemezésben teljesítsen az adósságkezelő (hazai és külföldi devizába való finanszírozás, fix vagy változó kamatozású elemek, az egyes instrumentumtípusok, futamidők aránya stb.) Ennek hazai megfelelője leginkább a finanszírozási terv, azonban itt nem csak egyéves, hanem a modellezési időhorizonton való tervezés szükséges.

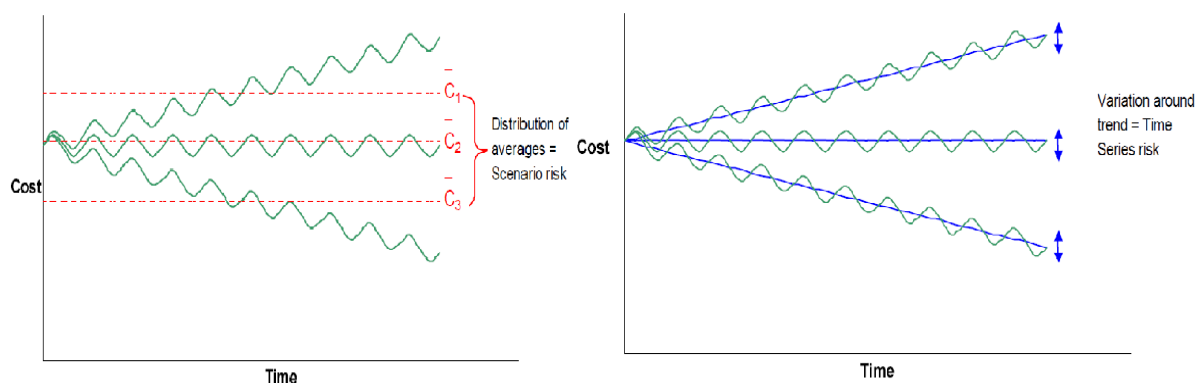
A költségek számítása a jövőbeli kamatlábak (és devizaadósság esetén a devizaárfolyam) becslését követeli meg, azonban megszámlálhatatlanul végtelen sok a lehetséges hozamgörbe és devizaárfolyam alakulások száma. Emiatt a modellépítés leglényegesebb momentuma egy olyan hozamgörbe modell kidolgozása, ami visszaadja a legfontosabb empirikus tulajdonságokat és emellett konzisztens a pénzügyi összefüggésekkel is. Ahhoz, hogy minden időpillanatra meg tudjuk határozni a hozamgörbét, szükséges annak fejlődését (időbeli változását) is ismerni. A hozamgörbe-modellek ezért részletes vizsgálat tárgyát képezik a modell kialakítása során.

A modell komplexitását növeli, hogy a hozamgörbékre hatnak különböző makrogazdasági változók is (például infláció, jegybanki alapkamat, gazdasági konjunktúra állapota), így különböző modellek lehetségesek, amik a makrogazdaság modellezését is tartalmazhatják.

Egy hozamgörbe modell esetén elméleti elvárás lenne, hogy mind a keresztmetszeti (egy időpontra vonatkozóan az illeszkedés), mind az idősoros elemzésben (a hozamgörbe fejlődésének leírása) egyaránt jól teljesítsen, azonban a hozamgörbe modellek vagy az egyik, vagy a másik követelményt tudják csak megfelelően kielégíteni, és ezáltal sokszor nem adnak használható eredményeket. Másik probléma, hogy attól, hogy egy modell jól illeszkedik a megfigyelt, mintabeli adatokra, nem biztos, hogy a mintán kívüliekre is megfelelő eredményt ad, továbbá lehet gyenge a hozamok előrejelzésében is. Az eredményeket a paraméterek helyes megválasztásával lehet javítani, ezek becsléssel vagy kalibrálással határozhatók meg. A kalibrálás esetén újra döntési helyzetbe kényszerülünk a jövő alakulásának tekintetében, míg a becslés időigényes lehet.

Mivel a hozamgörbét nem tudjuk teljes bizonyossággal megadni, így az elemzéshez szimulálnunk kell azokat. A generált hozamgörbék száma esetén több szempontot is figyelembe kell venni, egyrészt nem lehet túl sok, mert az időigényes, másrészt pedig a szimulációnak stabilnak is kell lennie, azaz ha ugyanazokkal a bemenő adatokkal futtatjuk, akkor nem adhat lényegesen eltérő eredményeket. Így a költségek kapcsán is csak valószínűségi eloszlásról, és annak várható, átlagos értékéről lehet beszélni.

A jövőbeli bizonytalanság miatt fellépő kockázatokat két irányból közelíthetjük meg. Egyrészt vizsgálhatjuk a lehetséges megvalósulások szóródását egy hosszabb időszak alatt (szcenárió kockázat), ezt a svéd adósságkezelő az átlagköltségek eloszlásán keresztül méri. Másrészt nézhetjük az egyedi megvalósulások mellett az éves költségek trendtől való eltérését (idősor kockázat). Kockázatkezelési szempontból rövid távon az idősor, míg hosszú távon a scenárió kockázatot érdemes kezelni. A következő ábra ezt a két megközelítést szemlélteti, a bal oldali a scenárió kockázat, míg a jobb oldali az idősor kockázat.



1. ábra A költségek szcenárió és az idősor kockázata (Forrás: Bergstrom, P., Holmlund, A. és Lindberg, S. (2002): The SNDO's Simulation Model for Government Debt Analysis, 29. o.)

A következő lényeges kérdés, hogy milyen mutatókkal mérjük a modellezés során a kockázatokat, ugyanis ezek is meghatározzák a kialakuló optimális finanszírozási szerkezetet, illetve a portfólió végső szerkezetét is. Ez megmutatkozik például a rövid és hosszú lejáratú adósság közti választásban, ugyanis a rövid oldalon való finanszírozás volatilisabb a többszöri megújítás miatt, míg a hosszú oldalon való finanszírozás pozitív meredekségű hozamgörbe esetén költségesebb. A modellben szükséges meghatározni azt is, hogy milyen korlátokat állítsunk fel a kockázatokra vonatkozóan (pl. duration, adósság lejárat szerkezete stb.). A piaci és megújítási kockázaton kívül még a likviditási kockázatot is célszerű lehet kezelni.

A modell bemenő adatokat is felhasznál, ezek hatékony tárolási módját is szükséges kialakítani, a portfóliót alkotó eszközök például folyamatosan változnak az idő folyamán, és mivel rendszeresen felhasználásra kerülnek, így lassíthatja a futtatást, ha ezeket nem megfelelően kezeljük. A szimulált folyamatok paramétereinek becslése elsősorban historikus adatok alapján történik, így probléma merülhet fel, ha azok nem megfelelőek. Ez következhet abból, ha hiányosak, nem áll rendelkezésre kellő hosszúságú idősor vagy pedig strukturális törés következett be abban. Szintén problémát jelent, ha a felhasznált mutatószámok számítási módszertanában változás történt.

A felsorolt lehetőségek alapján is látható, hogy a számos modell létezik egymás mellett, nincs egyértelműen legjobb adósságportfólió modell. A külföldi irodalomban sincs egyértelműen kitüntetett módszer, még a részfolyamatokra (pl. hozamgörbe becslés) sem. Ez annak is betudható, hogy eltérőek az országok adottságai, különböző az adósság szerkezete (például a devizában fennálló adósság részaránya), és így más szempontokra helyezik a hangsúlyt. Mindazonáltal az ÁKK építhet a külföldi adósságkezelők tapasztalataira, megvizsgálhatja, hogy az egyes modell-kialakítások, módszertanok relevánsak-e a hazai államadósság és adósságkezelési gyakorlat tekintetében, és így alapját képezhetik-e az új modellnek. Ennek érdekében az alábbiakban bemutatjuk a fejlett modellel rendelkező országok modellalkotási gyakorlatát, és a nemzetközi szakirodalom alapján is ismertetjük a modellezés részterületeihez (hozamgörbe-becslés, szimulációs módszerek, optimalizálás stb.) kapcsolódó eljárásokat. A modellalkotási gyakorlat különböző szempontok szerinti bemutatása után az egyes országok modelljeit tekintjük át. Az ÁKK által az új modellben használandó megoldásokat majd az új modellt bemutató anyag fogja ismertetni.

A továbbiakban szó esik a kezdőportfólió és az időtáv kiválasztásáról, a portfólió jellemzésére szolgáló költség, kockázati és adósságszerkezeti mutatószámok lehetőségeiről.

Ezután az *A nemzetközi gyakorlatban alkalmazott modellek* részben bemutatjuk a lehetséges változók szimulálásának lehetőségeit, majd a központi szerepet betöltő hozamgörbe modelleket. Szót ejtünk a leginkább időigényes részéről a modellnek, az optimalizálásról és annak egyszerűsítéseiről. Végül bemutatunk néhány módszert, amellyel ellenőrizni lehet a modell egészének alkalmazhatóságát, stabilitását és relevanciáját.

3 Kiinduló helyzet

3.1 A döntési időtáv és az adatsorok jellege

A döntési időtáv megválasztásánál lényeges szempont, hogy megfigyelhetőek legyenek a költség és kockázat tulajdonságok, illetve az alkalmazott finanszírozási szerkezet közép- és hosszútávú hatása. Választhatjuk úgy, hogy az időtáv összhangban legyen valamelyik eszközcsoport (például hazai kibocsátású eszközök), vagy a teljes portfólió átlagos lejáratával. Másik lehetőség, hogy az időtávot a leghosszabb futamidejű kötvényhez igazítjuk, ezzel azonban az a probléma, hogy ilyen hosszú távon csak nagy hibával lehet becsülni a háttérben meghúzódó állapotváltozókat (a rendszer állapotát leíró változókat). Az előző szempontok mellett figyelembe kell venni az adatok minőségét is, így azok hiánya vagy változékonysága (rendszeraváltás, válság, strukturális törés, módszertani váltás) is rövidítheti a döntési időtávot. A török adósságkezelő (Balibek és Memis 2012) például a 2002-es rezsimváltás miatti rövid adatsor folytán előre tekintve is viszonylag rövidebb időszakot, 5 éves döntési időtávot választott. Az adatokban felmerülő töréspontok vizsgálatára az ún. Chow töréspont teszt használható, ez azt vizsgálja, hogy az adatsor két részhalmazán elvégzett paraméterbecslés statisztikailag ugyanazokat az eredményeket adja-e. Ez alapján eldönthető, hogy kezelhetjük-e egységesen az idősort, vagy inkább több részre kell azt bontani. Az adatok gyakorisága esetén figyelembe kell venni, hogy nem mindenből érhetőek el adott gyakoriságú értékek. A szimulálás esetén lehetséges, hogy például a mögöttes változókat sűrűbben (pl. havonta) szimuláljuk, de a kibocsátások csak ritkábban (pl. negyedévente) történnek

3.2 A kezdőportfólió és az adósságműveletek

A költségelemzés szempontjából lényeges, hogy milyen kezdőportfólióból indulunk ki. Erre két lehetőség van, vagy a valós, fennálló portfóliót használjuk, vagy pedig egy hipotetikus, a feltételeket és korlátokat már kezdetben kielégítő (egyensúlyi vagy állandósult). Ez függhet attól, hogy az optimális stratégiát milyen szempontból határozzuk meg, azaz az így kialakuló végső portfólió szerkezetét és mutatószámait, vagy pedig az időtáv alatti kibocsátások összetételét célozza a modell. További eldöntendő kérdés, hogy a hiteleket (különösen a nem-piaci, kedvezményes kamatozású hiteleket) is a portfólió részének tekintsük-e, a török (Balibek és Memis 2012) adósságkezelő például a hiteleket a modellezett portfólión kívül kezeli.

3.2.1 A valós és az egyensúlyi (hipotetikus) kezdő portfólió

A kanadai adósságmodellben (Bolder 2003; Bolder és Deeley 2011) a kibocsátáskor az egyes eszközök aránya előre meghatározott konstans az idő folyamán (időben változó súlyok túlságosan komplex modellt eredményeznének, habár Balibek és Memis (2012) tanulmányukban éven belül állandó, évek között változó arányokat említenek), és ezek az arányok változnak a különböző stratégiák mentén. A fiktív kezdőportfólió esetén nem kerül költségbe a célértékek kezdeti elérése. Ahhoz, hogy az időszakok során ebben az állandósult állapotban maradjunk, szükséges, hogy csak az új adósság kibocsátása történjen a

finanszírozási szerkezetnek megfelelően, a lejáró papírokat ugyanolyan futamidejű eszközökkel kell fedezni.

Új kibocsátásokra akkor van szükség, ha finanszírozási szükséglet azaz hiány van. Szufficit esetén ez a szükséglet negatív, így el kell döntenünk ennek a kezelési módját is. Egyik lehetőség, hogy kincstárjegyekből megengedünk negatív állományt (tehát mintha betétünk lenne), míg a másik, hogy a kibocsátáskori arányok előjele attól függ, hogy hiány vagy többlet van-e. A likviditás fenntartása érdekében a benchmark kötvényekből kellő nagyság szükséges, ezért annak **lejáratakor** túl nagy mennyiséget kell megújítani. Ezt több időszakon keresztül **rábocsátással** oldják meg. Egy új kötvény kibocsátása névértéken vagy akörül történik, rábocsátás esetén ugyanaz a lejárat és a kupon, azonban a megváltozott piaci körülmények miatt a kibocsátási árfolyam már jelentősebben eltérhet. Az emiatti diszkont vagy prémium kezelése (amortizálása a lejáratig) túl komplex modellt eredményezne, így Bolder és Deeley (2011) a következőt teszik fel. Az újranyitott kötvények csupán a lejáratban egyeznek meg, a kupont úgy kell meghatározni, hogy a kibocsátás névértéken történjen (ezáltal automatikusan amortizálódik). Így az olyan kötvények, amikből történik rábocsátás, ugyanolyan lejáratú, de eltérő kuponú kötvények portfóliója. A lejáratok és az ezt finanszírozó, hosszabb idő alatt történő kibocsátások időbeli eltérése az egyensúlyi állapottól való kilengéseket okoz. Annak kezelésére, hogy míg a tőkekiadás egy időpillanatban merül fel, de annak a fedezete több időszakon keresztül áramlik be, szükséges kincstári készpénz számla, amivel ezt az időbeli elcsúszást megoldják. A KESZ-en lévő likviditáshoz is kapcsolódnak bevételek és költségek, ezek azonban országonként eltérőek a KESZ-en lévő állomány kamatozási módja miatt.

Az egyensúlyi portfólió (azaz az elérendő portfólió összetétel) használatával jobban elkülönülnek finanszírozási szerkezetenként az időszak eleji költségek is, ugyanis ekkor a költségfüggvény a finanszírozási szerkezeten keresztül függ a kezdő portfóliótól. Hátránya azonban, hogy nem egyértelmű a hipotetikus portfólió származtatása a valós portfólióból és az sem, hogy egyáltalán felhasználjuk-e a valós kötvényeket.

A svéd modell (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) meghatároz duration célt, így úgy történik a kibocsátás, hogy ne sérüljön ez a célérték, nem pedig fix súlyokkal. Ha a fix és a változó kamatozású papírok aránya (vagy a devizás részarány) a célérték, akkor lehetséges, hogy swapolással érjük el a kívánt induló portfóliót. Ekkor kérdés, hogy mely eszközöket és milyen arányban swapolja el a modell (pl. csak a fix vagy csak a változó kamatozásúakat swapoljuk el vagy minden eszköz ugyanakkora hányadát cseréljük el). A valós portfólió előnye, hogy úgy a portfólió átstrukturálódásából (a kezdő portfólióból a finanszírozási szerkezet által meghatározott egyensúlyiba való átmenet) adódó költségeket is figyelembe vesszük (és így az aktuális piaci körülményeket is), illetve azt is, hogy egy ekkora portfólió szerkezetét nem lehet rövid időn belül megváltoztatni.

A valós portfólió használatával nem kell figyelni az egyensúlyra, így ekkor a lejáró adósságot is a stratégiának megfelelő súlyok szerint lehet finanszírozni. A két típus között hibrid megoldás lehet, ha külön megvizsgáljuk a hipotetikus és valós portfólió túl nagy eltérése között a szerkezet átalakításának rövid távú stratégiáját.

3.2.2 Adósságállomány mátrix

Ahhoz, hogy a későbbi szimulációk során könnyen és kevés időráfordítással meg tudjuk határozni a kamatfizetéseket, a lejáratokat és a fennálló állományt, ahhoz a modellben a portfólió minden eszközét megfelelő módon kell eltárolni. Erre lehetséges módszer egy adósságállomány mátrix használata, ami egy olyan táblázat, aminek soraiban a különböző pénzügyi eszközök szerepelnek, míg az oszlopaiban a tulajdonságaik (kamatláb, fizetési gyakoriság, devizanem, kibocsátás napja, lejárat napja). A szimuláció során az egyes időközökben ezt a mátrixot kell módosítani, kiesnek a lejárt elemek és frissíteni kell a kibocsátásokkal. Ilyen adósságállomány mátrixot használ például a török (Balibek és Memis 2012) és az olasz (Adamo és mtsai. 2004) adósságkezelő is. Másik lehetséges módszer, hogy a mátrixban minden adósságcsoport tőke- és kamatfizetése szerepel a mátrix oszlopaiban, a sorok pedig az egyes időszakokat jelentik. Minden időszakban kiesnek a lejárt fizetési kötelezettségek, és bekerülnek az új kibocsátások miattiak. Ez a táblázat kevesebb információt tárol el, de kisebb méretű és például a durationt is könnyebb meghatározni, elsősorban a svéd modellben (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) használják ezt.

4 Az adósságportfóliót leíró mutatószámok

Az adósságkezeléssel kapcsolatosan kiemelt jelentőségű a piaci mozgások adósságra vonatkozó hatásának vizsgálata, ezt a különböző finanszírozási szerkezetekhez vagy portfólióösszetételekhez kapcsolódó költségek és a kockázatok számszerűsítésével tehetjük meg. Így definiálnunk kell mutatószámokat és azok számítási módszertanát.

4.1 Finanszírozási szerkezetek

Alapdefinícióként elfogadhatjuk (Renne és Sagnes 2006) megfogalmazását, ami szerint a finanszírozási szerkezet azt a szabályt jelenti, amely szerint az adósságkezelő allokálja a finanszírozási szükségletet az új időszakok esetén a különböző kibocsátott állampapírok között. A finanszírozási szerkezetek többféleképpen is leírhatók, egyrészt meghatározhatók a végső portfólió szerkezetére vonatkozó mutatószámok vagy pedig a kibocsátásban szereplő egyes elemek részarányai (ez ugyanúgy meghatározza az időszak végére kialakuló portfóliót). A kibocsátás kapcsán eldöntendő kérdés, hogy a teljes felmerülő finanszírozási szükségletet a szerkezetnek megfelelő kibocsátással kell fedezni, vagy csak a deficitet (a lejáró papírokat pedig azokkal megegyező kondíciójú kibocsátással kell megújítani). Mindkét esetben fontos szerepe van a lejárat szerinti diverzifikációnak, ugyanis kockázatos, ha a lejáró és így megújítandó adósság az időhorizont egyes pontjaira koncentrálódik. A kibocsátási részarányok meghatározása kétféleképpen történhet (Bolder 2003). A determinisztikus vagy előre meghatározott esetben a kezdőpontban megszabjuk az egyes súlyokat (ezek lehetnek időben állandók vagy változók), ehhez nem szükséges a változók jövőbeli kimeneteleinek ismerete. Ebben az esetben a portfólió szerkezete egyre jobban a finanszírozási szerkezetnek felel meg. A sztochasztikus finanszírozási szabály esetén a tényleges kibocsátás valamilyen, általában a hozamgörbéhez kapcsolódó véletlen változó függvénye, ezek azonban analitikusan nehezen kezelhetők. Ezért célszerű először a determinisztikus szerkezeteket vizsgálni, és ha az nem vezet elfogadható eredményre, akkor áttérni a sztochasztikus lehetőségre.

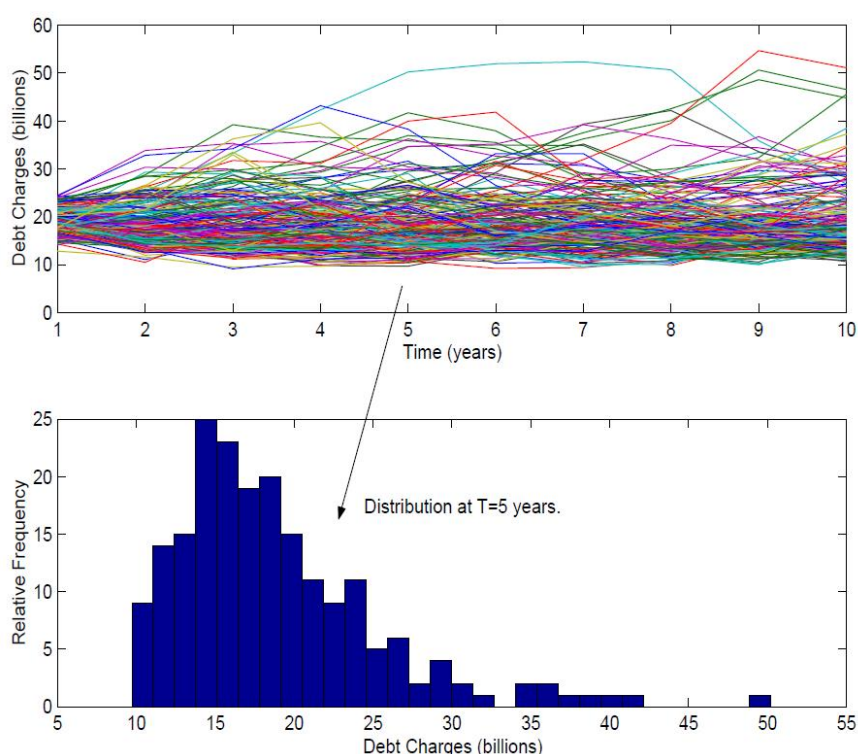
Természetesen nem megengedhető minden szerkezetben például 100%-os súly a három hónapos diszkontkincstárjegyeknek, piaci keresleti korlátnál nagyobb kötvénysorozat kialakítása, vagy túl alacsony likviditású sorozat (a likviditási prémium miatt) kibocsátása sem célszerű. Ennek kezelésére az adósságkezelő preferenciája vagy a reális piaci kereslet alapján ki lehet jelölni a kibocsátási mennyiségekre és súlyokra sávhatárokat, amit vagy abszolút korlátozással vagy büntetőfüggvénnyel lehet a modellbe építeni. Bolder és Deeley (2011), ezeket azonban szubjektivitásuk miatt óvatosan kell kezelni. Az egyes finanszírozási szerkezetek, valamint az ezek eredményeként kialakuló adósságportfóliók eltérő költség és kockázati jellemzővel bírnak, továbbá a finanszírozási szerkezetek hatással vannak a finanszírozási szükségletre is a kamatköltségeken keresztül.

4.2 Költségek

Az államadósság költségének definíciója nem egyértelmű, országonként is eltérhet, például az adósság kockázati szerkezete, az országspecifikus piaci viszonyok, illetve a statisztikai, jogszabályi előírások alapján.

4.2.1 Költségeloszlás, költségfüggvény

A kanadai modell alapján (Bolder 2003) egy adott időpillanatban, a világ egy lehetséges megvalósulása mellett a költségfüggvény az időponttól, a finanszírozási szükséglettől (ez szufficit esetén negatív is lehet), a kezdő portfóliótól, a hozamgörbétől és végül a finanszírozási szerkezettől függ. A szimuláció során minden lehetséges megvalósulás mellett, minden egyes időpontra számítható egy költségérték. Ha egy adott időpontot tekintünk, akkor a különböző lehetséges kimenetek menti költségértékek egy valószínűségi eloszlást határoznak meg. Ezt mutatja be az 2. ábra, ahol a felső részen az adósság költségének lehetséges alakulásait figyelhetjük meg 10 évre előre, míg az alsó részen az 5. évi költségek relatív gyakoriságát, amiből felírható a költségek eloszlása.



2. ábra A költségértékek valószínűségi eloszlása egy adott időpillanatban (Forrás: Bolder, D.J. (2003): *A Stochastic Simulation Framework for the Government of Canada's Debt Strategy* 29. o.)

A sztochasztikus szimulációs modellek esetén az egyes időpillanatokra nem konkrét értékeket, hanem költségeloszlásokat kapunk az egyes finanszírozási szerkezetek mellett. Ezen eloszlásokat vizsgálhatjuk különböző statisztikai mérőszámok alapján, ilyen lehet az átlag vagy a medián (így kiszűrve a lehetséges extrém értékeket). Az eloszlást jellemző többi mutatószámról a kockázatoknál lesz szó.

A költségfüggvény az előző szemléletben minden időpillanatra folytonosan értelmezett, a valóságban azonban a költségek időközönként merülnek fel, ezért diszkrétizálnunk kell (így intervallumonként állandó lesz a függvény). Így meghatározhatjuk az egyes megvalósulások

menti összköltséget³, vagy az éves költségeket is átlagolhatjuk. Ekkor azonban elvesznek fontos információk, az adósságköltség alakulásában lévő esetleges trend, illetve a lejárat szerkezetben lévő kiugrások. A svéd modellben (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) ezt a trendet legkisebb négyzetek módszerével határozzák meg (erre a *Kockázati mutatók* részben található idősor kockázathoz térünk vissza). A kanadai modell a költség megvalósulások alakulásának jellemzésére másik módszert javasol, a feltételes adósságköltség eloszlást (ez a $t + 1$. időpillanati költségeloszlást adja meg, feltéve a t . időpillanati költség értékét). Erre normális eloszlást feltételez, aminek paramétereit elsőrendű autoregresszív folyamattal határoz meg⁴ (ezekről bővebben 4. Matematikai összefoglaló részben lehet olvasni).

A költségek szemléltetésére több módszer áll rendelkezésünkre. Egyfelől tekinthetjük az éves költségeloszlásokat, és ezeket ábrázolhatjuk a különböző, éves időszakokra. Itt is két lehetőség adódik, vagy abszolút (amikor az egyes megvalósulások melletti konkrét értékeket), vagy a relatív költségeket szemléltetjük. Utóbbi esetben több mutatószámhoz viszonyíthatjuk a felmerülő terheket, például az adósság fennálló állományához. Az éves költség értékek összehasonlításával az a probléma, hogy időfüggő, lényeges, hogy hányadik évi költségeloszlást tekintjük. Az idődimenzió kiküszöbölésére kumulálhatjuk az éves költségeket, és ábrázolhatjuk ezeknek az összköltségeknek az eloszlását. Ezt tovább javíthatjuk, ha a költségek jelenértékét nézzük, és ehhez diszkontfaktorokat használunk, ugyanis célszerű különbséget tenni az egy és a tíz év múlva felmerülő költség között. Ez a diszkontfaktor lehet a kezdőpontban lévő zérókupon görbe, vagy pedig egy előre meghatározott diszkonttényező-sorozat. Ezek a diszkonttényezők később az idő folyamán nem változnak, így konzisztens marad a számolás, és összehasonlíthatóak maradnak az eredmények. Bolder és Deeley (2011) tanulmányában három különböző, állandó diszkontfaktor mellett ábrázolták az összköltséget és azt az empirikus eredményt kapták, hogy ekkor csökken az adósságköltségek nagysága és az eloszlás szórása.

Eddig csak trajektóriaként (megvalósulásként) végeztük az elemzést, de a finanszírozási szerkezet között aszerint tehetünk különbséget költség szempontból, hogy az összes realizációt figyelembe véve mekkora az adósság költségének várható értéke. Ezeket az értékeket adott pillanatra, vagy a teljes időszakra vonatkozóan is számíthatjuk.

4.2.2 Költség típusok

Az adósságkezeléssel kapcsolatosan felmerülő legnagyobb költség a **kamatköltség**. Az egy időszakra eső kamatköltséget többféleképpen lehet tekinteni, az első lehetőség a pénzforgalmi szemléletű kamatfizetés, ekkor csak az időszak folyamán ténylegesen kifizetett kamatokot tekintjük. Ezzel szemben eredménysszemlélet esetén a kamatfizetésnek csak a vizsgált időszakra eső időarányos részét vesszük figyelembe. A hazai fizetőeszközben évente fizetendő kamatköltség változhat az egyes meglévő és újonnan kibocsátott papírok állománya, a változó kamatozású papírok kamatlábának megváltozása és a devizában denominált papírok esetén a devizaárfolyam mozgása miatt is.

³ $\sum_{t=1}^T \tilde{c}(t-1, t, \theta, \tilde{X}(t, \omega))$, ahol θ a finanszírozási szerkezet, $\tilde{X}(\cdot, \cdot)$ a gazdasági állapotot leíró folyamat diszkrétizált alakja.

⁴ $f_2(c_{t+1} | \sigma(c_t)) \sim \mathcal{N}(\phi_0 + \phi_1 c_t, \xi^2)$

A következő költségtényező a **devizaárfolyam-mozgásból** adódik. Itt is lehetséges két szemléletmód, a törökök minden évben nyilvántartják a külföldi devizában denominált adósság árfolyamkülönbség miatt változását, míg a svédek csak lejáratkor számolják el költségként. Az így kialakuló költség egyszerűen a névérték és a devizaárfolyam változásának szorzata, ami a hazai valuta erősödésekor negatív kiadásokat, azaz bevételt eredményez.

A harmadik költségtípus a CPI (infláció) **indexált kötvények**hez kapcsolódik. Tőkeindexált kötvény több adósságkezelő portfóliójában is szerepel, a dánok, a franciák, a kanadaiak, az olaszok és a törökök is bocsátottak ki ilyen papírt⁵ (részletes adatok a *Országok adósságportfóliójának mutatói* című mellékletben találhatóak). Az indexálás módszere alapján lehet beszélni angol és kanadai modellről, erről részletesen Farkas, Mosolygó és Páles (2006) tanulmányában lehet olvasni. Az inflációhoz kötött kötvények kétféleképpen hatnak a kamatköltségekre, egyrészt a garantált reálhozamért cserébe a befektetők hajlandók lemondani az inflációs kockázati prémium egy részéről, ami csökkenti a kiadásokat. Másrészt viszont az indexált kötvények illikvid piaca esetén növekednek a kamatkidadások. Az ilyen típusú papíroknál a megemelkedett tőke túl nagy kiadás volna lejáratkor cash-flow szemlélet esetén, ezért érdemes az egyes stratégiákat úgy is megvizsgálni, hogy az inflációs emelkedést felhalmozott szemléletben veszik számításba (vagy másik megoldás lehet a költségek diszkontálása is). A két lehetőség kockázati szerkezetét azonban nem érdemes összehasonlítani, ugyanis a felhalmozott esetben simítjuk a kiadásokat, így csökkentve a kockázatokat. Az eredmények szemléltetésekor az indexált kötvények költségvonzatát és kockázatát hasonlíthatjuk egy azonos lejáratú, nem indexált kötvényhez. A költséghatékonyság elemzésének egy módszere a break-even infláció számítása. Ez az inflációs várakozást is mutatja, definíció szerint azonban „azon éves inflációs ráta, amely mellett a lejáratig megtartott tőkeindexált kötvény (nominális) hozama éppen megegyezik a hasonló lejáratú, lejáratig megtartott hagyományos kötvény nominális hozamával” (Farkas, Mosolygó és Páles 2006). Az infláció-indexált kötvények esetén a hozamgörbe változása mellett a CPI változása is költségtényező, így ilyen papírok esetén a modellben kezelni kell az inflációt is.

További költségtényező új kibocsátások esetén a **kibocsátási ár és a névérték közti különbség**. Az ESA95 számviteli szabályozás alapján az ilyen diszkontot arányosan elosztva kell elszámolni a futamidő alatt. Kérdés, hogy ezt a modellbe is be kell-e építeni, amennyibe eredményszemléletű költségeket tekint a modell, akkor adja magát, hogy a kibocsátáskori árfolyam-különbséget is leossa a modell. Részben ezt a módszert követi az olasz adósságkezelő (Adamo és mtsai. 2004), az egyik lehetőség az éves költségek figyelembe véve az ESA95 szabályozást, míg a másik általuk használt költségfüggvény a diszkontált adósság. Az utóbbi módszertan szerint egy időpillanatra vonatkoztatva számítják ki a költségeket, úgy, hogy erre az időpontra diszkontálják az összes azutáni kiadást. Egy későbbi tanulmányban (Consiglio és Staino 2012) a teljes költséget a pénzbeli költségek (kupon- és tőkefizetések) és azon kötvények diszkontált értékének összegeként határozzák meg, amik nem járnak le a tervidőszak végéig.

Egyes országok gyakorlata, hogy swapműveletekkel változtatják a fix és változó kamatozású adósság, illetve a devizaadósság arányát, illetve a devizamegoszlást. Így ezen országok (például Ciprus, Franciaország, Litvánia, Portugália és Spanyolország) esetén a

⁵ Részletesen lásd a *Országok adósságportfóliójának mutatói* című mellékletet.

swapköltséget is figyelembe kell venni. Azon adósságkezelők esetén, amelyek aktív résztvevők a másodlagos piacon (visszavásárlás, csere), az **adósságportfólió piaci értékének** változása is jelentős költségokozó lehet, ugyanis az ilyen műveletek az adósság aktuális piaci árán történnek.

4.2.3 Kiemelt külföldi példák a költségek figyelembe vételére

A svéd modellben (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) a felmerülő költségekre három tényező hat, (1) a kuponfizetések hazai devizában, (2) lejáratkor a devizaárfolyam-különbözet vagy az indexált kötvények esetén a felhalmozott infláció és (3) a fennálló kötvények visszavásárlása. A modell ezenkívül megkülönböztet nominális és reálköltségeket egyaránt. Előbbi esetén csak a tényleges pénzforgalmat jelentő költségeket összesítik, nem veszik figyelembe a deviza és az inflációhoz kötött értékpapírok értékváltozását. A reálköltségeket ebből úgy számolják, hogy a nominális költségeket elosztják a nominális GDP-vel⁶. Ezután tekintik az éves reálköltségek átlagát (30 jövőbeli éves adat alapján), majd a vizsgált stratégia várható költségét az 1000 szimuláció melletti átlagos reálköltségek mediánjaként kapják.

A brit modellben (Pick és Anthony 2006) a költségeket cash flow szemléletben számítják a nominális kuponfizetések (a nem indexált kötvények kuponfizetése és az indexált kötvények inflációval kompenzált kamatfizetése) és a lejáró infláció-indexált kötvényeken realizált inflációs kompenzáció összegeként. Az adósság költségét ezután kiszámítják a nominális GDP arányában is.

Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy a költségelemzés során a modellek jellemzően nem egy lehetséges jövőképből, hanem a gazdaság állapotát leíró változók eloszlásainak modellezéséből származtatják a jövőbeli költségek eloszlását, és az így kapott eloszlások statisztikai mutatószámait határozzák meg egy adott időpillanatra, vagy az egész időtávra vonatkozóan.

4.3 Kockázati mutatók⁷

Egy adósságportfólió piaci, refinanszírozási és likviditási kockázatoknak is ki van téve. A piaci kockázatokon belül két fő kockázati forrás van, a devizaárfolyam-kockázat és a kamatláb-kockázat. A devizaárfolyam-kockázat a devizaadósság értékére és a fizetett kamatokra van hatással, mértékét swap ügyletekkel lehet csökkenteni a devizaárfolyamok változása következtében. A kamatláb-kockázat abból fakad, hogy a hozamgörbe módosulásával változik a kamatkiadás (költségvetési kockázat) és az adósság piaci értéke (értékkockázat). Ez ellen a hozamgörbe minél pontosabb becslésével és előrejelzésével lehet védekezni, az alkalmazható módszerekről az *Hozamgörbe modellek* fejezetben lesz szó részletesen. A likviditási kockázat a rövid távú fizetőképesség változásának kockázatát jelenti, míg a refinanszírozási vagy megújítási kockázat a lejáró adósság helyébe újonnan kibocsátandó

⁶ $C_i^Y = \frac{\sum_{j=1}^4 C_{i,j}}{\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 Y_{i,j}}$, ahol C_i^Y az éves reálköltség az i . évben, $C_{i,j}$ a felmerülő költség az i . év j . negyedévében, míg $Y_{i,j}$ az éves nominális GDP ugyanebben a negyedévében.

⁷ A mutatószámokról lásd még a A: Matematikai összefoglalót, illetve a külföldi adósságkezelők mutatói a Országok adósságportfóliójának mutatói c. fejezetben találhatóak.

értékpapírok kondíciójában történő változást jelenti. A kockázatokat jellemezhetjük statisztikai mutatókkal, teljesítménymutatókkal, vagy az adósság szerkezetét leíró mérőszámokkal. A kockázatok valamilyen módon történő mérése elengedhetetlen a költség-kockázat szempontú optimalizáláshoz.

4.3.1 A kockázatok leírása

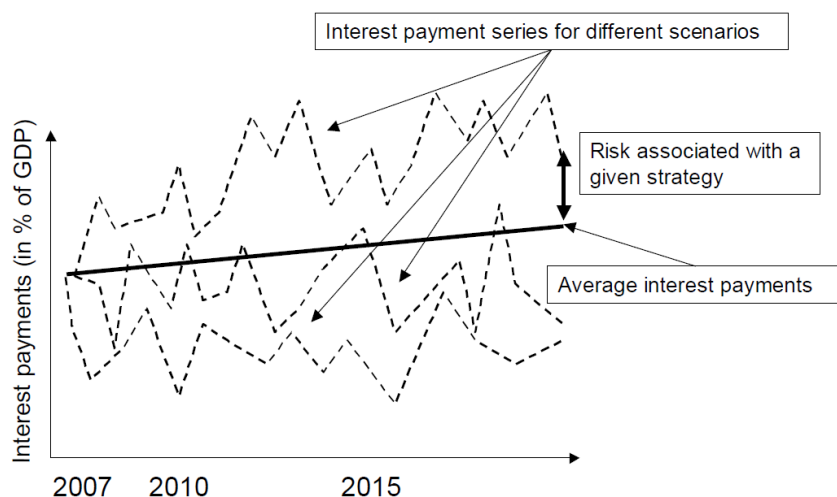
Adott finanszírozási szerkezet esetén, egy adott időpillanatra vonatkozóan az előző részben írtak alapján meghatározható a jövőbeli költségek eloszlása. Ezt az eloszlást a várható értéken kívül jellemezhetjük további mutatókkal, amik a kockázatokat, leegyszerűsítve az e várható értéktől való eltéréseket számszerűsítik⁸. Ilyen mutatószám például az interkvartilis (félterjedelem) vagy a szórás, ezek közül az előbbit kisebb, utóbbit nagyobb mértékben meghatározzák a szélsőséges értékek. Az extrém, ritkán bekövetkező megvalósulások kvalitatív leírására használható az eloszlás csúcsossága és a ferdesége, ezen értékekből arra következtethetünk, hogy az adósság költsége melyik irányba tér el nagyobb valószínűséggel annak várható értékétől. A számszerűleg történő, kvantitatív leíráshoz a kockázatot érték (Value-at-Risk) típusú mutatókat használhatjuk. Ezek összefoglalóan azt mutatják meg, hogy mi az az érték, aminél adott valószínűséggel nem lesz nagyobb az adósság költsége az adott időpillanatban vagy időintervallumban (VaR, Value-at-Risk,), illetve ha ennél nagyobb lesz, akkor várhatóan mekkora lesz ez az érték (CVaR, Conditional Value-at-Risk,). További lehetőség, hogy csupán a kockázatotott értékek várható értéktől (vagy pedig mediántól) való eltérését tekintjük (relatív Value-at-Risk mutatók). Amellett, hogy viszonylag jól jellemzik a költségek farokeloszlását (extrém értékek esetén a valószínűségi változó eloszlása), ezek önkényes mértékek abból a szempontból, hogy a valószínűséget mi választjuk meg (általában 95% vagy 99%).

Mindazonáltal a kockázatotott érték típusú mérőszámok nagyon széles körben elterjedtek a pénzügyi kockázatkezelésben (az adósságkezelés mellett a bankszektorban is), modelljükben CVaR-t használnak például a kanadaiak, az olaszok, a svédek, a dánok, a britek, és a törökök is⁹.

A francia modellben (Renne 2007) különválasztják a pillanatnyi és a kumulált kockázatot, ugyanis kockázat lehet, ha nagy az évenkénti változás, illetve a költségtrajektóriák nagymértékben eltérnek az átlagostól. Előbbi kockázatot a kamatköltségek évenkénti változásának szórásából származtatják, míg a másik az időszak alatti átlagos kamatkiadások Value-at-Risk mutatójából indul ki (3. ábra).

⁸ Az adósságkezelő szempontjából az az egyik fő kockázati elem, hogy a kamatkiadások el fognak térni a tervezettől.

⁹ A Value-at-Risk módszertant részletesen bemutatja a Matematikai összefoglaló rész.



3. ábra A pillanatnyi és a kumulált kockázat szemléltetése (Forrás: Renne, J-P. (2007): *What are the consequences of active management of average debt maturity in terms of cost and risk*, 9.o.)

Az adósság költségének volatilitása az idő előrehaladtával egyre nő, és egy adott időszak szempontjából a leglényegesebbek az előző időszak történések, így az adósságkezelőnek fontos modelleznie például az ötödik évi varianciát a negyedik év függvényében. Ezért a kanadai modell meghatároz feltételes volatilitást is. A feltételes költségfüggvény eloszlásáról már volt korábban szó, az ott szereplő normális eloszlás szórásnégyzet paraméterét tekintik a feltételes volatilitásnak. Lényegében arról van szó, hogy minden időszak elején a korábbi adatok felhasználásával, az előre becsült paraméterekkel meghatározzák az időszakra eső költséget (lineáris becsléssel) minden lehetséges megvalósulás mellett. A feltételes volatilitás az így becsült és a megvalósulások melletti költségek közti eltérésekből ered. Az így kapott kockázati mérőszám jelentősége abban rejlik, hogy ezáltal eltűnik az idő szerepe, így az optimalizálásnál könnyebb a volatilitásra korlátot megadni (részletesen lásd az *Optimalizálás* c. fejezetben).

4.3.2 Kockázattípusok

A legegyszerűbb **kamatkockázat**ot jelző mutatószám a fix és változó kamatozású adósság aránya. Ennek azonban az a hátránya, hogy nem ad információt sem az adósság kamatérzékenységről, sem a lejárat szerkezetéről. Különbözőnek veszi továbbá a hat hónapos diszkontkincstárjegyet és a féléves kamatperiódusú változó papírt, holott ezeknek megegyezik az átlagidővel mért kamatláb érzékenyséjük. Ilyen szempontból jobb mutatószám az átárazódásig (következő kamatmegállapításig) tartó átlagos idő (ATR, Average Time to Refixing), vagy a duration. Az első a névértékkel átlagolja az átárazódásig hátralévő időt, ez fix kamatozású elemek esetén a hátralévő futamidő, változó kamatozásúak esetén a következő kamatfizetésig hátralévő idő, és indexált kötvények esetén pedig az indexálási gyakoriság (pl. 1 hónap, ha az inflációról havi adatok érhetőek el).

A duration a kötvénnyel kapcsolatos pénzáramlásokig hátralévő idők súlyozott átlaga, ahol a súlyok a pénzáramlások jelenértékeinek relatív aránya a kötvény árfolyamához, a konkrét matematikai alak eltér az effektív kamatok (kamatos kamatozás) és a logkamatok (folytonos kamatozás) esetén. A jelenérték számításához használhatjuk a lejáratig számított hozamot (Macaulay-féle duration), vagy pedig az éppen aktuális zérókupon görbét (Fisher-Weil duration). Használatos még a módosított duration fogalma, ami azt mutatja meg, hogy

mekkora relatív változást okoz a kötvény árfolyamában a hozamgörbe egységnyi megváltozása. Ha ábrázoljuk a kötvényárfolyam relatív megváltozását a hozam függvényében (azaz a kamatlábérzékenységet), akkor a módosított duration a görbe origóbeli meredekségének ellentettje lesz, a görbe jobb közelítése érdekében pedig a görbületet, azaz a konvexitást is meg lehet határozni.

Az országok gyakorlatában nincs egyértelműen alkalmazott duration, habár leggyakrabban a módosított Macaulay-féle durationt használják, a svédek és a dánok célértéket is meghatároznak rá (bővebben lásd a *A: Matematikai összefoglaló* és a *Országok adósságportfóliójának mutatói* c. részeket). Különböző portfóliók durationjét egy adott időpontra lehet összehasonlítani, a duration idősoros elemzése a hozamkörnyezet és piaci viszonyok folyamatos változása miatt nem célravezető. Az optimalizálás során azonban lehet korlátot állítani a durationre. A mutatószám számítási módjában történő változás (például módosított átlagidőre való átállás) azt eredményezi, hogy az adatok nem lesznek konzisztensek, habár a trendek továbbra is megfigyelhetőek maradnak.

Az ATR és a duration korlátja, hogy a kamatláb-kitettség időbeli szóródásáról és a hozzá kapcsolódó refinanszírozási kockázatról nem mondanak semmit. Emiatt a török adósságkezelő (Balibek és Memis 2012) azt tekinti, hogy mekkora azon adósság aránya, ami esetén az ATR értéke kisebb, mint egy év. Az indexált kötvények elterjedése miatt ezt tovább finomították, megnézik a hazai devizában denominált adósságon belül a CPI-indexált kötvények arányát, és a maradékon belül vizsgálják az egynél kisebb ATR értékű adósság részarányát. Ezen mutatókkal lényegében a hazai adósságot felosztják a kamatláb érzékenység szempontjából három részre: CPI-indexált kötvények, változó kamatozású kötvények (amik ATR mutatója kisebb egynél) és fix kamatozású kötvények (amik ATR-je legalább egy).

A **devizaárfolyam kockázat**ot mérhetjük az adósságportfólió szerkezete alapján, azaz lehetséges mutatószámok az összetétel a hazai és külföldi devizák szerint, illetve a keresztárfolyam-kockázat miatt a devizaadósság devizanemenkénti megoszlása. További lehetőség a kibocsátandó devizaadósságon belül a megújítandó adósság arányának, illetve az egyes devizák arányának megválasztása. A török adósságkezelő 2007 óta a fennálló teljes, illetve deviza adósságállományhoz viszonyít.

A **megújítási kockázat**ra vonatkozó legegyszerűbb mutatószám az adósság átlagos lejárat, illetve a hátralévő átlagos futamidő. A kettő a résztörlesztéses adósságelemek esetén tér el (pl. hazánk esetén az NFI-hitelek), egyébként a kettő megegyezik. Ezek előnye, hogy egyszerűen számolhatók, azonban az átlagolás miatt nem veszik figyelembe a lejárat szerkezetet, így még ha korlátok között is marad az átlagos hátralévő futamidő, kialakulhatnak olyan évek, amikor túl nagy adósságot kellene megújítani. Ennél jobb megoldás, ha adott időszakon (pl. 12 hónapon, 1-3 éven stb.) belül lejárat adósság részarányára teszünk megkötéseket, ugyanis így simíthatjuk a lejárat szerkezetet. A refinanszírozási kockázatot a negyedéves átlagos megújítás összegével is mérhetjük.

A **likviditási kockázat**ot egy Kincstári Egységes Számlán (KESZ) lévő pénzmennyiséggel lehet mérni, a likviditás biztosítása érdekében erre szükséges minimális korlátot meghatározni.

Egy ilyen típusú mérőszám használatát említik meg a törökök (Balibek és Memis 2012) és az olaszok (Adamo és mtsai. 2004) is¹⁰.

Fontos még megemlíteni a **modellkockázatot**, de erről *A modellek érvényessége és vizsgálata* fejezetben lesz szó részletesebben.

Az eddig említett kockázati mutatók értéke adósságműveletek (kibocsátás, csere, visszavásárlás) és piaci okok (devizaárfolyam- és hozamváltozás) miatt változhatnak meg. Lényeges kérdés, hogy egy adósságkezelőnek mikor kell beavatkoznia a változás miatt. Az adósságműveletek diszkrét időpontokhoz tartoznak és általában a finanszírozási terv az év végére határoz meg célkitűzéseket. A kitűzött benchmark értékek eléréséhez vezető pályától való kismértékű eltéréseket még nem szükséges kezelni, ugyanis a piaci változások folytonosan következnek be, és ezekre a legtöbb esetben egy átmeneti, rövid távú esemény van hatással. Ezekre vagy nem lehet rövid időn belül válaszolni, vagy a sokkhatás elmúlik, és egy esetleges válaszlépés csak tovább rontaná a mutatót. Lehetséges azonban strukturális törés vagy trendforduló is, ekkor reagálni kell, így fontos a rövid távú hatások kiszűrése annak érdekében, hogy ezeket észre lehessen venni. Erre egy lehetőség mozgóátlag használata, ez csillapítja a rövid távú kilengéseket, azonban késleltetéssel mutatja csak a trendeket. A kockázati mutatókban bekövetkező változásra az adósságkezelő reagálhat a finanszírozási szerkezet módosításával, illetve azonnali hatásként kamat- és devizaszwapok kötésével, visszavásárlással, cserével.

¹⁰ További országok gyakorlata megtalálható a Javaslat az államadósság-kezelési benchmarkok 2013.évi értékeire ÁKK-s IG összefoglalóban.

5 A nemzetközi gyakorlatban alkalmazott modellek

5.1 A gazdaság állapotának modellezése

Az adósság költségeinek (elsősorban a hozamgörbe) szimulálásakor szükséges lehet egyes makrogazdasági változók jövőbeli dinamikájának előrejelzése is (természetesen vehetünk leegyszerűsített modelleket is, ahol e tényezők állandóságát feltételezzük, de ezzel kevesebb kockázati tényezőt veszünk figyelembe). Míg a magyar modell teljesen exogénnek feltételezte e tényezőket, számos külföldi ország adósságkezelési modellje beépít egy vagy több makrováltozót is az optimális portfólió modellbe. Különösen a finanszírozási szerkezeteket célzó modelleknél szükséges a finanszírozási igény becslése, amihez az elsődleges költségvetési egyenleg tervezése szükséges, de az inflációhoz kötött adósságok költségeihez inflációs prognózisra, az adósságrátát célzó modelleknél GDP előrejelzésre is szükség van., Általánosan, a hozamgörbe illetve devizaárfolyam-alakulás becsléséhez is szükségesek lehetnek makroelőrejelzések. Megoldásként adódik, hogy az adott ország pénzügyminisztériuma vagy jegybankja által készített előrejelzéseket építse be a modell is, de számos külföldi adósságkezelő modell saját számításokat is végez e változók előrejelzésére.

Bolder (2002) tanulmányában a következőket javasolja kritériumként:

- a modellezendő sztochasztikus folyamatnak tükröznie kell az egyedi makrogazdasági változók empirikus tulajdonságait,
- meg kell ragadnia a változók közti együttmozgásokat, fogalmilag egyszerűnek kell lennie, kevés paramétert kell használnia,
- kellően rugalmasnak kell lennie érzékenységvizsgálathoz és stresszteszthez,
- a lehetséges megvalósulások számítási idejének nem szabad túl hosszúnak lennie.

Empirikusan megfigyelték, hogy a makrogazdasági változók hatással vannak a hozamgörbére, feltevés szerint azonban ez fordítva nem igaz (Bolder 2002).

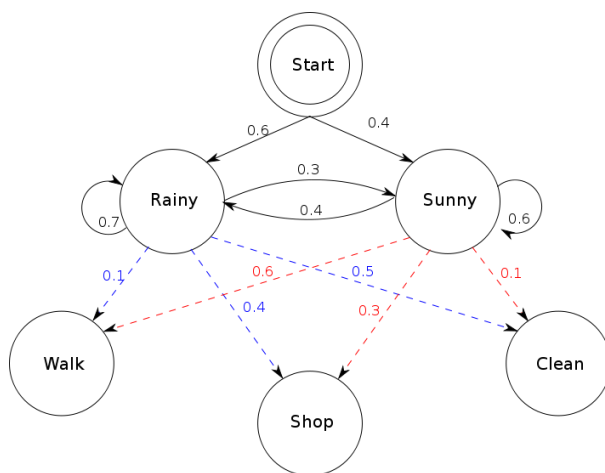
Egy államháztartás pénzügyi helyzete, pozíciója a bevételektől és a kiadásoktól függ, míg az elsődleges egyenleg a bevételek (itt nem számolják bele a kamatbevételeket) és a kamatkiadásokat nem tartalmazó kiadások különbsége. Az adósságrátát általában ez az elsődleges egyenleg, a már meglévő adósság finanszírozási költségei és a gazdaság növekedési üteme határozza meg (Magyar Nemzeti Bank 2013), így ezeket szükséges modellezni. Az elsődleges egyenleg azért is játszik fontos szerepet, mert az egyes periódusokban fellépő finanszírozási szükségletet meghatározhatjuk az adósság költségeinek és az elsődleges egyenleg összegeként (Bolder és Deeley 2011). A bevételek és a kiadások erősen függnek a gazdaság állapotától (például az adófizetések recesszióban kisebbek), ezért egyes modellek a gazdasági ciklusokat is figyelembe veszik.

5.1.1 Gazdasági ciklus

A gazdaság állapota meghatározza az adóbevételeket, a munkanélküliséget, a gazdasági növekedést és a szükséges szociális kiadások nagyságát is. Empirikusan megfigyelhető, hogy a gazdaság különböző állapotaiban (recesszióban vagy konjunktúrában) más a hozamgörbe

alakja is, amit a modellezésben úgy lehet megvalósítani, hogy különböző paramétereket használunk a gazdaság állapotainak függvényében. Nem megfigyelhető azonban, hogy éppen recesszióban van-e gazdaság, más változók (például növekedés) értékeiből következtethetünk csupán erre, ehhez speciális technikára van szükség (ún. rejtett Markov-modellek). Egyes változók szimulálására ilyen modelleket használ a svéd, az angol és a francia adósságkezelő is.

Ezt a problémát szemlélteti a következő ábra (az ilyen típusú problémákra a rögtön említendő rejtett Markov-modellek jelentenek megoldást). Ezen az időjárás állapotai (napos, esős) nem megfigyelhetőek, azokra csupán a tevékenységből (séta, vásárlás, takarítás) lehet következtetni. A Markov-folyamat, vagy másnéven Markov-lánc, egy olyan sztochasztikus folyamat, aminek jövőbeli értéke kizárólag a jelenbeli állapotától függ, és amit meghatároz a kiindulási helyzet és az egyes állapotokba való átmenetvalószínűségek. A példában szereplő rejtett (nem megfigyelhető) Markov-lánc a következő paraméterekkel rendelkezik: a kiindulás után 60% az esélye, hogy eső lesz, míg 40%, hogy sütni fog a nap. Ezután esős napot 30% eséllyel követ napos, míg 70%-kal esős nap. Hasonlóan, napsütéses nap 60%-kal következik újra, míg 40% eséllyel esni fog az eső derült nap után. Az egyes tevékenységeket az időjárás függvényében űzik, például boltba esős napon 40%-os, míg derült napon 30%-os valószínűséggel megyünk (hasonló az értelmezés a többi esetben). A modellel kapcsolatos feladat, hogy becslést adjunk az időjárásra, ha tudjuk a tevékenységet, azaz a megfigyelt események alapján meghatározzuk a rejtett Markov-folyamat állapotait. Erre egy megoldás az úgynevezett Viterbi-algoritmus, mely egy dinamikus programozási eljárás az állapotsorozat meghatározására.



4. ábra Rejtett Markov-modellek szemléltetése (Forrás: http://en.wikipedia.org/wiki/Hidden_Markov_model Letöltve: 2013.10.14.)

A 4. ábra esetén az időjárás jelenti a gazdasági állapotokat. A kibocsátás növekedésének mértéke meghatározza a gazdaság állapotát, az még azonban nem modellezi a gazdasági ciklusokat (ez a trendtől való eltérést jelenti), tehát a növekedés becslése nem jelzi előre, hogy recesszió vagy konjunktúra lesz-e (az állapot az ok és a növekedés az okozat). A rajz terminológiáját használva, ez pontosan azt jelenti, hogy abból, hogy egy adott napon tudjuk, hogy valaki sétált, még nem lehet megmondani, hogy milyen volt az idő (tehát nem 10% az esélye, hogy esős idő volt). A problémára Hamilton (1989) könyvében adott választ a róla elnevezett szűrő segítségével, erre épül Bolder (2002) tanulmánya. Eszerint a kibocsátás növekedését egy n -ed rendű autoregresszív folyamattal (tehát az n korábbi értékét használja

fel a folyamatnak) modellezik, és a folyamat várható értéke egy nem megfigyelhető állapotváltozótól (a gazdaság állapota) függ¹¹. A folyamatot minden időpillanatban éri egy 0 várható értékű, normális eloszlású sokkhatás, és a különböző időszaki sokkok függetlenek egymástól.

A gazdaság állapotának alakulására tehát egy elsőrendű, kétállapotú Markov-láncot feltételeznek. A két állapot a recesszió és a konjunktúra, de a stresszteszt mellett az extrém helyzetek (például válságok) vizsgálatára lehetséges egy harmadik állapot is (az ebbe való átmenetvalószínűség kicsi). A modell bonyolultsága a paraméterek (a Markov-lánc esetén az átmenetvalószínűségek, az autoregresszív folyamat esetén pedig a korábbi adatok együtthatói, a hibatag varianciája, és a gazdasági állapottól függő konstans tagok) becsléséből adódik, erre használják a Hamilton-szűrőt. Ez egy olyan algoritmus, ami a kibocsátás megfigyelt növekedéseinek iterálva folyamatosan frissíti a következtetéseit annak a valószínűségéről, hogy egy adott állapotban van a gazdaság. Ez az eljárás a paraméterek becslésére hasonlít a Kálmán-szűrőhöz, az eltérések abból fakadhatnak, ha a rendszer nem lineáris. A Kálmán-szűrőről később még lesz szó, de röviden ez zajos megfigyelések rekurzív mérésével optimális becslést ad a rendszer állapotáról. Az algoritmus a becsléskor szokásos loglikelihood függvény maximalizálására épül, a konkrét lépések megtalálhatók Bolder (2002) összefoglalásában. Ezzel megkapható a historikus adatokkal konzisztens paraméterhalmaz, hasznos lenne még tudni, hogy egy múltbeli periódusban a gazdaság recesszióban vagy konjunktúrában volt-e, erre a simított valószínűségeket használják. Ennek kiszámítására szolgál Kim simító algoritmus (Kim 1994), a simítás alapötlete, hogy nem csak az adott időpontig fellelhető információt használja fel, hanem az egész mintát (tehát nem valósághű olyan szempontból, hogy egy adott pillanatban jövőbeli információkat is használ).

A Hamilton-modell a rejtett Markov-modellek családjába tartozik, ugyanis a háttérben meghúzódik egy nem megfigyelhető Markov-folyamat (most a gazdaság állapota). Az olyan modelleket pedig, ahol egyes paraméterek a gazdasági állapottól függenek, Markov-féle rezsinváltó modelleknek is nevezik. Egyes változók szimulálására ilyen modelleket használnak a svéd (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002), az angol (Pick és Anthony 2006) és a francia (Renne és Sagnes 2006) modellben is, ezekről később esik szó.

5.1.2 Finanszírozási szükséglet

Az államháztartás pénzügyi pozíciójának (deficit vagy szufficit) modellezésekor két probléma merül fel (Bolder 2002). Az egyik, hogy a múltbeli adatok nem jelzik előre megfelelően a jövőbeli alakulást, a másik pedig, hogy az adatsorok nem stacionáriusak, azaz az idősor alakulásának jellemzői nem függetlenek az időtől. Utóbbi tulajdonság ellenére lehet olyan modellt építeni, ami illeszkedik az adatokra, de az még nem oldja meg az első problémát. Ilyen esetekben célszerű a paramétereket nem becsléssel, hanem kalibrálással meghatározni, így beépítve döntéshozók és modellezők jövőre vonatkozó elvárásait. (Bolder 2002) a pénzügyi egyenleg dinamikájára egy módosított Ornstein-Uhlenbeck folyamatot (ilyen a később

¹¹ $y_t - \mu_{S_t} = \sum_{i=1}^n (y_{t-i} - \mu_{S_{t-i}}) + \epsilon_t$, ahol y_t a kibocsátás növekedése, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ az egymástól független hibatagok, S_t a gazdaság állapotát leíró változó.

említendő Vasicek kamatmodell is) javasol¹². Az eltérést a sima Ornstein-Uhlenbeck folyamathoz képest véletlenszerű ugrások jelentik, melyek nagyságát és előfordulását a gazdaság állapota határozza meg. A folyamat paraméterei a hosszú távú átlag, az átlaghoz való visszahúzás sebessége, a gazdasági ciklusoktól függő deficit nagysága és az attól független sokkok volatilitása. Ahogy a Vasicek modell esetén, itt is könnyen megkaphatjuk a folyamat feltételes eloszlásának (ami normális eloszlás) paramétereit. Az így kapott finanszírozási szükséglet hátránya, hogy nem lehet megmondani, hogy ezen belül mekkora az adóssághoz kapcsolódó költség (a továbbiakban: adósságköltség) részaránya. A vizsgálatok szempontjából pedig ezt fontos volna tudni, ugyanis az adósságköltség kontraciklikus, azaz ellentétesen mozog a gazdasági ciklussal. Ennek vizsgálatára felhasználják az előző időszak tényleges és az éves alapú, N időszak alapján becsült adósságköltségének különbségét.

Másik megközelítés alapján (Bolder 2003; Bolder és Deeley 2011) a finanszírozási szükséglet a bevételek, a nem adósságjellegű kiadások (ez a kettő határozza meg az elsődleges egyenleget) és az adósságköltségek előjeles összege. A volatilitását vizsgálva Bolder (2003) megállapította, hogy az adósságköltségek volatilitásának emelkedése nem növeli ugyanakkora mértékben a finanszírozási szükséglet változékonyságát¹³. Utóbbi gondolat az elsődleges egyenleg és az adósságköltségek közti kapcsolatból, korrelációból adódik, ugyanis ez a kapcsolat pozitív irányú, ha nincsenek kínálati sokkok, és az erőssége az adósságportfólió összetételétől, illetve a deficittől vagy szufficitől függ.

Bolder és Deeley (2011) ezen kívül felteszik, hogy a bevételek és a kiadások a később bemutatásra kerülő egyesített makroökonómiai hozamgörbe modell állapotváltozóitól függ, míg az adósságköltségek a historikus és az aktuális kamatlábak függvénye. Robbins, Torgunrud és Matier (2007) munkájára alapozva a bevételek éves növekedésének leírásához¹⁴ a reál GDP-t, az inflációs rátát, az alapkamatot és egy normális eloszlású sokkhatást használ. Hasonlóképpen, a kibocsátás éves növekedését¹⁵ egy konstans, a reál GDP, az infláció és egy normális hibatag lineáris kombinációjaként határozza meg. Az egyetlen szabad változót, a konstanst úgy választják meg, hogy a finanszírozási szükséglet a hiány vagy többlet célértékével egyezzen meg. Fontos megjegyezni, hogy itt éves változások vannak és az adósságkezelési modell kisebb időközökkel dolgozik, emiatt szükséges negyedéves adatokra korrigálni.

A svéd adósságkezelő makroökonómiai szemszögből (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) vizsgálta a kérdést. Ez alapján a nettó finanszírozási igényt a nominális GDP egyensúlyi szintjéből, a reál növekedési ütem annak egyensúlyi állapotától való eltéréséből és egy normális eloszlású hibatagból határozzák meg. Érdeemes megemlíteni, hogy az angol adósságkezelő (Pick és Anthony 2006) a nettó finanszírozási igény nominális GDP-hez

¹² $dF(t) = \alpha(\beta - F(t))dt + \gamma R_t + \xi dW(t)$, ahol $F(t)$ a pénzügyi egyenleg, R_t annak a pillanatnyi valószínűsége, hogy t -ben recesszió van.

¹³ $\mathbb{D}^2(F(t)) = \mathbb{D}^2(R(t) - E(t)) + \mathbb{D}^2(\Delta(t)) - 2\text{cov}(R(t) - E(t), \Delta(t))$, ahol $F(\cdot)$ a finanszírozási szükséglet, $R(\cdot)$ a bevételek, $\Delta(\cdot)$ az adósságköltség és $E(\cdot)$ az enélküli kiadások.

¹⁴ $\ln\left(\frac{R_t}{R_{t-1}}\right) = 1,02y_t - 0,34y_{t-1} + 1,05\pi_t + 0,19(r_t - r_{t-1}) + \varepsilon_t$, ahol R_t a bevétel, y_t a reál GDP, π_t az infláció, r_t az alapkamat és ε_t a hibatag.

¹⁵ $\ln\left(\frac{E_t}{E_{t-1}}\right) = c - 0,27y_t + 0,32\pi_t + v_t$, ahol c konstans, a többi megegyezik az előzővel.

viszonyított arányát szimulálja, míg a francia modell (Renne és Sagnes 2006) ciklikusan-korrigált elsődleges egyenleget számít.

5.1.3 Kibocsátási rés, GDP növekedés

A kanadai adósságkezelő (Bolder és Deeley 2011) a kis makrogazdaságokra jellemző új-keynesi modelleket feltételezi, és három kulcsváltozót modellez: a kibocsátási részt, az inflációt és a központi bank alapkamatát. A makrogazdaság új-keynesi modellezése két feltevést tesz, egyik, hogy a háztartások és a befektetők racionálisak, míg a másik, hogy nem valósul meg a tökéletes verseny, és ezért ragadósak az árak és a bérek, azaz nem reagálnak azonnal a gazdasági környezet változására. Ez a megközelítés vitatja, hogy a kormányzat (fiskális politika), vagy a nemzeti bankok (monetáris politika) stabilizációs lépései hatékonyabbak lennének, mint a laissez-faire módszer (nem tesznek semmilyen lépést). A kanadai modellekben az adott időszaki kibocsátás pozitívan korrelál a múltbeli, vagy elvart kibocsátással, és negatívan a reálkamatokkal.

A **kibocsátási rés** a valós és potenciális GDP különbségének a potenciális GDP-hez viszonyított arányaként kapható. Általában a potenciális GDP-t a GDP adatsorából kapják Hodrick-Prescott szűrő használatával. Ezzel a szűrővel választják el a ciklikus komponenst egy idősor nyers adataiból, ezáltal simítva az adatsort, hogy kisebbek legyenek a rövid távú kilengések. Ezt használja a svéd (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) és a francia adósságkezelő (Renne és Sagnes 2006) is. Utóbbi esetén meg kell jegyezni, hogy a kibocsátási részt elsősorban a gazdasági ciklusok hosszának közelítésére használják.

Az angol modell (Pick és Anthony 2006) a kibocsátási rés modellezése során felteszi, hogy az függ a gazdasági körforgástól, és utóbbit szokásosan egy kétállapotú Markov folyamattal jellemzi, ahol az egyes állapotok a kibocsátás trendtől való lefelé vagy felfelé való kilengését jelenti. Ezután a kibocsátási részt a valós reálkibocsátás vagy reál GDP, a potenciális kibocsátás vagy GDP, a rövid távú kamatláb és a CPI infláció felhasználásával számítják.

A **GDP növekedés** nagyságát meghatározza a gazdasági ciklusok körforgása, a reál GDP megváltozását a svéd adósságkezelő (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) például rezsimváltó elsőrendű autoregresszív folyamattal (rezsimváltó AR(1) folyamat) modellezi. Ebben 2 paraméter van, egy konstans tag és az előző időszaki adat súlya, így el kell dönteni, hogy melyik függjön a gazdaság állapotától. Az egyszerűsítés miatt ennek általában az állandó tagot választják, és annál nagyobb az eltolódás az állapotváltozás esetén, minél nagyobb súllyal vesszük figyelembe az idősor előző értékét (a folyamat stacionaritásának – azaz, hogy legyen állandósult állapot – feltétele, hogy a súly kisebb legyen, mint egy).

5.1.4 Infláció

A tanulmányban az infláció alatt egyszerűen a CPI (Consumer Price Index) inflációt értjük. A kanadai modellben (Bolder és Deeley 2011) az inflációt a várakozásokkal-növelt Phillips-görbe (expectation-augmented Phillips curve) segítségével határozzák meg. A Phillips-görbe olyan makrogazdasági modell, mely az inflációs ráta és a munkanélküliség között teremt kapcsolatot empirikus megfigyelésekre alapozva. Ennek módosítása, a rövid-távú, vagy várakozásokkal növelt Phillips-görbe rövidtávon figyelembe veszi a gazdasági szereplők

inflációs várakozásait, így annak eltolódása esetén a görbe is eltolódik. Ennek további módosítása az új-keynesi Phillips-görbe, mely már a dinamikus sztochasztikus általános egyensúlyi modellek családjába tartozik (DSGE, Dynamic Stochastic General Equilibrium). A kanadai modell szerint a korábbi, vagy tervezett infláció és a kibocsátási rés is pozitívan hat az adott időszaki inflációra.

Az infláció modellezésére is alkalmasak az autoregresszív folyamatok. Érdekes azonban meggondolni, hogy szükséges-e ebben az esetben is a paramétereket a gazdasági ciklustól függőnek tekinteni. Feltevés szerint, ahogy a svédek modellben (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) is, a központi bank sikeres az infláció stabilizálásában. Ilyenkor az infláció konjunktúra ciklustól független, ugyanis a gazdasági állapot hatása a központi bank irányadó kamatában jelenik meg. A szimuláció általában havi, vagy negyedéves, így a kapott eredményeket utána aggregálni kell, ez a többi makróváltozóra is igaz.

Fontos még megemlíteni, hogy az infláció mellett alternatív lehetőség a maginfláció szimulálása is, ez az infláció alapvető trendjét mutatja azáltal, hogy kiszűri a magas volatilitású, nehezen előrejelezhető tényezőket, mint például egyes élelmiszerek ára és egyes energiaköltségek. Az angol adósságkezelő (Pick és Anthony 2006) szimulálja még az RPI (Retail Price Index, kiskereskedelmi árindex) inflációt is, és azt vették észre, hogy szisztematikus eltérés mutatkozik eközött és a CPI infláció között a gazdasági ciklusok folyamán. Ez annak tudható be, hogy az RPI inflációba beleszámítanak a lakossági ingatlanszektor költségei (jelzáloghitelek törlesztőhitelei) is, amik függnek az alapkamattól.

5.1.5 Rövid és hosszú távú kamatok

A svéd adósságkezelő (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) a rövidtávú nominális kamatot (alapkamat) a Taylor-szabály segítségével modellezi. Ez az infláció (várt és cél), a kibocsátás (tényleges és potenciális) és az egyensúlyi reálkamatláb segítségével határozza meg az alapkamatot¹⁶. A kibocsátáshoz a reál GDP-t és a potenciális reál GDP-t használják, míg a várható inflációt az adaptív várakozások feltevése mellett határozzák meg. Az adaptív várakozások elmélete azt mondja ki, hogy a gazdasági szereplők a múltbeli események alapján tesznek feltételezést a jövőre vonatkozóan. A potenciális reál GDP-t a reál GDP-ből kapják a Hodrick-Prescott szűrő használatával. A rövid távú nagyobb ingadozás miatt a központi banknak nem érdemes automatikusan a Taylor-szabályt követnie, hanem bizonyos késleltetéssel célszerű felülvizsgálni az irányadó kamatlábat. Ezért a **rövid távú nominális kamatok**at a svédek egy bővített AR(1) folyamattal modellezik, ahol a plusz tag az előző időszaki rövid távú nominális kamat és a Taylor kamat különbsége¹⁷. A rövid távú kamatok ismerete alapvető fontosságú, ugyanis a hosszabb lejáratokra vonatkozó kamatlábak a kockázattal korrigált jövőbeli rövid kamatok átlagai.

A hosszú távú nominális kamatok leírásához a svéd (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) először meghatározzák a befektetők reálhozam elvárását. Ezt a gazdasági kapacitások kihasználtságától (kibocsátási rés) és a korábbi értékektől teszik függővé, és egy olyan

¹⁶ $i_t^T = \pi_t^e + r_t^* + a_\pi(\pi_t - \pi_t^*) + a_y(y_t - \bar{y}_t)$, ahol i_t a rövidkamat, π_t^e a várt infláció, π_t^* az infláció célértéke, y_t a kibocsátás, $\bar{y}_t$ a potenciális kibocsátás és a_π, a_y pozitív konstansok.

¹⁷ $i_t = \kappa + \varphi i_{t-1} - \varsigma(i_{t-1} - i_{t-1}^T) + \varepsilon_t$, ahol i_t a rövid távú nominális kamat, i_t^T a Taylor-kamat, ε_t normális eloszlású sokkhatás, κ, φ és ς pedig konstansok.

módosított elsőrendű autoregresszív folyamattal modellezik, amiben nem szerepel véletlen. Ennek felhasználásával a **hosszú távú nominális kamatok**at a reálhozam elvárás, a hosszú távú várható éves infláció, az inflációs kockázati prémium, a lejáratí prémium és a hibatag összegeként definiálják. Az inflációs kockázati prémiumot a korábbi értékek felhasználásával határozzák meg, míg a lejáratí prémiumot rezsimváltó AR(1) folyamattal. (A konkrét matematikai egyenletek megtalálhatók a hivatkozott tanulmányban.)

5.1.6 Devizaárfolyam

A svéd adósságkezelő (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002) meggondolás alapján egy deviza reál vásárlóerejét egy másikéhoz képest egy módosított AR(1) folyamattal lehet modellezni több tényező súlyozott összegeként. Ezek a tagok egy állandó, az előző időszaki **reál devizaárfolyam**, a két ország növekedéseinek különbsége, a hosszú távú nominális kamatok eltérése és egy hibatag. Ebből a **nominális devizaárfolyamot** inflációs hatások figyelembevételével kapják¹⁸.

A török adósságkezelő (Balibek és Memis 2012) a devizaárfolyam változására geometriai Brown-mozgást használ. Ez egy determinisztikus változás és egy véletlen sokkhatás összege, ahol a véletlent a normális eloszlás írja le. A devizaárfolyam modellezéséhez az arbitrázsmentesség miatt szükséges vizsgálni a devizahozamokkal való kapcsolatot is. A geometriai Brown-mozgás volatilitástruktúrája lehet determinisztikus vagy sztochasztikus is, sztochasztikus esetben egyik lehetőség az általánosított autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitikus¹⁹ (GARCH, generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) folyamatok használata. A devizaárfolyam változása ezeken kívül vektorautoregresszív folyamattal is modellezhető, Thorbjørnsdottir (2011) tanulmányában részletesen foglalkozik más idősoros technikákkal is.

5.2 Hozamgörbe modellek

A hozamgörbe modellezésnél több probléma merül fel, ugyanis a célunk, hogy egy adott időtáv alatt minden időpontban és minden lejáratra meg tudjuk mondani a zérókupon hozamokat (erre példa a 5. ábra). Az első, hogy hogyan illesszük a hozamgörbét egy adott időpont kötvényárfolyam²⁰ megfigyeléseire, míg a második, hogy ezek a görbék hogyan fejlődnek az időben.

Az alkalmazandó hozamgörbe modellel szemben több elvárásunk is van:

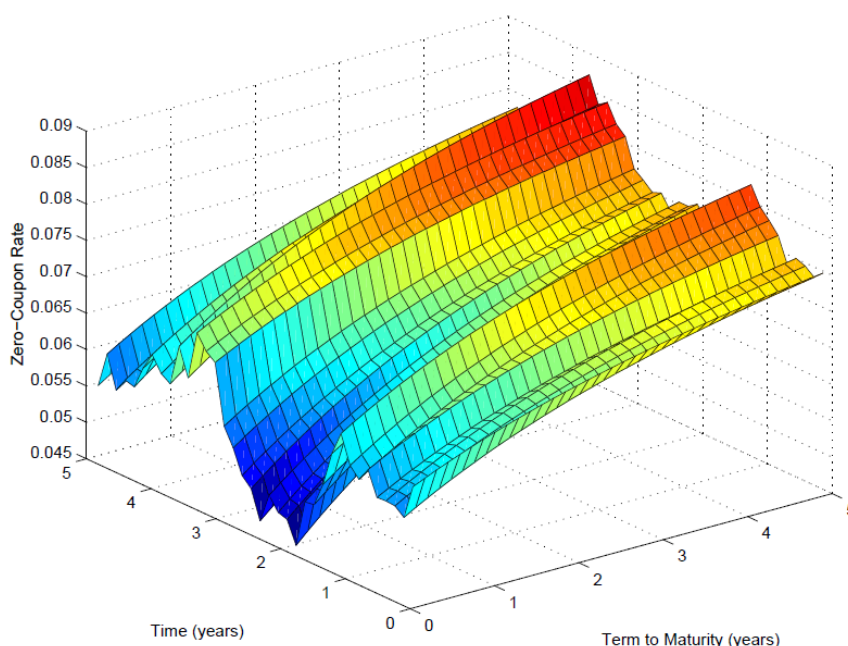
- a modell megfelelően írja le a hozamgörbe dinamikáját, azaz időbeli változását, ugyanis ha az nem realiztikus, akkor nem használható a szimuláció során,

¹⁸ $e_t^{i,j} = e_{t-1}^{i,j} \left(1 + \log E_t^{i,j} - \log E_{t-1}^{i,j} + \pi_t^i - \pi_t^j \right)$, ahol $e_t^{i,j}$ ill. $(E_t^{i,j})$ a nominális ill. reál átváltási arány az i és j ország devizája között, míg π_t^i az adott ország inflációja.

¹⁹ $\sigma_t = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \dots + a_q X_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$, ahol σ_t a volatilitás, $X_t = \varepsilon_t z_t$, ahol z_t fehérzaj, a és β pedig paraméterek.

²⁰ Adott piaci szokványtól függ, hogy árfolyam- vagy pedig hozamadatokat közölnek az adatszolgáltatók, természetesen mindkét módszerből előállíthatóak a hozampontok.

- létezzen analitikus megfeleltetés (függvényszerű kapcsolat) különböző faktorok (megfigyelhető és nem megfigyelhető, látens faktorok) és állapotváltozók (a gazdaság állapotát leíró mutatók), illetve a hozamgörbe között; ez a Monte Carlo szimuláció sebessége szempontjából fontos,
- legyenek könnyen becsülhetők és interpretálhatók a modell paraméterei,
- bármilyen alakú hozamgörbét elő tudjon állítani,
- az egész görbét modellezze, ne csak egy pontjának dinamikájából vezesse le a többi alakulását,
- ne legyenek negatív²¹ és nem korlátos hozamok,
- arbitrázsmentes legyen (azaz ne lehessen kockázatvállalás nélkül pénzt keresni).



5. ábra Egy zérókupon hozamgörbesor 5 éves időtáv és maximum 5 éves lejárat mellett (Forrás: Bolder, D. J. (2001): *Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation*, 2.o.)

Az utolsó két feltétel nem szigorú olyan értelemben, hogy enyhíthetjük arra, hogy csak kis valószínűséggel történhessen meg az ellenkezője. Az a követelmény, hogy bármilyen típusú hozamgörbét (normál, meredek, púpos, vízszintes, inverz) elő tudjon állítani, azért fontos, mert extrém helyzetekben (piaci sokkok, válságok) hirtelen megváltozhat a görbe alakja. A dán adósságkezelő (Danmarks Nationalbank 2010) ezen kívül még megjegyzi, hogy a hosszabb távú adósságkezelés során nem annyira lényeges szempont a megfigyelt hozamgörbe pontos előállítása, mint a kamat szintjének időbeli fejlődésének és a különböző lejáratú hozamok közti kovarianciának a leírása, ezért utóbbiaknak tükröznie kell a historikusan megfigyelt mintát. A következőkben bemutatandó affin modellek felelnek meg leginkább a korábban említett elvárásoknak.

5.2.1 Az affin, a NS típusú és a HJM hozamgörbe modellek

Az affin (azaz lineáris függvényekkel felépíthető) hozamgörbe modellek tárgyalása során elsősorban Bolder (2001) tanulmányára építünk. Először érdemes bevezetni az alapvető

²¹ Az elmúlt évek tapasztalatai alapján kialakulhatnak negatív kamatlábak (lásd Svájc, Németország).

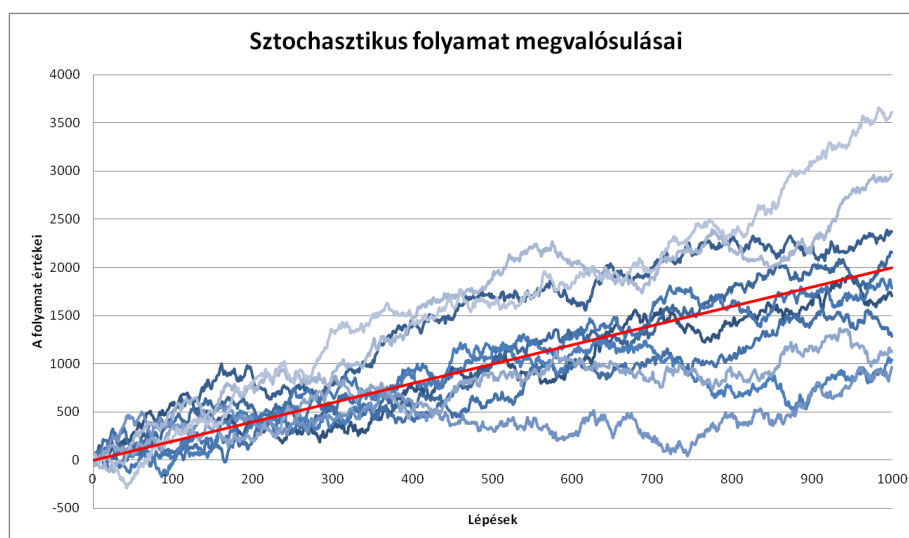
fogalmakat. Zérókuponnak nevezzük az olyan megállapodást, ami a lejáratkor egy egységet fizet, a zérókupon árfolyamfüggvény két változótól függ, a jelen és a lejárat időpontjától. Ezek alapján meg tudjuk határozni ennek függvényeként²² adott időpontban az azonnali, vagy más néven spot hozamot. A modellezés szempontjából lényeges még a pillanatnyi kamatláb, ami egy infinitezimálisan (végtelenül) kicsi időtartamra vonatkozó hozamot jelöl²³, ezáltal kapcsolatot tudunk teremteni a kamatlábak diszkrét természete és a folytonos matematikai modellek között.

Következő lépés a hozamgörbe dinamikáját hajtó (a fejlődését meghatározó) állapotváltozók sztochasztikus folyamatának leírása (erről bővebben a *A: Matematikai összefoglaló* részben). Az állapotváltozók a hozamgörbe modell bizonytalanságát adó tényezők, ezek lehetnek a hozamgörbe egyes tulajdonságai (például a szint, a meredekség vagy a görbület) vagy más, nem megfigyelhető változók, illetve akár a makrógazdaságot meghatározó mutatószámok is, mint például az infláció vagy a kibocsátási rés. Az állapotváltozók száma alapján megkülönböztetünk egy- és többfaktoros modelleket, egyfaktoros esetén például a pillanatnyi hozamot használhatjuk, ekkor az ezt az egy tényezőt tekintjük a teljes hozamgörbét meghatározó faktornak. Mivel az állapotváltozók alakulását nem ismerjük előre, így azok véletlen folyamatok. Ezért ezen változók dinamikáját sztochasztikus differenciálegyenlettel adhatjuk meg, ami lényegében egy sztochasztikus folyamat megváltozásaira felírt függvényegyenlet. Ez például a pillanatnyi kamatláb esetén annak végtelenül kicsi megváltozását írja le egy determinisztikus tag (drift) és egy véletlen (sztochasztikus) tag összegeként, ahol a véletlen egy Wiener folyamat, vagy más néven Brown-mozgás megváltozása (a Wiener folyamatról bővebben a *A: Matematikai összefoglaló* részben)²⁴. A drift lényegében egy trend, amely mellett halad a folyamat, míg a sztochasztikus tag az ekörüli ingadozásért felelős. Ugyanannak a driftes taggal rendelkező sztochasztikus folyamatnak 10 különböző megvalósulását szemlélteti a 6. ábra, ezen a piros egyenes jelzi a trendet. Ez az ábra azt is szemlélteti, hogy az idő előrehaladtával egyre volatilisabbé válnak a különböző megvalósulások. Az egyenes meredekségének nagysága időben is változhat, hasonlóan a sztochasztikus tag együtthatójához, ami a folyamat volatilitásának, változékonyságának nagyságát határozza meg. Mivel a kamatlábakról azt feltételezzük, hogy korlátosak, azaz létezik legkisebb és legnagyobb értékük is, így az biztosan nem jó, ha a drift együtthatója időben állandó és nem nulla. Így a korlátosságot az átlaghoz való visszahúzással oldhatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a kamatlábakra feltételezünk egy hosszú távú átlagot, és ha ennél egy adott időpillanatban nagyobb a kamatláb aktuális értéke, akkor a drift együtthatója negatívvá válik és így a változáson keresztül visszahúzza a kamatlábat a hosszú távú átlagához. Fordított esetben hasonlóan járhatunk el, ezenkívül még meghatározhatjuk a visszahúzás sebességét.

²² $z(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t}$ folytonos kamatozás esetén, ahol $P(\cdot, T)$ a zérókupon árfolyama, míg $z(\cdot, T)$ a hozama.

²³ $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} z(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$, ahol $r(\cdot)$ a pillanatnyi hozam.

²⁴ $dr(t) = A_0(t)dt + A_1(t)dW(t)$, ahol $A_0(\cdot)$ a drift és $A_1(\cdot)$ a sztochasztikus tag együtthatója, míg $W(\cdot)$ Wiener-folyamat.



6. ábra Egy sztochasztikus folyamat alakulása (Forrás: Saját számítás)

Miután leírtuk az egyetlen faktor, jelen esetben a pillanatnyi kamatláb fejlődését, felmerül a kérdés, hogy ez hogyan írja le az egész hozamgörbét. Ezt a Black-Scholes egyenlet (az opcióárazás alapegyenlete) meghatározásánál használt arbitrázsmentességi feltétel mintájára lehet meghatározni, ezenkívül feltételezzük, hogy a kötvényárfolyam a pillanatnyi kamatláb függvénye is. A lépések során kiküszöböljük a Wiener-folyamat miatti kockázatot (rizikósemleges vagy martingálmérték), majd parciális differenciálegyenleteket határoznak meg, aminek megoldhatósági feltétele, hogy az előbb említett sztochasztikus differenciálegyenlet együtthatói affin függvények (egy konstans és egy lineáris tag összege) legyenek. A kötvényárfolyamra tett további affinitási feltétel után²⁵, az árfolyam megkapható a differenciálegyenlet megoldásaként, amiből pedig meghatározhatjuk a spothozamgörbét.

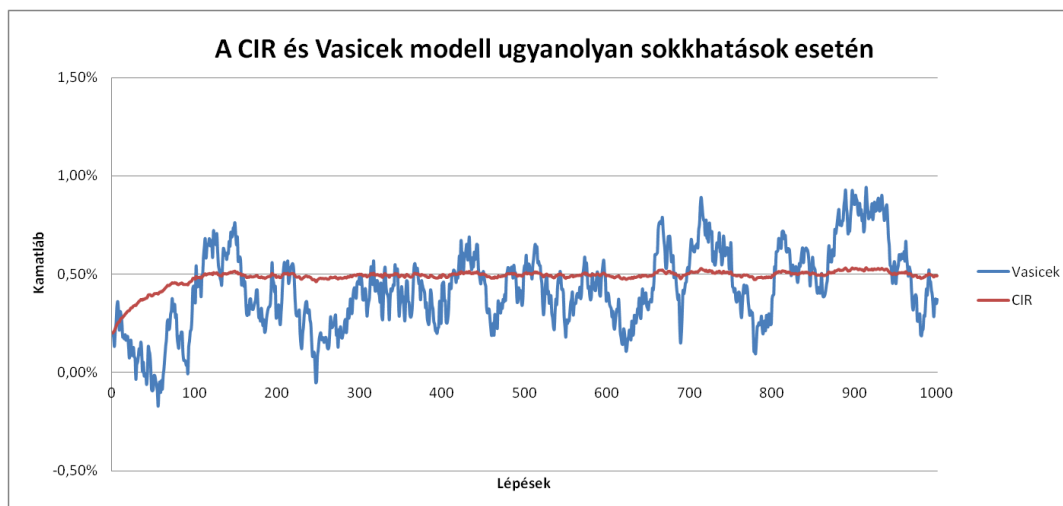
5.2.1.1 AZ EGYFAKTOROS HOZAMGÖRBE MODELLEK

Az állapotváltozó sztochasztikus tagjának együtthatójának alakja alapján kaphatjuk a közismert **Vasicek**²⁶ (Vasicek 1977) és **CIR**²⁷ kamatlábmodelleket (Cox, Ingersoll és Ross 1985). A Vasicek modell fontos tulajdonsága a korábban említett átlaghoz való visszahúzás. A kötvényárfolyam zárt alakban kifejezhető, illetve a kamatláb feltételes eloszlása normális eloszlású, így könnyebben elvégezhetőek a számítások. A költség és kockázat elemzés szempontjából előny, hogy tudjuk a feltételes várható értéket és volatilitást is. Az aszimptotikus viselkedés (ha az idővel tartunk a végtelenbe) a paraméterek függvénye és normális eloszlást kapunk véges szórással (ez a korlátosság szempontjából lényeges). A modell egyik hibája viszont, hogy a kamatlábak negatív értékeket is felvehetnek, míg a másik, hogy a különböző lejáratokhoz tartozó kötvényárfolyamok közti korreláció magas lesz. A CIR modell már kiküszöböli az előző modell egyik problémáját, itt már nem lehetnek negatív értékek a kamatláb folyamat során. Ennek azonban ára van, ugyanis a kamatláb feltételes eloszlására már bonyolultabb eloszlást kaphatunk, az úgynevezett nem centrált χ^2 eloszlást.

²⁵ $P(t, T, r) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}$.

²⁶ A sztochasztikus differenciálegyenlet alakja a kockázat semleges mérték mellett $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$, ahol θ a hosszú távú átlag, κ az átlaghoz való visszahúzás sebessége, σ a diffúziós együttható.

²⁷ Hasonlóan a Vasicek modellhez $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$.



7. ábra A CIR és Vasicek modell szerinti kamatláb folyamat ugyanolyan sokkhatások esetén (Forrás: Saját számítás)

A 7. ábra mutatja a kamatláb egy lehetséges alakulását a két modell esetén, ha ugyanazok a változások érik a folyamatokat. Megfigyelhető, hogy néhol a Vasicek modell szerinti kamatláb negatív, illetve mindkét folyamat eltérés esetén visszatér a hosszútávú átlaghoz. A CIR modell esetén azért kisebb a volatilitás, mert azt a folyamat aktuális értéke is meghatározza. Habár az ábra esetén a folyamatot határoztuk meg, de a Vasicek és a CIR modell előnye a szimuláció során pont az, hogy elég csupán az eloszlást generálni. Empirikus tények azonban azt mutatják, hogy ezek az egyfaktoros modellek a rövid kamatokat becslik jól, ezért adósságkezelési szempontból a használatuk nem vezet pontos eredményre, ha az egész hozamgörbét ezekkel becsüljük. Az olasz adósságkezelő (Adamo és mtsai. 2004) által leírt módszertanban a rövid kamatok szimulálására CIR modellt használnak, a török modell (Balibek és Memis 2012) emellett még a CIR modell általánosítását is, a **CKLS**²⁸ modellt (Chan és mtsai. 1992) is használja.

5.2.1.2 TÖBBFAKTOROS MODELLEK

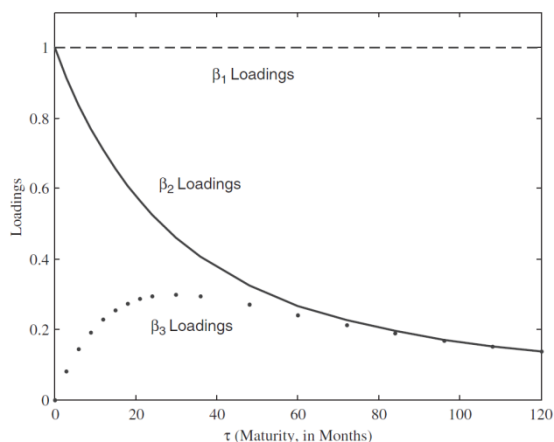
Többfaktoros modellek esetén a módszertan hasonló az egyfaktorosokhoz, csak az a különbség, hogy a pillanatnyi kamatláb több, egymással kapcsolatban álló állapotváltozó függvénye. A kapcsolat abban jelenik meg, hogy az állapotváltozók dinamikáját leíró egyenletekben a sokkhatást jelentő Wiener-folyamat megváltozások korrelálnak egymással. Ilyen modellekre példa a többfaktoros Vasicek és többfaktoros CIR modell.

Az eddigiektől eltérően a **Nelson-Siegel** modellben (Nelson és Siegel 1987) nem csak egy hozampont alakulását, hanem az egész hozamgörbét leírják. Ebben a modellben a pillanatnyi forward kamatokból kiindulva a kamatlábakat három faktor lineáris kombinációjaként (faktorsúlyokkal súlyozott összegeként) határozzák meg²⁹, ahol az egyes faktorerőssége a lejáratától is függ. A modell által használt egyik paraméter (exponenciális késleltetés) értékén keresztül dönthetjük el, hogy inkább a rövid vagy inkább a hosszú kamatokra szeretnénk jobb illeszkedést. A 8. ábra a faktorsúlyok értékének alakulását ábrázolja a lejárat mellett, a három

²⁸ Hasonlóan a CIR modellhez $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t)$, ahol γ konstans.

²⁹ $y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$, ahol τ a lejárat, λ_t az exponenciális késleltetés, míg β_t a faktorerőssége.

faktor súlya alapján az első hosszútávú, a második rövidtávú, míg a harmadik középtávú faktor. Ezek a faktorok tekinthetők sorrendben a hozamgörbe szintjének, meredekségének és görbületének. A brit modell (Pick és Anthony 2006) ebből származtatja a reálhozamgörbét is, amihez felhasználja a nominális hozamgörbét és az RPI inflációt.



8. ábra A faktorsúlyok változása a Nelson-Siegel modell esetén (Forrás: Diebold F.X. és Li, C. (2006): *Forecasting the term structure of government bond yields*, 342. o.)

Diebold és Li (2006) tanulmányukban továbbfejlesztették a modellt. Ők a hozamgörbét az egyes időpontokban a Nelson-Siegel modell alapján számolták ki, és ehhez a faktorokat dinamikusan határozták meg autoregresszív modellekkel (a változók múltbeli értékeit felhasználó modellek). Másik lehetőség a javításra, ha egy újabb faktort is bevezetünk, erre épít a **Nelson-Siegel-Svensson** modell is. A modell hátránya, hogy az újabb faktor több becsülendő paramétert eredményezne, ami lassítaná a számítást. A használat ellen szól az is, hogy Litterman és Scheinkman (1991) empirikusan bebizonyította, hogy a hozamgörbét három faktor is megfelelően leírja, azaz a görbe volatilitásának több mint 99%-át magyarázza a szint, a meredekség és a görbület. Ha több mint három faktor van, akkor dimenziócsökkentési eljárásokkal elérhetjük, hogy csak három maradjon, ilyen módszerek a főkomponens és a főfaktor elemzések. A faktorsúlyokra használt függvények megváltoztatásával is továbbfejleszthető a modell, erről később még a kanadai módszertan (Bolder és Gusba 2002) kapcsán lesz szó.

A dán adósságkezelő (Danmarks Nationalbank 2010) a kétfaktoros CIR modellt vizsgálta és azt összehasonlította a háromfaktoros Nelson-Siegel modellel. Az összehasonlításnál többek között azt figyelték meg, hogy melyik modell adja vissza jobban a hozamgörbe volatilitásának struktúráját. Ehhez egy alapvolatilitásmodellt (az EGARCH modellt) is felhasználtak és végül arra jutottak, hogy a kétfaktoros CIR és a háromfaktoros Nelson-Siegel modell között nincs szignifikáns különbség. Kezdetben a kanadai adósságkezelő is kétfaktoros CIR-t használt (Bolder 2002), később azonban már más, később említendő modellekre tértek át. A török adósságkezelő (Balibek és Memis 2012) egy hibrid modellt alkalmaz. A hozamgörbét a Diebold és Li módszertan alapján határozzák meg, ennél a szint alakulására CIR modellt használnak, míg a meredekséget és a görbületet állandónak tekintik az időtáv alatt, a három faktor kezdőértékét pedig historikus adatokból becslik.

Az affin modellek kritikája, hogy inkább a hozamok idősoros tulajdonságait írják le, míg pontatlanabbak a keresztmetszeti (azaz egy időpontra a megfigyelt adatokra való illeszkedés) elemzésében. Másrészt viszont az olyan modellek esetén, amik jobb illeszkedést produkálnak

nehezebb a hozamgörbe fejlődésének leírása. Másik kritika, hogy az affin modellek lineárisak, ennél bonyolultabb modellek használata, például véletlenszerű ugrások megengedése (ugrófolyamatok) feleslegesen tennék nehezebbé mind az elméleti, mind a gyakorlati megvalósítást.

5.2.1.3 HEATH-JARROW-MORTON HOZAMGÖRBE MODELL

A hozamgörbe modellezése során átjárás van a kötvényárfolyam, a rövid kamatláb és a forwardhozamok között³⁰. Ebből kiindulva, a Heath-Jarrow-Morton modell (ami egy nem affin hozamgörbe modell) esetén a forward kamatlábak dinamikáját modellezzük Brown-mozgással, és ebből határozzák meg a hozamgörbét, illetve a kötvényárfolyamokat. A határidős kamatlábak modellezése esetén fontos állítás (Heath, Jarrow és Morton 1992), hogy a drift és a volatilitás nem határozható meg függetlenül egymástól³¹. Forward kamatlábakra épülő modelleket általában kamatlábtól függő származtatott termékek árazásánál (például kamatswapok) használnak, azonban mivel nem historikus adatokat tekintenek, hanem az aktuális hozamgörbét, továbbá jellemzően nehéz az implementálásuk is, a hosszú távú kockázatkezelési célokhoz nem a legjobb választások (erre hívja fel a figyelmet a dán adósságkezelő is).

5.2.2 Görbeillesztéses hozamgörbe modellek

Ebben a részben Bolder és Gusba (2002) tanulmányára építünk. A hozamgörbe meghatározásánál probléma, hogy nincs elegendő zérókupon adat (ugyanis a diszkontkincstárjegyek éven belüli lejáratúak). Ezt úgy lehet kiküszöbölni, hogy a kamatozó kötvények adatait is felhasználjuk (ugyanis azok zérókuponok sorozatának tekinthetők), és ezekből becsüljük a hozamgörbét. Ezekhez megfelelő segítséget nyújtanak a görbeillesztési technikák, amelyek azért is szükségesek, mert legfeljebb csak pár tucatnyi futamidőre tudunk valós hozampontot megfigyelni, az értékelésekhez viszont szükségünk van egy folytonos hozamgörbére, és a pontok egyszerű összekötése, lineáris interpolációja nem kielégítő megoldás.

5.2.2.1 GÖRBEILLESZTÉSI TECHNIKÁK (SPLINE MÓDSZEREK)

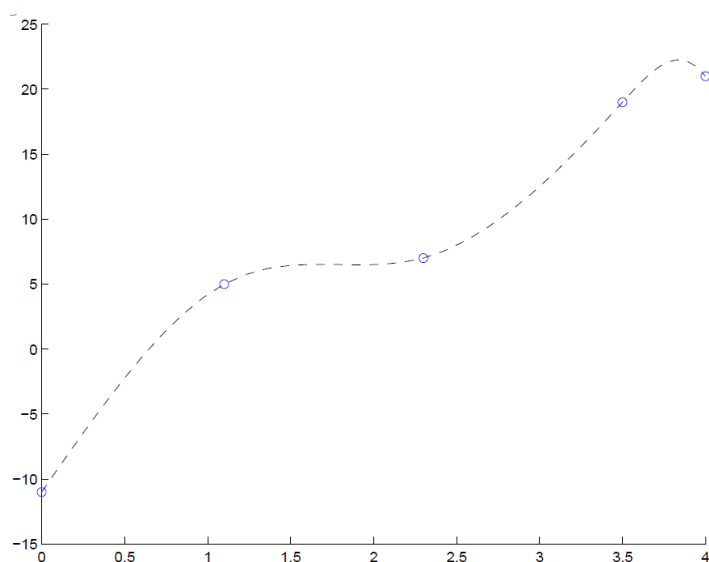
Görbeillesztésnél az adott alappontok és az azokhoz tartozó függvényértékek mellett keresünk egy olyan görbét, ami legjobb a következő, előre meghatározott célok szerint. A görbeillesztésnél két, egymást kizáró célunk lehet, az egyik, hogy minél pontosabban illeszkedjen a hozamgörbe, a másik, hogy sima legyen. Utóbbi a hozamgörbénél lényeges szempont, ugyanis nem kívánatosak az ugrások a görbében (két közeli lejárat között nem változik sokat a hozam). Másrészt a túl jó illeszkedés sem jó, ugyanis ekkor empirikus tapasztalatok alapján romlanak a mintán kívüli becslések, amik fontosak az előrejelzés szempontjából. A minél pontosabb illeszkedést mérhetjük a függvénnyel adódó hozampont-

³⁰ A kötvényárfolyam $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$, a rövid kamatláb $R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}$, $R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, u) du$, és a forward kamatláb $f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$, $f(t, T) = R(t, T) + (T-t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T}$.

³¹ $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds + \lambda(t)\sigma(t, T)$, ahol $\mu(t, T)$ a drift, $\sigma(t, T)$ a volatilitás és $\lambda(t)$ a kockázat piaci ára (a sztenderdizált kockázatmentes hozam feletti hozamtöbblet, Sharpe mutató).

értékek és a tényleges hozampontok eltérésének négyzetösszegeként (legkisebb négyzetek módszere). A második cél miatt az elsőhöz még hozzá kell adni egy simaságot jellemző mérőszámot, ezt pedig a görbe második deriváltjával tehetjük meg (egész pontosan a második deriválnak az intervallumra vonatkozó integráljával). A simaság és az illeszkedés közti relatív fontosságot egy paraméter segítségével határozhatjuk meg a hibafüggvényben³². A 9. ábra egy harmadfokú spline illesztést mutat be B-spline bázissal (a bázis lineárisan független, azaz egymást nem kifejező függvényeket jelent, és a függvények megkaphatók ezek lineáris kombinációjaként). Mivel nem létezik egyértelműen legjobb technika, így célszerű áttekinteni több módszert is.

A spline módszerek esetén olyan görbét használunk, amik szakaszonként polinomokból (olyan kifejezések, amikben csak számok és változók szorzatai és ilyenek összegei szerepelnek) állnak és teljesítenek bizonyos simasági feltételeket az alkalmazhatóság miatt (folytonosság, differenciálhatóság). Legegyszerűbb ilyen típusú módszer, a lineáris spline-okat leszámítva, a harmadfokú spline. Ennek elméleti megfontolása során egy lineáris rendszert (egyenletrendszert) kapunk, aminek megoldása egyértelmű, az alappontok számának növekedésével viszont kényelmetlenné válik a lineáris rendszer megoldása (ugyanis nagyméretű mátrixot kéne invertálni), illetve a megoldás numerikusan instabil (azaz a paraméterek kicsiny megváltozása is a megoldás nagyfokú módosulását eredményezheti). A módszer módosításával (az ilyen modellek a második derivált alakjából indulnak ki) egyszerűsíthető a lineáris rendszer alakja, és így a megoldása is, de még mindig instabil marad a megoldás. A legcélravezetőbb a B-spline bázis használata, amikkel már numerikusan stabil algoritmust kapunk, ezeket viszonylagos bonyolultságuk miatt nem részleteznénk. A kanadai adósságkezelő (Bolder és Gusba 2002) kétféle típusú hozamgörbe modelleket vizsgált, a spline és a függvény alapúakat, a továbbiakban ezeket tekintjük át.



9. ábra Harmadfokú spline illesztése B-spline bázissal (Forrás: Bolder, D. J. és Gusba, S. (2002): *Exponentials, Polynomials, and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada* 23.o.)

³² $\sum_{i=0}^N (S(x_i) - f_i)^2 + \lambda \int_a^b (S''(x))^2 dx$, ahol N az alappontok száma, $S(\cdot)$ a polinom, f_i a függvényértékek és λ az illeszkedés és a simaság közti relatív fontosság.

5.2.2.2A SPLINE ALAPÚ HOZAMGÖRBE MODELLEK

Az előbb említett görbeillesztési módszerek esetén mindig meg voltak adva a függvényértékek. A kötvények esetén, ahogy volt róla szó, csak a kötvényárfolyamokat tudjuk mérni, a teljes zérókuponhozamgörbe pontjait nem. Így a feladat a spline alapú modellek esetén olyan technikák meghatározása, amellyel olyan szakaszonként harmadfokú polinomokat tudunk illeszteni, hogy az eredményül kapott hozamgörbével minimális legyen a megfigyelt árak eltérése. A módszerek alapgondolata a következő: kiindulnak a hozamgörbe egy tetszőleges függvényéből és erre a görbére illesztenek a B-spline bázis segítségével harmadfokú spline-t. Ezután meghatározzák az így illesztett görbével az elméleti árakat, majd a súlyozott eltérések alapján optimalizálják a spline együtthatóit. A súlyokat egy diagonális (csak a főátlóban vannak elemek) mátrixban adják meg, és az egyes kötvények súlya a durationjük reciproka (ugyanis ezzel nagyobb súly kerül a rövid kötvényekre, amik árban kisebb a volatilitás). Ez még csak az illeszkedést méri, így a simaság miatt egy büntetőfüggvénnyel is kiegészíthetjük a célfüggvényt³³. Ebben szintén egy paraméterrel jellemezhetjük a simaság és az illeszkedés fontosságát, a paraméter alakjára több lehetőség is van (általában jobb, ha a hosszabb lejáratokon nagyobb simaságot követelünk meg). Ez a feladat így egy nem-lineáris optimalizálás (amikor a célfüggvény vagy a korlátok nem lineárisak), erre Fischer, Nychka és Zervos (FNZ) (1995) tanulmányában bemutatott egy algoritmust. Ugyanebben a tanulmányban három különböző modellt javasolnak, aszerint, hogy a hozamgörbe milyen függvényéből indulnak ki. Eszerint megkülönböztethetjük a **McCulloch és FNZ** modellt (itt a diszkontfüggvényt használják), az **FNZ-Zero** modellt (a hozamgörbe konstansszorososa) és az **FNZ-Forward** modellt (a pillanatnyi forward kamatból indul ki).

5.2.2.3A FÜGGVÉNY ALAPÚ HOZAMGÖRBE MODELLEK

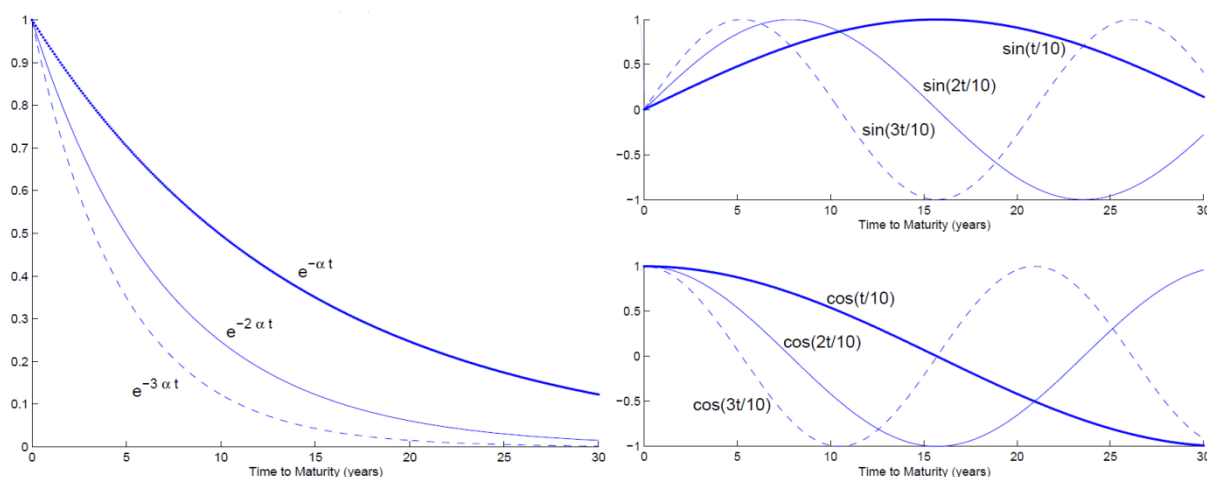
A függvényalapú modellek esetén nem szakaszonként illesztenek, hanem a hozamgörbe teljes időtávjára egy függvényt határoznak meg úgy, hogy a megfigyelt és az elméleti árak közti négyzetes eltérés minimális legyen. Az első tárgyalt modell a Merrill Lynch exponenciális spline modell (**MLES**, Li és mtsai. 2001), itt a diszkontfüggvényt exponenciális bázisfüggvények (később ezeket ortogonalizálják) lineáris kombinációjával közelítik³⁴, és a kifejezésben az együtthatók mellett a hosszú távú pillanatnyi forward kamat szerepel ismeretlen paraméterként. A használt bázisfüggvények számánál azt mérlegelik, hogy mennyivel javul a reziduális hiba (a négyzetes eltérések átlagának gyöke), miközben nő a paraméterek száma (ez a bázisfüggvények száma plusz egy). Az MLES legnagyobb előnye, hogy az elméleti árfolyamok az ismeretlen paraméterek lineáris függvénye, ez abból adódik, hogy az árfolyam mindig a diszkontfaktorok lineáris függvénye, és most a diszkontfaktorokról is ugyanezt tettük fel. Végül az ismeretlen paramétereket az ún. log-likelihood függvény maximalizálásával kapják, azaz megkeresik azokat a paramétereket, amik mellett a legnagyobb a valószínűsége, hogy a megfigyelt kötvényárfolyamokat kapjuk. A hosszú távú pillanatnyi

³³ $\min_{\theta} \left((P - \hat{P}(\theta))^T W (P - \hat{P}(\theta)) + \int_0^T \lambda(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(t, \theta) \right)^2 dt \right)$, ahol P a megfigyelt ár, $\hat{P}(\theta)$ az elméleti ár a θ együtthatók mellett, W egy súlymátrix, $h(t, \theta)$ a kiinduló függvény, és $\lambda(t)$ a relatív arány a simaság és az illeszkedés fontossága között.

³⁴ $d(t) = \sum_{k=1}^N \zeta_k e^{-k\alpha t}$, ahol $d(t)$ a diszkontfaktor, ζ_k paraméterek és α a hosszútávú pillanatnyi forward kamat.

forward kamat lehet külső adottság (közgazdasági megfontolások alapján), vagy kaphatjuk egyváltozós optimalizálással (minimalizáljuk a reziduális hibát, mint ennek a paraméternek a függvénye). Ebből adódik az MLES módszer másik előnye, ugyanis nem kell numerikusan optimalizálni, így gyorsabbak a számítások.

Az előző modell változata az **MLES-Fourier** modell. Itt bázisfüggvényeknek az exponenciális függvények helyett trigonometrikus függvényeket választanak³⁵ (a Fourier-sorok bázisfüggvényeit). Ez továbbra is numerikusan stabil modell marad. A 10. ábra bemutatja a két modell esetén használt bázisfüggvények alakját, ezekből állítják elő a hozamgörbét. Látható, hogy miért ezt a két függvénytípust választották, ugyanis az egyik hamar hozzásimul az x -tengelyhez, míg a másik periodikus ismétlődik.



10. ábra A negatív exponenciális és a Fourier-sor bázisfüggvények az MLES és az MLES-Fourier modellek esetén (Forrás: Bolder, D. J. és Gusba, S. (2002): *Exponentials, Polynomials, and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada* p. 46, 50.o.)

A benchmark kötvények piaca a leglikvidebb, így ezekről lehet feltételezni, hogy a megfigyelt árfolyamuk a legkisebb hibát tartalmazza. Ezért az **MLES-Benchmark** modell esetén egy súlymátrix segítségével ezekre (természetesen bármely kötvényekre is lehet) nagyobb súlyt helyeznek. Ez végül egy korlátozott optimalizálási problémához vezet, ugyanis megkövetelik azt a korlátozó feltételt, hogy a benchmark kötvények esetén a megfigyelt és elmélet árfolyam közti eltérés 0 legyen.

5.2.2.4 A MÓDSZEREK VIZSGÁLATA

Mivel egyes kötvények piaca nem elég likvid, vagy speciális tulajdonságokkal rendelkeznek, így ki kell szűrni azokat, amik nem használhatóak a hozamgörbe becslésénél. Bolder és Gusba (2002) az alábbiakra említ korlátokat: (1) fennálló mennyiség (a minimális likviditás miatt), (2) a piaci hozam és a kuponok eltérése (a túlzott eltérést nem szeretik a befektetők adózási szempontok miatt), (3) lejárat (az éven belül lejáró kötvényeket zárja ki) és (4) a kamatozás típusa (az inflációindexált kötvények esnek ki). Az előző feltételek mellett a benchmark papírok és a diszkontkincstárjegyek árfolyam adatait azonban biztosan felhasználja.

³⁵ Például kilencelemű bázis esetén $\left\{1, \sin\left(\frac{nt}{10}\right), \cos\left(\frac{nt}{10}\right); n = 1, 2, 3, 4\right\}$.

Az illeszkedés megfelelésére vonatkozó utólagos vizsgálat során két főbb mérőszám lehetséges, az átlagos négyzetes eltérés gyöke³⁶ (RMSE, Root-Mean-Square Error) és az átlagos abszolút eltérés³⁷ (MAE, Mean-Absolute Error), a kettő közül az első jobban érzékeny az extrém értékekre. Ezeket mind az árfolyamokra, mind a hozamokra ki lehet számítani, és az időben is lehet ábrázolni az egyes modellek esetén. A dinamikus ábrázolás segítségével ki lehet szűrni adatbeli hibákat és outlier (a többitől eltérő, kilógó) adatokat, ezeket az időpontokat azonban külön-külön meg kell vizsgálni, hogy mi lehet az eltérés oka. További mérőszámok is elképzelhetők a kötvények vételi és eladási árfolyama miatt, ugyanis a becsléshez ezek átlagát használják és elvárható, hogy a becsült árfolyam legalább e sávon belülre essen. Ezért a becslést jellemző újabb mutatószám a találati arány³⁸ (beleesik a sávba), az „olcsó” arány (felülbecsli az eladási árat) és a „drága” arány³⁹ (alulbecsli a vételi árfolyamot). Végül a modelleket még a futásidejük alapján is lehet csoportosítani. További mérőszámok (korreláció és sMAE) találhatók a későbbi, *Optimalizálás* részben.

5.3 Paraméterek becslése, előrejelzés

Az adósságportfólió modell használhatósága a változók és az alkalmazott hozamgörbe modell mellett leginkább a paraméterek helyes megválasztásán múlik. Kalibrálás esetén úgy állítják be a paraméterek értékeit, hogy a kívánt feltételek teljesüljenek. Ennél sokkal fontosabb azonban, amikor historikus adatokból becslik a paraméter értékeket, így a következőkben ezeket tekintjük át, miután megemlítettünk néhány módszert, amit mintavételen alapuló következtetéseknél alkalmaznak. Ezek azért fontosak ebben a helyzetben, mert nem mindig áll rendelkezésre megfelelő hosszúságú idősor az elegendő mintanagysághoz, vagy pedig nem lehetséges tesztadatokon megismételni a becsült paraméterek helyességét.

5.3.1 Mintaújravételezési eljárások

A mintaújravételezési eljárások elsődleges célja egy adott mintából (megfigyelésekből) a lehető legtöbb információt kinyerni, ezáltal pontosabbá téve a becslést egyes statisztikai mutatókra, például az átlagra, a szórásra, vagy különböző percentilisekre (a Value-at-Risk mutatók is ezek). Másik cél a hiba eloszlásának becslése, ugyanis a modell használhatóságát jellemzi, hogy az abban becsültek mennyire térnek el a valós világtól. Kevés adat esetén, vagy teszt adatok hiányában így a meglévő adatokat replikálhatjuk, az újravételezett mintával is meghatározhatók konfidencia intervallumok, és elvégezhetők hipotézisvizsgálatok. A konfidencia intervallum azt a sávot jelöli, ahova a becsléshez képest a valós érték adott valószínűséggel beleesik, míg a hipotézisvizsgálat egy adott feltevés statisztikai tesztje,

³⁶ $RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(\hat{P}_i - P_i)^2}{N}}$, ahol N a becslésben résztvevő kötvények száma, $\hat{P}_i$ a becsült elméleti és P_i a megfigyelt árfolyam.

³⁷ $MAE = \sum_{i=1}^N \frac{|\hat{P}_i - P_i|}{N}$, a jelölések megegyeznek az RMSE-nél használtakkal.

³⁸ $Hit\ Ratio = \frac{\#\{\hat{P}_i \in \mathcal{A}: P_i^b \leq \hat{P}_i \leq P_i^o\}}{N}$, ahol $\#$ a halmaz elemszámát jelöli, $\mathcal{A}$ az N kötvény halmazát jelenti, P_i^b és P_i^o a vételi és eladási árfolyam.

³⁹ $Cheap\ Ratio = \frac{\#\{\hat{P}_i \in \mathcal{A}: \hat{P}_i \geq P_i^o\}}{N}$ és $Rich\ Ratio = \frac{\#\{\hat{P}_i \in \mathcal{A}: \hat{P}_i \leq P_i^b\}}{N}$ az előző jelölésekkel.

például, hogy a minta alapján tekinthető-e a mögöttes (amiből a megfigyeléseket végeztük) eloszlás várható értéke nullának.

Egyik mintaújravételezési eljárás az úgynevezett **jackknife módszer**. Ennek során a minta egyes részhalmazait veszik, és e csoportok becsléseinek átlaga adja a jackknife becslést. Az egyes részhalmazok kiválasztására több lehetőség van, az egyik az 1-törléses jackknife, ekkor 1 elemet törölnek a mintából, míg a d -törléses jackknife esetén d megfigyelést.

Másik lehetséges módszer a **bootstrap módszer**, ez az új mintát az eredeti mintából visszatevéssel generálja (egy mintaelem többször is előfordulhat, az előző módszer lényegében a visszatevés nélküli eset). A bootstrap módszer előnye, hogy bonyolultabb statisztikák becslésére is alkalmazható, amikre a jackknife módszer nem, illetve, hogy intervallumbecslések (konfidencia intervallumok) is készíthetők. Hátránya azonban, hogy lassabb és nem mindig konzisztens, azaz nem feltétlenül javul a becslés pontossága a mintaelemszám növelésével. Célszerű továbbá bootstrap módszert használni akkor, amikor nem ismert, vagy túl bonyolult az elméleti eloszlás, amiből a minta származik.

Mintaújravételezési eljárásnak tekinthető a később említendő általánosított keresztvalidáció is olyan szempontból, hogy az is a megfigyeléseket osztja fel. Eltérés a céljában van, ugyanis az a használt modell érvényességét vizsgálja, azaz, hogy valóban a megfelelő modell kerül-e kiválasztásra.

5.3.2 Paraméterbecslés

A modellek becslése során lényeges az olyan paraméterértékek meghatározása, amiket alkalmazva a modell a megfigyelt hozamgörbékkel konzisztens eredményeket ad. Rossz egy modell, ha nem illeszkedik a megfigyelt adatokra, vagy pedig a paramétereket nem lehet megfelelően becsülni. A paraméterek számának meghatározásáról az információs kritériumok kapcsán lesz szó az *Optimalizálás* részben. A többfaktoros affin hozamgörbe modellek esetén a paramétereket többek között maximum likelihood módszerrel, Kálmán-szűrővel vagy pedig valamilyen szimulált momentumok módszerével határozhatjuk meg.

A **maximum likelihood módszernél** a paraméterek értékének azt választjuk, amely mellett a legnagyobb valószínűséggel kapjuk az adott realizációt. Ezt a valószínűséget az úgynevezett likelihood függvény adja meg, de számolási szempontból gyakran célszerűbb a függvény logaritmusát, a loglikelihood függvényt maximalizálni. Így az első cél az affin modellek esetén e függvény meghatározása. Ez három faktor esetén három különböző lejáratú zérókupon hozamának együttes eloszlását jelenti. Ehhez ki kell fejezni a faktorokat (állapotváltozók) a hozamok függvényében, ugyanis azok esetében ki lehet számolni az átmenet sűrűségfüggvényét. Az átmenetsűrűség határozza meg, hogy mekkora valószínűséggel lesz a változó a t időpillanatban valamilyen állapotban, ha ismert, hogy egy korábbi időpontban milyen értéket vett fel. Mivel az állapotváltozók dinamikájában Wiener-folyamat megváltozás szerepel, így normális eloszlású lesz, aminek a paramétereit (várható érték, szórás) ki lehet számolni (a szórás meghatározása analitikusan nehéz feladat volna, de numerikusan könnyen megy). Ezután már megkapható a loglikelihood függvény. Ha több zérókupon árát szeretnénk használni, akkor a loglikelihood függvényt kell módosítanunk plusz tagokkal. Végül a kapott függvényt kell maximalizálni, hogy megkapjuk a paraméterek becslését. Hasonló becslési módszer a maximum kvázi-likelihood (QML, quasi-maximum

likelihood) módszer, ahol a valós likelihood függvény egyszerűbb alakjának számolják ki a szélsőértékét.

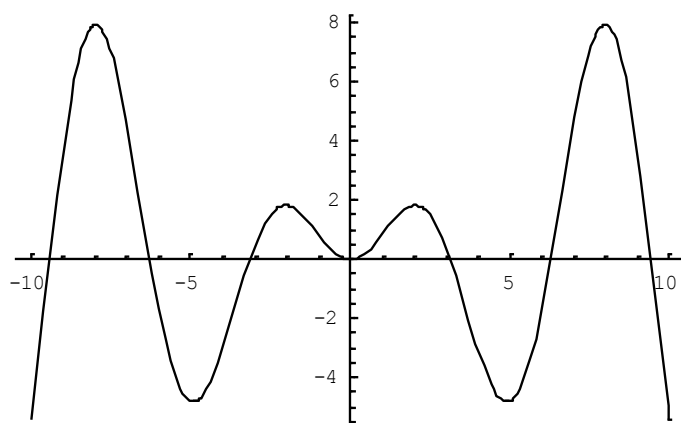
A **Kálmán-szűrő** használata kapcsán meg kell említeni az állapotter modelleket (erről részletesebben a 4. Matematikai összefoglalóban). Az ezeket meghatározó két egyenlet (mérési és átmenet) kapcsolatot teremt a mérési eredmények (például kötvényárfolyam) és a mögöttük meghúzódó – akár látens – állapotváltozók (például szint, meredekség, görbület) között. A mérési egyenlet a megfigyelt változók és az állapotváltozók közti kapcsolatot írja le mérési zaj (hiba) figyelembe vételével, míg az átmenet (állapot) egyenlet az állapotváltozók időbeli fejlődését határozza meg állapot hibák (ezek lehetnek korreláltak vagy korrelálatlanok) mellett. Az állapotter modellek egyik előnye, hogy a legtöbb idősor elméleti modell (például ARMA, ARIMA folyamat) leírható ezzel. A Kálmán-szűrő az állapotter modellekhez kapcsolódó szűrési problémára nyújt megoldást. Ez a probléma egy rendszer valódi értékeire vonatkozó legjobb becslés meghatározását jelenti, miközben zajos megfigyelések állnak rendelkezésre. Tehát az algoritmus a mért adatokból kiszűri a zajt. A hozamgörbével kapcsolatosan a zérókupon hozamok megfigyelési zaja (1) adatbeviteli hibákból, (2) nem egyidejű mérésekből és (3) a vételi és eladási árfolyamok különbözetéből adódhatnak. Leegyszerűsítve a Kálmán-szűrő algoritmus (a kezdőállapot meghatározása után) minden lépésben két részből áll, a becslésből és a frissítésből. A becslés során az állapotváltozók előző időszak értékeiből becslést adnak az adott időszaki állapotra (a priori állapot) és a hibák kovariancia mátrixára (ez méri a becslés pontosságát). Ezután a frissítés során a megfigyelések alapján a becsült állapotváltozókra és a kovariancia mátrixra új becslést adnak (a posteriori becslés), és ezáltal a következő becslés is pontosabbá válik. A Kálmán-szűrő rekurzív becslési eljárás, ugyanis csak az aktuális megfigyelések és az előző lépésbeli becsléseket használja. Tekinthető a korábban említett rejtett Markov-modellek analogonjának, ott azonban az állapotter csak diszkrét lehet, míg ebben az esetben folytonos. Másik eltérés, hogy a Kálmán-szűrő esetén feltesszük, hogy a zajok normális eloszlásból származnak, és további korlát, hogy a szűrő csak lineáris modellekre használható. Természetesen léteznek olyan algoritmusok, amik feloldják ezeket a megkötéseket, ilyen például a bővített Kálmán-szűrő.

A **momentumok módszere** (MM, Method of Moments) abból indul ki, hogy egy eloszlás momentumai és az eloszlás paraméterei függvényszerű kapcsolatban állnak egymással. Ezeket a függvényeket az elméleti és tapasztalati momentumok egybevetése határozza meg, és így a paramétereket a mintából nyert empirikus (tapasztalati) momentumok segítségével határozzák meg. A módszernek több továbbfejlesztése van, ilyen például az általánosított momentumok módszere (GMM, Generalized Method of Moments), illetve a hatékony momentumok módszere (EMM, Efficient Method of Moments). Ezek általában akkor hasznosak, amikor a likelihood függvény megoldhatatlan, és így a maximum likelihood módszer nem alkalmazható. A GMM módszer továbbfejlesztése a Bolder (2007) által említett szimulált momentumok módszere (SMM, Simulated Method of Moments). Ez azokra az esetekre nyújt megoldást, amikor az elméleti momentum függvények nem számolhatók egyszerűen. További lehetőség a paraméterek becslésére a **Bayes-i módszer** család, ahol felteszik, hogy a paraméterek maguk is valószínűségi változók, ezeket azonban nem részletezzük.

A statisztikai elméletben a paraméterbecslések hatékonyságát több kritériummal is lehet mérni. Egy becslés torzítatlan, ha annak várható értéke megegyezik azzal a paraméterrel, mint amit becsültünk. Ez azt jelenti, hogy a becslés legalább átlagban visszaadja a paraméter

tényleges értékét. Csak aszimptotikus torzítatlanságról lehet beszélni akkor, ha csak a minta elemszámának végtelenhez tartása mellett teljesül az előző tulajdonság. A torzítatlan becslések között a szórásuk alapján tehetünk különbséget, azaz egy becslés hatásosabb a másiknál, ha a szórása nem nagyobb. Ez alapján egy becslés hatásos, ha nincs nála hatásosabb. A hatásosság szemléletesen azért jó, mert ezáltal a paraméter becslése annak tényleges értéke körül a legkevésbé ingadozik. További elvárható tulajdonság egy torzítatlan becsléstől, hogy a megfigyelések növekedésével javuljon a becslés pontossága, az ezt teljesítő becsléseket nevezzük (gyengén vagy erősen) konzisztens becslésnek (erről volt szó a minatójrávételezésnél). A maximum likelihood módszer például különböző feltételek teljesülése esetén erősen konzisztens, aszimptotikusan torzítatlan és aszimptotikusan hatásos becslést ad. Egy adott gyakorlati modell esetén használható becslési eljárást azonban nem ezek a tulajdonságok határozzák meg elsősorban, hanem a modell tulajdonságai és felépítése.

A Nelson-Siegel típusú modelleknél (faktorok és faktorsúlyok lineáris kombinációja) a becslési algoritmus két lépésből áll, ugyanis a faktorsúlyok függetlenek a modell paramétereitől (ez nem teljesen pontos, de a nem lineáris paraméterre, az exponenciális késleltetésre, egy konstans értéket határoznak meg). Itt, ahogy a görbeillesztésen alapuló hozamgörbe modelleknél volt szó róla, a kötvényárfolyamok az elemi kötvények árfolyamával kifejezhetők, utóbbiak pedig az állapotváltozók (jelen esetben a paraméterek) függvénye. Így az egyes időpontokra meghatározhatjuk az állapotváltozók optimális értékeit, úgy, hogy minimalizáljuk a számított és tényleges kötvényárfolyamok eltéréseit, miközben a különböző kötvényeket a módosított durationükkel fordítottan súlyozzuk. A második lépésben az állapotváltozók dinamikáját kell meghatározni. Ezek fejlődésére Bolder (2007) elsőrendű autoregresszív, vagy vektorautoregresszív (VAR) folyamatokat használ, az első nem veszi figyelembe az állapotváltozók kapcsolatát, míg a második igen. A VAR folyamatok esetén az egyik legfontosabb paraméter a rend, azaz hogy mekkora késleltetéssel használjuk még fel az adatokat. Erre szolgálhatnak a később említendő információs kritériumok (Akaike, Schwartz, Hannan-Quinn). Végül e folyamatok paramétereit kell meghatároznunk az előbb kapott, az optimális állapotváltozó értékekre vonatkozó idősorok alapján.

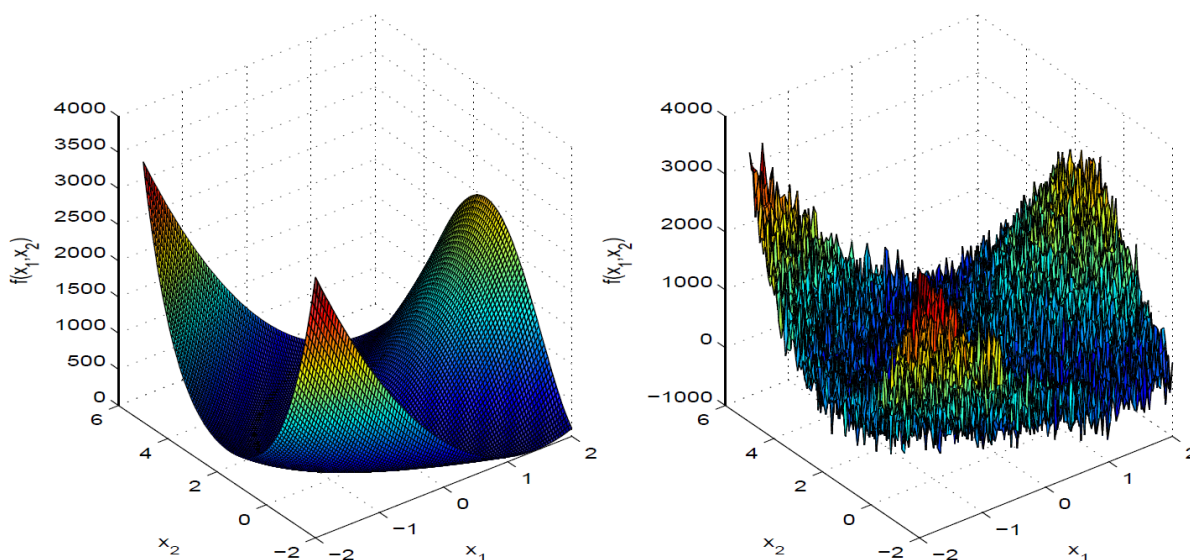


11. ábra Az optimalizálás kezdeti értéktől való függése (Forrás: Saját ábra)

A paraméterek optimalizálása során több probléma is adódhat, ha nem lineáris optimalizálási feladatot kell megoldani. Az egyik ilyen, hogy ekkor függ a kezdőértéktől, hogy a használt optimalizálási algoritmus megtalálja-e a globális minimumot. Erre ad szemléltetést a 11. ábra, ami a $[-10, 10]$ intervallumon ábrázolja az $x \sin(x)$ függvényt és a cél a minimum megkeresése. Látható, hogy ha a 0-ból indulunk, akkor a 0 lesz a minimum (bármelyik irányba

való elmozdulásnál ennél nagyobb értéket kapunk, ezért az algoritmus visszatérít a nullába), de az nem a globálisan legkisebb érték.

Másik lehetséges probléma, hogy az optimalizáló algoritmus néha nagyon lassan konvergál (közelít) az optimumhoz. A konvergenciára való általánosan használt tesztfüggvény az úgynevezett Rosenbrock-féle banánfüggvény⁴⁰, ez látható a következő ábrán. Az ábra jobb oldalán pedig a zajos megfigyelés esetén kirajzolódó függvény látható, ami tovább növeli az algoritmus számításigényét. Ez a függvény azért használható az algoritmus tesztelésére, mert a banán alakú völgyet könnyű megtalálni, de abban a globális minimumot már nehéz.



12. ábra A Rosenbrock-féle banánfüggvény az optimalizáló algoritmus tesztelésére (Forrás: Bolder, D.J. és T. Rubin (2007): *Optimization in a Simulation Setting: Use of Function Approximation in Debt Strategy Analysis*, 21.o.)

Az optimalizálási problémák esetén az előbbieken kívül fontos még megvizsgálni az optimum bemenő adatokra vonatkozó érzékenységet, ugyanis elvárható, hogy kis módosítás az inputon (sokkhatás) ne eredményezzen nagy változást az optimális állapotban.

5.3.3 Előrejelzés

Az optimális portfólió modell jövőbeli lehetőségeket vizsgál, így szükség van a lehetséges hozamgörbe modellek előrejelző képességének vizsgálatára. Az előrejelzés során egy becslést adunk valamilyen valószínűségi változó (például az infláció) jövőbeli értékére vagy eloszlására (például adott időpillanatra vonatkozó költségeloszlás) a jelenig fellelhető múltbeli adatokalapján.

Idősorok esetén a legegyszerűbb módszer a mozgóátlagok használata. Az egyszerű mozgóátlag a legutolsó N időszak átlagát jelenti, míg ha a régebbi adatok kisebb súllyal szerepelnek, akkor súlyozott mozgóátlagról lehet beszélni. Ilyenkor a következő időszaki előrejelzés a mozgóátlag értéke lesz. Általánosabban, az előrejelzés az idősor korábbi értékeinek valamilyen függvénye. Már csak azt a függvényt kell meghatározni, amivel az előrejelzés minél jobb. Ehhez szükséges még azt definiálni, hogy mit tekintünk jó

⁴⁰ $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 + x_1)^2$.

eredménynek, ezt egy célfüggvénnyel lehet megtenni, aminek minimális értéke jelenti a legjobb előrejelzést. Általában a célfüggvény a négyzetes eltérés⁴¹ (MSE, Mean Squared Error), és az ezt minimalizáló előrejelzés a feltételes várható érték. Bolder (2007) ez alapján jelzi előre az állapotváltozók jövőbeli értékeit az affin és a Nelson-Siegel típusú modellek esetén is. A különböző hozamgörbe modellek összevetése az előrejelzések valódi értékektől való eltérése alapján tehető meg. Az eltérés mérésére a korábban említett átlagos abszolút eltérés (MAE) és az átlagos négyzetes eltérés négyzetgyöke (RMSE) használható. Az összehasonlításnál érdemes egyszerűen számítható alapmodelleket is használni, így az vizsgálható, hogy megéri-e a többlet erőforrás használata, azaz jobban teljesít-e a választott hozamgörbe modell, mint ezek az alapmodellek. Ilyen lehet például a véletlen bolyongás, az elsőrendű autoregresszív vagy a vektorautoregresszív folyamat is. A véletlen bolyongás esetén felteszik, hogy a zérókupon hozamok martingálok („igazságos játék”, azaz a folyamat következő értékének várható értéke az aktuális értékkel egyezik meg), így a következő időszaki előrejelzés a változó jelenbeli értéke. Az előrejelzésnél többféle vizsgálat is készíthető aszerint, hogy milyen időtávra előre történik a becslés. A h időszakra előre történő becslés történhet közvetlenül, vagy az egy lépéses előrejelzés h -szori iterálásával is.

Az előrejelzés kapcsán megkülönböztethető mintán belüli (in-sample) és mintán kívüli becslés. A mintán belüli előrejelzés során az egész időszaki adatsor alapján, egyszer történik a paraméterek becslése, azaz azok is felhasználásra kerülnek, amiket később becsülnek a múltbeli adatokon való tesztelés során. Ez nem túl valóságos, ugyanis azt jelentené, hogy az előrejelzésnél előre tudni lehet a változó jövőbeli értékeit. Másik hátránya, hogy nem veszi figyelembe a strukturális változásokat az idősorban (ez a válságok miatt különösen lényeges). A mintán kívüli becslések során az előrejelzési időszak a paraméterbecsléshez használt adatsor időhorizontján kívül esik. Meg lehet még különböztetni a pseudo mintán kívüli becsléseket, ekkor az idő változásával változik a paraméterekhez használt adatsor is, a mintát felosztják két részre ún. tanulási és előrejelzési mintára. A felosztásra két lehetőség van, az egyik a bővülő, míg a másik a gördülő időablak. Az első esetben mindig az időszak elejétől kezdődik a tanulási minta, azaz az idő előrehaladtával egyre nagyobb adatsorból történik a paraméterek becslése. A gördülő esetben az adatsor mindig ugyanolyan hosszúságú, ezt akkor célszerű használni, ha a paraméterek instabilak vagy strukturális változás történt az idősorban.

5.4 Hozamgörbe modellek csoportosítása és összehasonlítása

Ebben a részben különböző hozamgörbe modellek összehasonlításának módszertanáról lesz szó Bolder (2007) tanulmányára alapozva.

5.4.1 Elméleti és empirikus modellek

A modellek típusát az is meghatározza, hogy milyen probléma megoldására használjuk. Ez lehet pénzügyi termékek árazása, ezt az úgynevezett ekvivalens martingál mértékekkel tehetjük meg, ugyanis bizonyos feltételek mellett egy kockázatos kifizetés ára a diszkontált összegének martingál mérték szerinti várható értéke. A martingál mérték használatával

⁴¹ $MSE(g) = \mathbb{E}(Y_{t+1} - g(X_t))^2$, ahol $g(X_t)$ az előrejelző függvény a múltbeli értékek alapján és Y_{t+1} az előrejelzés.

lényegében úgy módosítjuk a valószínűségi eloszlást, hogy az eszközt a befektetők kockázati preferenciái nélkül lehessen árazni, továbbá így a paramétereket kalibrálással lehet meghatározni. Ezzel ellentétben, ha kockázatkezelési problémával kerültünk szembe, akkor az eredeti valószínűségi eloszlást (valós mérték) használhatjuk, és a paramétereket historikus adatok alapján lehet becsülni. Az előzőek alapján megkülönböztethetünk elméleti és empirikus (tapasztalati) modelleket.

Az **elméleti modelleken** belül kedvező tulajdonságaik miatt az affin modelleket vizsgálhatjuk elsősorban, ezek elméletéről a korábban említetteken kívül Dai és Singleton (2003) tanulmányában lehet olvasni. Mivel ez a model család rendkívül gazdag, így meg kell határozni a konkrét, vizsgálandó modelleket. A választásra az affin modellek levezetése során adódó parciális differenciálegyenlet ad lehetőséget, ugyanis annak megoldásához feltételezésekkel kell élnünk. Ezek (1) a zérókupon árfüggvényére, (2) a pillanatnyi kamatláb kifejezésére, (3) a kockázat piaci árának alakjára és (4) az alapul szolgáló sztochasztikus differenciálegyenlet együtthatóira vonatkozik. Ezután a korlátozások alapján választhatjuk ki az összehasonlítható elméleti modelleket.

Az **empirikus modelleken** belül a Nelson-Siegel típusú modellek a célnak leginkább megfelelőek. Ezek lényegében különböző faktorok lineáris kombinációja, így a *Görbeillesztéses hozamgörbe modellek* részben említett modellek is ebbe a csoportba sorolhatók. Diebold és Li (2006) modelljükben az egyes faktorok együtthatóit időben változónak tekintik, miközben az exponenciális késleltetés időben állandó marad (ugyanis ez nem lineáris paraméter és így numerikusan instabil). Ez hasonló a spline és függvény alapú módszereknel is, tehát ha idősorosan is modellezzük a hozamgörbét, akkor szükséges, hogy a lineáris kombináció együtthatói időben változóak legyenek. De Pooter (2007) írásában további lehetséges modellekről (kétfaktoros Nelson-Siegel, négyfaktoros Björk és Christensen, háromfaktoros Bliss, négyfaktoros Svensson, módosított négyfaktoros Svensson) tesz említést, a választásnál azonban arra is figyelni kell, hogy ne legyen túl sok becsülendő paraméter.

5.4.2 Az összehasonlítás elemei

Az összehasonlításhoz felhasználjuk a tartási periódus alatti hozamot⁴² (HPR, Holding Period Return), ami azt számszerűsíti, hogy mekkora hozamot érhetünk el, ha egy eszközt az adott időszak végéig megtartunk. A többlet HPR pedig ennek a kockázatmentes hozamon felüli része, a kockázatmentes hozamnak pedig az időszak végére vonatkozó zérókupon hozam tekinthető. Második tisztázandó fogalom a (tiszt) várakozási hipotézis. Eszerint a HPR-nek minden lejáratú kötvény esetén meg kell egyeznie, azaz a különböző lejáratú kötvények egymás helyettesítői. Empirikus tények bizonyítják azonban, hogy ez nem teljesül, többek között az időfüggő kockázati prémiumnak köszönhetően. Az alkalmazandó modellnek azonban célszerű az ettől való eltérést is megragadnia. Így Bolder (2007) alapján a következő lépések alapján érdemes összehasonlítani a hozamgörbe modelleket:

- a különböző modellek matematikai módszertanának elemzése,
- a modellek paramétereinek becslése ugyanazon adathalmaz alapján,

⁴² $HPR_n = \frac{R_n + (P_{n+1} - P_n)}{P_n}$, P_n a mostani ár, P_{n+1} az időszak végi árfolyam és R_n az osztalék és egyéb bevételek.

- a modellek mintán belüli és mintán kívüli becslőképessége különböző időhorizontokon,
- a többlet HPR mintán kívüli előrejelzésének elemzése különböző időszakok esetén,
- a várakozási hipotézistől való eltérés leírása szimulációs és ökonometriai tesztekkel,
- egy portfólió optimalizációs feladaton való tesztelése.

A hozamgörbe meghatározásához használt módszertan torzíthatja az eredményeket, például az adatok exponenciális spline módszerrel való számítása javíthatja az MLES módszer eredményeit. A HPR előrejelzésének változékonyságát a korábbi szóródási mutatókkal (RMSE, MAE) lehet mérni. A várakozási hipotézistől való eltérés tesztelésére többféle statisztikai módszer létezik, ezeket azonban nem részletezzük, néhányról említést tesz Bolder (2007) tanulmányában. Összefoglalja a kanadai adatokkal végzett vizsgálatok eredményeit, mely szerint az empirikus modellek a mintán belüli és kívüli esetekben is jobb előrejelzést adnak, illetve, hogy még ezek is alig teljesítenek jobban, mint a véletlen bolyongás. Az empirikus modellek közül a Nelson-Siegel modell bizonyult a legjobbnak néhány szempont szerint, és az tudta leírni a várakozási hipotézistől való eltérést.

5.5 Optimalizálás

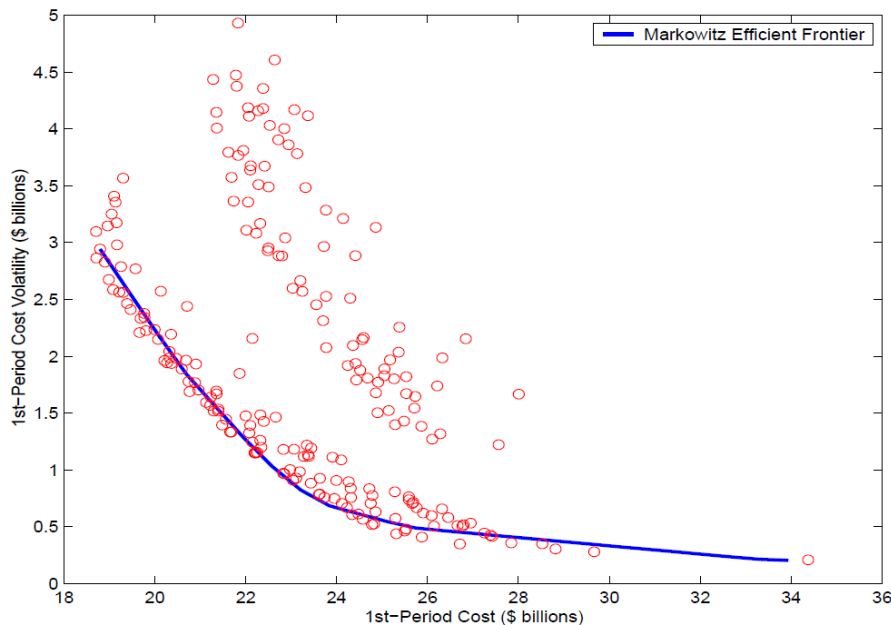
Egy optimális adósságkezelési modell esetén az általános cél valamilyen költség mérőszám várható értékének minimalizálása egy adott időtáv alatt, miközben a költséghez tartozó kockázati mutató adott szint alatt marad és egyéb követelmények is teljesülnek, pl. fennmarad a piaci likviditás. Az optimalizálási módszerek ismertetéséhez először a portfólió elméletben ismert Markowitz-féle modellt mutatjuk be.

5.5.1 Markowitz-féle portfólió elmélet

A döntéselőkészítés során néha elegendő csupán a költségek és a kockázatok közötti átváltás meghatározása. Ehhez a költség-kockázat térben lehet ábrázolni az egyes stratégiákhoz tartozó pontokat, ahogy a 13. ábra is mutatja. Ez akár többdimenziós is lehet, a török adósságkezelő például a költség, piaci kockázat és likviditási kockázat által meghatározott térben ábrázolta a portfóliókat.

A közismert Markowitz-féle portfólió kiválasztási modell alapján itt is elkülöníthetünk határ- és hatékonyportfóliókat. Makara (1996) összefoglaló írása alapján határportfóliónak tekinthető egy portfólió, ha nem létezik olyan másik portfólió, aminek várható költsége megegyezik, de a kockázata kisebb, míg a hatékony portfóliók esetén pedig olyan portfólió nem létezhet, aminek várható költsége vagy kockázata kisebb egyenlő, és legalább az egyik szigorú egyenlőtlenség. Ezen módszerrel grafikusan elemezhetők a kapott eredmények, eldönthető, hogy két azonos várható költségű vagy kockázatú portfólió közül melyik dominálja a másikat. Az olyan esetben, amikor az egyik portfóliónak kisebb a várható költsége, de nagyobb a kockázata, a döntéshozók preferenciái alapján kell döntenie. A hatékony portfóliók görbéje úgy kapható, hogy megkeresik azokat a súlyokat, amik adott várható költség mellett minimális kockázatokat

eredményeznek⁴³. Esetünkben azonban módosítás nélkül nem használható a Markowitz-féle hatékony portfóliók modellje, mivel (1) nem tesszük fel, hogy a költségek normális eloszlásból származnak (ez ahhoz szükséges, hogy elég legyen csupán az első két momentumot vizsgálni), (2) az adósságmodell nem egyperiódusú és (3) ez a modell nem veszi figyelembe az útfüggőséget (az n . kimenetel függ az $n - 1$ -től).



13. ábra A hatékony portfólió halmaza a költség-kockázat térben (Forrás: Bolder, D.J. (2003): *A Stochastic Simulation Framework for the Government of Canada's Debt Strategy* 64.o.)

Ha nem elegendő ez a típusú grafikus elemzés, akkor optimalizálnunk kell. Az optimális megoldás megkeresése a sztochasztikus optimális irányítás témakörébe vezet. Ezt ebben a tanulmányban nem részletezzük, csak általánosságban összefoglaljuk Bolder (2003) írása alapján a feladat nehézségét és korlátait. A *Paraméterbecslés* részben már említettünk általános nehézségeket az optimalizálási feladattal kapcsolatosan.

5.5.2 Az optimalizálási probléma

Az optimalizálás első lépéseként szükséges a kezelendő változók listájának meghatározása többfaktoros affín hozamgörbe modellt feltételezve. (Más hozamgörbe modellek esetén a lista változhat, azonban az optimalizálási probléma tulajdonságai és következtetései azonosak.) A változók esetén zárójelben az azokra ható más változók szerepelnek. E lehetséges változók:

- a kiinduló adósságállomány,
- finanszírozási szerkezet (idő),
- a piaci likviditási korlátok melletti lehetséges finanszírozási szerkezetek halmaza,
- a gazdaság állapota (idő),
- pillanatnyi kamatláb (idő, állapotváltozók),
- a pillanatnyi kamatláb fejlődését meghatározó állapotváltozók (idő),

⁴³ $\min_{\omega_k} \frac{\omega_k^T \Sigma \omega_k}{2}$, a következő korlátok mellett, $\omega_k^T \underline{1} = 1$, $\omega_k^T \underline{\mu} = \mathbb{E}(\mu)$ és a ω_k súlyvektor minden eleme $[0,1]$ -beli.

Az előző optimalizálási feladatban ω_k a súlyvektor, $\underline{1}$ a csupa egyesből álló vektor, Σ a normális eloszlású költségvektor varianciája, $\underline{\mu}$ a várható költségek vektora, végül $\mathbb{E}(\mu)$ az egész portfólió várható költsége.

- kötvényárfolyam (idő, lejárat, a gazdaság állapota, pillanatnyi kamatláb),
- nettó finanszírozási szükséglet (idő, a gazdaság állapota, kötvényárfolyam),
- bruttó finanszírozási szükséglet a lejáratokat is figyelembe véve (idő, finanszírozási szükséglet, finanszírozási szerkezet, kiinduló adósságállomány),
- adósságköltség (idő, bruttó finanszírozási szükséglet, kiinduló adósságállomány, kötvényárfolyam).

Ezekkel már leírható a feladat matematikai alakja⁴⁴, a feladat nehézségét a változók közti komplex, nem lineáris kapcsolat adja. Így már pontosabban definiálható az optimalizálási feladat, ami Bolder (2003) tanulmánya alapján a következő. Úgy irányítani (finanszírozási szerkezet) egy rendszert (adósságportfólió), amire véletlen erők hatnak (hozamok, a finanszírozási szükséglet, makrogazdaság), hogy a célváltozó (várható adósságköltség) egy időintervallum (időtáv) alatt optimális legyen, miközben megkötéseket teszünk a kockázat (variancia) maximális nagyságára és a likviditás (kincstári egységes számla) minimális szintjére vonatkozóan. A probléma kimondása egyszerű, viszont az elméleti megoldása nehézségekbe ütközik. Ez annak köszönhető, hogy (1) az elméletbeli folyamatok folytonosak, míg a valóságban diszkrét, (2) a költségfüggvény nem ismert, a véletlentől függ, csak numerikusan határozható meg (és ez számításigényes folyamat), (3) a különböző optimalizálási algoritmusokhoz „jól viselkedő” (azaz teljesítenek bizonyos tulajdonságokat) függvényekre lenne szükség, ami itt nem teljesül. Tehát egyszerűsítések nélkül optimális finanszírozási szerkezet nem kapható, de a költségek, a kockázatok és alejárati struktúra közti átváltások természetéről pontosabb kép alakul ki, mintha a költség-kockázat térben ábrázolnánk a portfóliókat.

5.5.3 Az optimalizálás és annak egyszerűsítése

Az optimalizálandó célfüggvénnyel kapcsolatosan Bolder és Rubin (2007) több problémát is említ. Egyik ilyen, hogy a nem lineáris optimalizálásnál (ha maga a függvény vagy valamelyik korlát nem lineáris) általában iterációs algoritmust használnak, aminél a célfüggvény gradiense is szükség van (az egyes változókra vonatkozó parciális deriváltak vektora), ezek kiszámítása pedig időigényes. Másik probléma, hogy a célfüggvény nem egyértelmű, így több lehetőségre is le kell futtatni az algoritmust. A célfüggvényről az azonban elmondható, hogy általában az adósságköltség eloszlás néhány momentumától függ, ez lehet például annak várható értéke vagy varianciája. Ahogy azt előbb említettük, a célfüggvény az egyes finanszírozási szerkezetektől is függ, és így minden egyes stratégia esetén újra kell futtatni a szimulációt. Ez rengeteg időbe telne, így Bolder és Deeley (2011) a következő megoldást használja. Lefuttatnak fix számú szimulációt különböző finanszírozási szerkezetek esetén, majd tetszőleges stratégiára ezeknek az adatoknak a felhasználásával approximálják a célfüggvényt. A közelítés során tehát olyan függvényt keresnek, amivel a megfigyelt pontokbeli, valós értékek a legkisebb mértékben térnek el a függvény által becsülttől, így lényegesen alacsonyabbá válik a számítás időigénye.

⁴⁴ $\min_{\theta(t)} \mathbb{E} \left(\int_0^T c(t, f(\theta(t)), \Xi, P(t)) dt \right), \mathbb{D}^2 \left(\int_0^T c(t, f(\theta(t)), \Xi, P(t)) dt \right) \leq \delta, \theta(t) \in \Theta, \text{ ahol } \theta(\cdot) \text{ a finanszírozási szerkezet, } \Theta \text{ a lehetséges stratégiák halmaza, } f(\cdot) \text{ a finanszírozási szükséglet, } \Xi \text{ az induló portfólió, } P(\cdot) \text{ a kötvényárfolyam, } c(\cdot) \text{ a költségfüggvény és } \delta \text{ a kockázatra vonatkozó felső korlát.}$

5.5.3.1 FÜGGVÉNYEK KÖZELÍTÉSE

Az approximálás során először meg kell határozni a használandó közelítő eljárást, majd ezután ellenőrizni kell, hogy a közelítés valóban segít-e, gyorsabbá válik-e az optimalizálás. Ez triviálisnak tűnhet, azonban mégsem az, ugyanis az adósságkezelés során az illeszkedésnek kellően pontosnak kell lennie egy véletlen, nem lineáris, zajos, sokdimenziós függvényre, miközben kevés adat áll rendelkezésre. Bolder és Rubin (2007) a következő approximációs eljárásokat vizsgálja:

- legkisebb négyzetek módszere (OLS, Ordinary Least Squares),
- nem-paraméteres mag-regresszió (NKR, Non-parametric Kernel Regression),
- többváltozós, alkalmazkodó spline-regresszió (MARS, Multivariate Adaptive Regression Splines),
- projekció alapú regresszió (PPR, Projection Pursuit Regression).

Ezeket a módszereket nem részletezzük, csak az alapötletüket vázoljuk fel. Az OLS a négyzetes eltéréseket minimalizálja, míg az NKR esetén egy úgynevezett magfüggvényt (különböző feltételeket kielégítő súlyfüggvényt) használnak a megfigyelések súlyozására, a becslendő ponthoz közeli megfigyelésekre nagyobb súlyt helyezve. A MARS a legösszetettebb eljárás, ennek során tartományokat határoznak meg, és azokon konstans (állandó) függvényekkel közelítenek. Végül a PPR esetén az alapötlet a dimenziócsökkentés, az approximáció során lineáris projekciókat használnak, azaz vetítéssel egyszerűsítik a sokdimenziós függvényeket.

Az approximációs algoritmusokat két fő szempontból lehet jellemezni. Az első, hogy hogyan tanul az eljárás, azaz miként illeszti a közelítő függvényt a valós adatokra, míg a második a jóslás, aminél azokra az adatokra történik becslés, amik nem szerepelnek a tanulási fázisban. Az elsőnél probléma lehet, hogy a függvény túlságosan illeszkedik az adatokra. Ez elsőre furcsán hangzik, két ok miatt azonban valóban nem szerencsés, ha csak az eltérések minimalizálása a cél. Egyik ilyen, hogy megnövelheti a paraméterek számát, ami azok értelmezhetőségét rontja, míg a másik, hogy a megfigyelések zajosak, így túlzott illeszkedés esetén romlik a mintán kívüli becslés, ugyanis a függvényértékekkel együtt a hibákat is becsüljük.

Ahhoz, hogy össze lehessen hasonlítani a modelleket, érdemes tisztázni, hogy milyen kritériumoknak is kell megfelelniük. Bolder és Rubin (2007) a vizsgálat következő dimenzióit javasolja:

- az adatokra való szoros illeszkedés mintán belüli és kívüli esetekben is adott nagyságú zaj (mérési hiba) és dimenzió (paraméterszám) esetén fix számú számítás mellett,
- egyszerű és gyors implementálás a tanulási és becslési fázisban,
- egyszerű interpretálhatóság, azaz ne tűnjön fekete doboznak,
- kellő simaság az optimalizáláshoz,
- adjon betekintést a függvény természetébe.

A mintán kívüli illeszkedés számszerűsítésére használhatók a szokásos MAE és RMSE mérőszámok, ezen kívül ki lehet számolni a becsült és a valós függvényértékek közti

korrelációt⁴⁵ is. Ezeknél a vizsgálatoknál felteszik, hogy a tanulási minta zajos, míg a tesztelési minta pontos megfigyeléseket tartalmaz. Az előbbi korrelációt azonban óvatosan kell kezelni, ugyanis lehet úgy 1 az értéke, hogy nagyok az eltérések, a számérték inkább azt mutatja meg, hogy a közelítő függvény mennyire ragadja meg az eredeti függvény alakját. Ezen kívül említi Bolder és Rubin (2007) a skálázott átlagos abszolút eltérést⁴⁶ (sMAE, scaled Mean Absolute Error), ez a függvényérték nagyságával normalizálja az eltéréseket, így százalékosan értelmezhető.

Az approximáció azt a célt szolgálja, hogy ezáltal gyorsabb legyen az optimalizálás, így szükséges ebből a szempontból is mérőszámokat adni. Az alapfeladat a célfüggvény minimalizálása volt, így elvárható követelmény egy közelítő eljárástól, hogy az úgy kapott függvényen lefuttatott optimalizálás az eredeti minimum értékhez közeli optimumot adjon. A *Paraméterbecslés* részben volt szó róla, hogy az optimalizálási stratégiák függhetnek a kezdőponttól, így szükséges ezeket az eltéréseket több indulóérték esetén is kiszámítani. Bolder és Rubin (2007) két mérőszámot javasol, az egyik a különböző kezdőállapotból indított optimalizáció eredményeként kapott minimumhelyek távolságának a mediánját⁴⁷ tekinti, míg a másik a függvényérték eltéréseit⁴⁸ használja. A különböző approximáló eljárások konkrét tesztelésére Bolder és Rubin három függvénytípust használ, (1) egy parabolát, (2) egy trigonometrikus függvényt és a korábban említett (3) Rosenbrock-féle banánfüggvényt.

5.5.3.2 LEHETSÉGES CÉLFÜGGVÉNYEK ÉS KORLÁTOK

Említettük, hogy nincs egységesen elfogadott optimalizálandó célfüggvény, így szükséges áttekinteni a lehetőségeket. Mivel az alapvető cél a költségek csökkentése minimális kockázat vállalása mellett, így **Hiba! A hivatkozási forrás nem található.** részben említett költségműtatók jó kiindulási alapok. Az áttekintés során Bolder és Rubin (2007) munkájára hivatkozunk, lényegében az optimalizálási problémánál szereplő egyenleteket specifikáljuk.

A legegyszerűbb célfüggvények az **adósságköltségek**hez kapcsolódnak. Az első mutató az időhorizont során felmerülő, várható éves költségek átlaga⁴⁹. Fontos megemlíteni, hogy a költségfüggvényt folytonosnak tekintettük, így szükséges diszkrétizálni is. Ezzel a célfüggvénnyel az a probléma, hogy minden időszakot ugyanúgy súlyoz, pedig a későbbi kifizetések jelenértékei különbözőek. Ezért bevezethető a diszkontált adósságköltség⁵⁰ fogalma, mint minimalizálandó célfüggvény. A korábbiakat megismételve, a diszkontfaktorok lehetnek az aktuális zérókupongörbe pontjai, vagy pedig egy előre meghatározott sorozat.

⁴⁵ $Q = \sum_{j=1}^N \frac{(\hat{f}(x_j) - \mathbb{E}(\hat{f}(X)))(f(x_j) - \mathbb{E}(f(X)))}{(N-2)\mathbb{D}(\hat{f}(X))\mathbb{D}(f(X))}$, ahol a kalapos függvényértékek a becsültek x_j -k a pontok, míg a várható

értéket és a szórást az összes pont alapján kell számolni.

⁴⁶ $sMAE = \sum_{j=1}^N \frac{|\hat{f}(x_j) - f(x_j)|}{Nf(x_j)}$.

⁴⁷ $Q_{(x^*)} = \text{med}_{k \in K}(\|x_k^* - x^*\|)$, ahol x_k^* a k kezdőpontú minimumérték, x^* pedig az eredeti függvény minimuma és $\|\cdot\|$ az Euklideszi-távolság.

⁴⁸ $Q_{(f^*)} = \text{med}_{k \in K}(\|\hat{f}(x_k^*) - f(x^*)\|)$.

⁴⁹ $\frac{1}{T} \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T \tilde{c}(t-1, t, \theta, \tilde{X}(t, \omega)) \mid \mathcal{F}_0 \right)$, ahol θ a finanszírozási szerkezet, $\tilde{X}(\cdot, \cdot)$ a gazdasági állapotot leíró folyamat diszkrétizált alakja, a feltételes várható érték pedig a kezdőpontbeli információkra történik.

⁵⁰ $\frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T P(0, t) \mathbb{E} \left(\tilde{c}(t-1, t, \theta, \tilde{X}(t, \omega)) \mid \mathcal{F}_0 \right) \right)$.

Az adósságköltség nagysága mellett az is fontos lehet, hogy mikor deficitese a költségvetés, vagy pedig nagysága mikor halad meg egy nem kívánt szintet (például a GDP 3 százaléka). Ezért a minimalizálandó függvény az egyes időszakok esetén előforduló pozitív, vagy egy **adott szintet meghaladó finanszírozási szükséglet valószínűségével** bővíthető⁵¹. A két tényező (az adósságköltség mutatója, az adott szintet meghaladó deficit valószínűsége) fontosságának meghatározása, azaz az azok közti súlyozás, a döntéshozók feladata.

Az **adósságköltség stabilitása** miatt szükséges korlátokat is meghatározni a célfüggvényhez. Ez a költségfüggvény varianciájával mérhető, nem a legjobb megoldás azonban, ha csupán az éves adósságköltségek varianciájára határoznak meg korlátot (ebben a környezetben nem értelmezhető a varianciák összegzése). Ez abból fakad, hogy az idő előrehaladtával nő a bizonytalanság, ugyanis szimulált változókról van szó, így a maximális volatilitásra nehéz egy, az egész időszakra vonatkozó univerzális korlátot felírni. Ezt a problémát oldja meg a korábban is említett feltételes variancia⁵². A t . időszaki feltételes variancia esetén az a feltevés, hogy $t - 1$ -ig ismert minden információ. Ezek a költségfüggvény átmeneteloszlásnak szórásnégyzet paraméterei, és a költségfüggvényeket autoregresszív folyamattal lehet közelíteni. Így végül a feltételes volatilitásra az autoregresszív folyamat hibatagjainak becsült átlaga adódik⁵³. Ezzel a célfüggvény az évenkénti adósságköltségek összegének minimalizálása, miközben a feltételes volatilitás adott szint alatt marad.

Az eddigieken kívül még érdemes figyelembe venni **fiskális politikai megfontolásokat** is, ugyanis kimutatható, hogy azok és az adósságkezelés nem függetlenek egymástól. A fiskális politikát Bolder és Rubin (2007) az elsődleges egyenleg és az adósságköltség összegeként határozza meg. Az előző bekezdésben elmondottakhoz hasonló módszertan szerint a célfüggvény ennek érdekében további, a feltételes költségvetési pozíció (hiány/vagy többlet) volatilitásra vonatkozó korláttal bővíthet. A kisebb volatilitás szabadabb fiskális politikát enged meg, ami további előnyökkel járhat.

Érdemes még megemlíteni néhány lehetséges **hasznosság** (jelen esetben veszteség) függvényt is. Ha a kimenetek bizonytalanok, akkor a Von Neuman-Morgenstein hasznosság függvény (VNM) használható. Ez az összes hasznosságot az egyes kimenetekhez tartozó várható hasznosságok valószínűségekkel súlyozott átlagaként számítja. A kockázatkerülést ebben a környezetben az fejezi ki, hogy a kimenetek várható hasznossága kisebb, mint a várható kimenetel hasznossága. Ez azt jelenti, hogy a veszteségfüggvény konvex, azaz ha az ábrázolt függvény két tetszőleges pontját összekötjük, akkor az összekötő egyenes a függvény képe felett helyezkedik el. Az egyes kimenetekhez tartozó hasznosság Bolder és Rubin (2007) alapján két függvénnyel is meghatározható, a konstans abszolút kockázatkerülési hasznossággal⁵⁴ (CARA, Constant Absolute Risk Aversion) és a konstans relatív kockázat

⁵¹ $\mathbb{P} \left(\cap_{t \in \{1, \dots, T\}} \left\{ F(t-1, t, \theta, \tilde{X}(t, \omega)) \geq 0 \right\} \mid \mathcal{F}_0 \right)$.

⁵² $\mathbb{D}^2 \left(\tilde{c}(t-1, t, \theta, \tilde{X}(t, \omega)) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right)$.

⁵³ $\tilde{\sigma}(t-1, t, \theta, \tilde{X}(t, \omega) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \xi_t^2$.

⁵⁴ $\mathcal{L}(f(\theta)) = a \frac{e^{\gamma f(\theta)}}{\gamma} + b$, ahol a, b, γ tetszőleges konstans, γ pozitív, míg $f(\theta)$ a finanszírozási szerkezet tetszőleges függvénye (például költségfüggvény).

kerülési hasznossággal⁵⁵ (CRRA). Optimalizálásnál e függvények veszik át az adósságköltségek szerepét.

Természetesen ezen kívül lehetségesek más célfüggvények is, vizsgálhatók (1) az eddig említett célfüggvények reálértelemben vagy akár a GDP (nominális vagy reál) arányában, (2) a sztenderdizált (azaz a szórással vett hányados) várható adósságköltségek, (3) az adósságportfólió végső értéke, vagy (4) az adósságportfólió piaci értékének volatilitása. E vizsgálatokat az teszi lehetővé, hogy a szimulációval nemcsak a pénzügyi és makrogazdasági változók dinamikája ismerhető meg, hanem az adósságportfólió szerkezete és az államháztartás pénzügyi pozíciójának alakulása is.

Bolder és Rubin (2007) azt az eredményt kapta, hogy az optimális portfólió erősen függ a kiválasztott célfüggvénytől. Összességében elmondható, hogy ha optimális megoldást nem is kapunk, vizsgálhatók a különböző lehetséges célfüggvények és az egyes optimalizálási stratégiák hatása. Továbbá, az optimalizáció eredményeként számos portfólióról egyértelműen kijelenthető, hogy van nála minden szempontból jobb, és kijelölhetőek olyan elmozdulási irányok, amelyek „jobb” portfóliókat eredményeznek.

⁵⁵ $\mathcal{L}(f(\theta)) = af(\theta)^\gamma + b$.

6 A modellek érvényessége és vizsgálata

Egy modellnek a használata előtt több kritériumnak is meg kell felelnie. Egyrészt arra nyújtson megoldást, ami a modellezési célunk, és szükséges letesztelni, hogy más modellek esetleg jobban teljesítenek-e. Amennyiben más modellek bizonyos szempontból jobb eredményt adnának, akkor részletesen meg kell indokolni, hogy miért döntöttünk valamelyik modell mellett (pl. a „jobb” modell túl komplex, számításigényes stb.). Ebben a fejezetben először áttekintjük egy modell használatából eredő modellkockázatot, majd két módszert említünk meg, az első még a modellválasztást segíti, míg a másik az összehasonlításra ad egy eljárást. Végül további vizsgálati szempontokat mutatunk be, majd röviden szót ejtünk az utólagos ellenőrzésről is.

6.1 Modellkockázat

A helyes modellválasztás csökkentheti, eltüntetni azonban nem tudja a **modellkockázatot**. Ez a bizonytalanság a helytelen modellválasztásból (alkalmazhatatlanság, hibás specifikáció), kivitelezésből (programozási hibák, technikai hibák, pontatlan numerikus közelítések) és használatból (kivitelezés, adathibák, kalibráció) ered. Csökkentésére az egyik lehetőség több modell egyidejű használata, és a kapott eredmények összehangolása. A modellátlagolás akkor hasznos, ha a modellek heterogének, azaz a modellek által adott eredmények közti korreláció alacsony. Fontos a modellek előzetes vizsgálata, ugyanis ha azok torzított eredményeket adnak, akkor a modellek eredményeinek átlagolása ronthatja a végeredményt. A korábbiakhoz hasonlóan érdemes egy könnyen számítható alapmodellt is használni, ez lehet a véletlen bolyongás.

A valószínűség fogalmának értelmezése alapján két szemléletmód különíthető el, a gyakorisági és a bayesi. Az első azt jelenti, hogy a valószínűségeket a nagymintás relatív gyakoriságok határértékeként tekintik, míg a bayesi esetben azok valószínűségi változók. A gyakoriságon alapuló értelmezés esetén pontokat jeleznek előre, így azok súlyozása könnyen értelmezhető. Bayesi esetben az előrejelzések sűrűségfüggvényét becslik, így azok átlagolása esetén el kell dönteni, hogy az egyedi sűrűségeket átlagolják vagy az eloszlás momentumait. Az átlagolás súlyait dinamikusan és statikusan is meg lehet határozni, a dinamikus alap gondolata, hogy a lehető legtöbb információt felhasználják, így a tanulási fázis folyamatosan nő. A statikus esetben a tanulási része a mintának állandó. A különböző modellátlagolásokat a tanulási mintán kívüli adatokkal végzett mintán kívüli előrejelzés alapján lehet összehasonlítani. A statikus, illetve dinamikus súlyok meghatározásának módszertanáról Bolder és Romanyuk (2008) tanulmányában lehet részletesen olvasni.

6.2 Modellszelekció

A modell komplexitása (például paraméterszám) és valamilyen másik tulajdonság (például az illeszkedőképesség) közti átváltás miatt szükséges választani a lehetséges modellek között. Ezt a döntést nevezik modellszelekciónak, ami a megfigyelések alapján egy olyan modellt

választ ki, ami egy korábban definiált értelemben a legjobb. A lehetséges modellek között ott lehet a modellezés tárgyát leíró helyes modell is, azonban a való életben ez ritkán teljesül, így annak csak közelítése a feladat. A modellszelekció egyik fő eleme a használandó paraméterek számának meghatározása, azaz például autoregresszív folyamatok esetén a rendbecslés (hány múltbeli adatot használjon fel az aktuális érték kiszámításához). Erre a döntésre használhatók a különböző információs kritériumok, amik a közelítés miatti információvesztés mértékét mérik. Az egyik legfontosabb ilyen az Akaike információs kritérium⁵⁶ (AIC, Akaike Information Criterion). Ez a loglikelihood függvény és egy büntetőfüggvény segítségével határozza meg az adott modell használatából származó információs veszteséget az elméleti modellhez képest, a választás pedig ennek minimalizálásával történik. Ez a módszer nem konzisztens, azaz a biztosnál kisebb az esélye, hogy kiválasztja a valódi modellt, ha az a lehetséges modellek között van. Előnye viszont a rendbecslés esetén, hogy habár hajlamos felülbecsülni a szükséges paraméterek számát, rendkívül kicsi az esélye, hogy alulbecsli azt. A túlbecslés kockázatát véges minta esetén a büntetőfüggvény növelésével lehet csökkenteni. További információs kritériumok a bayesi módszerekre épülő bayesi információs kritérium (BIC, Bayes Information Criterion) és a Hannan-Quinn információs kritérium (HQIC, Hannan-Quinn Information Criterion), ezek részletes bemutatása megtalálható Darabos (2010) összefoglaló írásában.

6.3 Az általánosított keresztvalidáció

A modellek érvényességére vonatkozó vizsgálatok egyik legelterjedtebb módszere az általánosított keresztvalidáció (GVC, Generalized Cross Validation). Ez különösen zajos, ritka adathalmazok esetén hasznos, annak vizsgálatára szolgál, hogy az algoritmusok túl nagy súlyt helyeznek-e a zajosabb megfigyelésekre. A technikát főleg olyankor használják, amikor a modell célja az előrejelzés, mint általában az optimális portfóliómodell kialakításának módszertana során is. A validáció során a mintát felosztják két diszjunkt (közös elemeket nem tartalmazó) halmazra, az egyik a tanulási halmaz, míg a másik a validációs vagy tesztelő halmaz. A felosztás többféleképpen elvégezhető:

- kihagyásos keresztvalidáció (LOOCV, leave-one-out cross-validation): egy kivételével az összes megfigyelés a tanulási halmazba tartozik, és az eljárást annyiszor végzik el, hogy minden elem egyszer a tesztelési halmaz legyen,
- kétszeres keresztvalidáció (2CV, 2-fold cross-validation): a megfigyelések fele a tanulási, a másik fele a tesztelési halmaz része, majd fordítva, így kétszer futtatják le az eljárást,
- K -szoros keresztvalidáció (KCV, K -fold cross-validation): az adathalmazt felosztják K egyenlő részre, majd minden rész egyszer a tesztelő halmaz lesz a K futtatás során,
- ismételt, véletlen részmintás validáció (RRSSV, repeated random sub-sampling validation): a felosztás véletlenül történik, előnye az előzővel szemben, hogy a

⁵⁶ $AIC(k) = -2 * \ln f_Y(y, \hat{\theta}^k) + 2 * k$, ahol $\ln f_Y(y, \hat{\theta}^k)$ a loglikelihood függvény maximális értéke, míg k a paraméterek száma.

részhalmazok elemszáma nem függ a futtatások számától, míg hátránya, hogy egyes elemek soha, míg néhány többször is szerepelhet a validációs halmazban.

Ezután a szokásos mutatószámokkal hasonlíthatjuk össze a különböző modelleket, illetve, hogy milyen azok (pseudo mintán kívüli) előrejelzőképessége. Így ez a módszer az összes olyan esetben is használható, amikor valamilyen jövőbeli állapot becslése történik.

6.4 A modell alkalmazhatóságának további vizsgálatai

A szimuláció végeztével nem elegendő csupán az adatokat elemezni, szükséges ellenőrizni, hogy az alkalmazott modell használható eredményeket ad-e. Ezért Bolder (2003) a következő vizsgálatokat javasolja:

- egy bonyolultabb modell használata hogyan befolyásolja az eredményeket,
- érzékenységvizsgálat,
- stresszteszt,
- a költség és kockázat érzékenysége a finanszírozási szerkezetre,
- mik a költségeket és a kockázatokat leíró legjobb mérőszámok,
- diagnosztikai tesztek,
- mennyi a szükséges szimulációs elemszám.

Egy bonyolultabb modell használatának következményei egyszerűen vizsgálhatók, ehhez először meg kell határozni egy alapmodellt. Ennek célszerű olyat választani, amelyben egyedül a kamatlábak mozgásából adódik kockázat, a többi változó (például gazdasági ciklus, finanszírozási szükséglet, makrováltozók) alakulása pedig determinisztikus (nem véletlen). Ezeket is modellezve, a paraméterek helyes becslése vagy kalibrálása esetén nem szabad drasztikus különbségeket kapni, a kockázat folyamatos növekedése várható a modellezett folyamatok számának növekedésével.

Az **érzékenységvizsgálat** során annak a vizsgálata történik, hogy az eredmények mennyire érzékenyek a modell feltevéseire. Itt elsődleges az állapotváltozók volatilitásától való függés meghatározása. A franciák (Renne 2007) a modell feltételeire való érzékenységet a következő dimenziók mentén vizsgálták: (1) a makrogazdasági és pénzügyi sokkok mértéke, (2) a sokkok eloszlása, (3) a hozamgörbe paraméterei, (4) a hozamgörbe átlagos meredeksége, (5) a múltbeli adatok időtávja és (6) a késleltetések száma a vektorautoregresszív modellben.

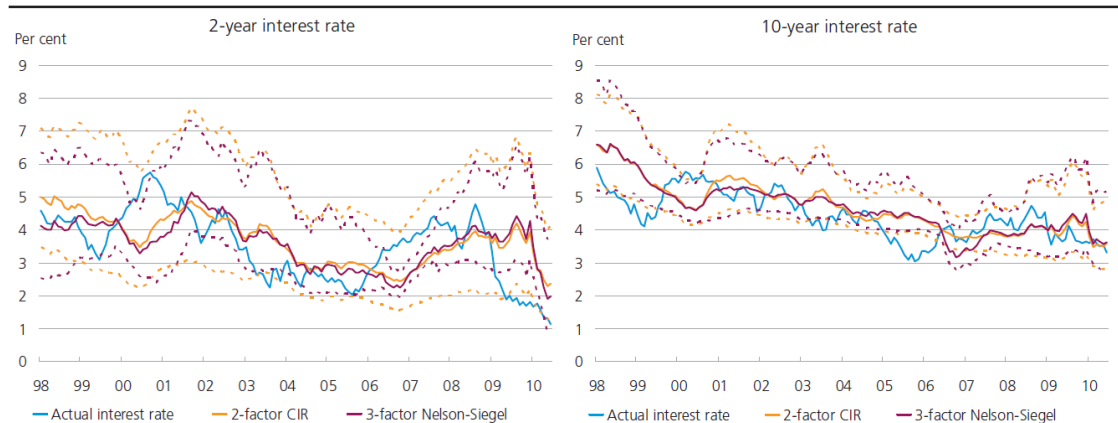
A **stresszteszt** a modell vizsgálata során az extrém makrogazdasági környezet melletti eredményeket elemzi. Korábban volt róla szó, hogy ez megtehető háromállapotú Markov-folyamat használatával a gazdasági ciklusok modellezése során. Ekkor szükséges az abnormalitások valószínűségének pontos leírása is, az extrém állapotba kerülés valószínűségére feltehető, hogy megegyező a másik két állapot esetén, ugyanis azt valamilyen globális sokk eredményezi. A harmadik állapot különböző extrém esetekhez tartozhat, például magas hozamgörbe eltolódás, megemelkedő hozamvolatilitás vagy a görbe inverzzé válása. Mivel a stresszteszt során extrém helyzeteket vizsgálnak, így a farokviselkedés leírása (Value-at-Risk mutatók segítségével) kiemelt jelentőségű.

A költségek és kockázatok **finanszírozási szerkezet függését** regressziós modell⁵⁷ segítségével lehet elemezni, ahogy Bolder (2003) tanulmányában olvasható. Ekkor olyan súlyokat keresnek, amelyekkel súlyozva az egyes finanszírozási szerkezetekhez tartozó mérőszámokat a stratégia valamilyen költség vagy kockázat mutatójának közelítését kapják. Ha ez a közelítés elég pontos, akkor egy nem lineáris összefüggést írhatunk le lineáris modellel, ami lényegesen felgyorsítja a számításokat. Ennek azonban az a következménye, hogy a diverzifikációs hatás (a portfólió kockázata újabb eszközzel csökkenhet) kisebb, mint azt előzetesen várni lehet. Ez abból fakad, hogy a különböző lejáratokhoz tartozó kamatlábak erősen korrelálnak (egyfaktoros modellnél tökéletes korreláció van), és nagy összegű kezdőportfólió esetén az új eszközöknek kis hatásuk van.

A változók folyamatának szimulálására Monte-Carlo szimulációt szokás használni. E szimulációk tartalmaznak approximációs (közelítési) hibát, amik valószínűségi számítási tételekkel (nagy számok gyenge törvénye, centrális határeloszlás tétel) jellemezhetők, és a szimulációk számának növekedésével csökkennek, de kétszer annyi szimulálás nem jelent feleakkora hibát. Berajzolhatók továbbá úgynevezett konfidencia intervallumok, amik azt jelölik, hogy mi az a sáv, amiből a folyamat adott valószínűséggel (általában 95%) nem megy ki. Ez a grafikus szemléltetés nemcsak a szimulációs hibák, hanem az egyes kamatlábak előrejelzési hibájának vizsgálatához is használható. A 14. ábra ezt mutatja a 2 és 10 éves dán hozamok 1 éves előrejelzéseinek idősorán keresztül. A szaggatott vonalak a konfidencia intervallumok a kétfaktoros CIR és a háromfaktoros Nelson-Siegel hozamgörbe modell általi becslésekre, a folytonos vonal pedig a szimulálások átlaga.

MEAN ESTIMATES AND CONFIDENCE BANDS FOR INTEREST-RATE PROJECTIONS 1 YEAR AHEAD

Chart 11.4.1



Note: Broken lines indicate the 95-per-cent confidence band.

14. ábra A két- és tízéves dán hozamok 1 éves előrejelzésének konfidencia intervallumai (Forrás: Danmarks Nationalbank (2010): *Danish Government Borrowing and Debt 108.o.*)

Ahogy a hozamgörbe modellek előrejelzőképességének vizsgálata során is használtuk, a modelleket **utólagos ellenőrzésnek** (backtesting) is alá lehet vetni. Ekkor annak a vizsgálata történik, hogy a különböző stratégiák milyen eredményeket értek volna el a korábbi időszakokban. Renne (2007) kritikája ezzel kapcsolatban, hogy nem ad releváns összehasonlítási alapot a stratégiák között, ugyanis attól függetlenül, hogy valami a múltbeli,

⁵⁷ $\underline{y} = W\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$, ahol W sorai az egyes finanszírozási szerkezetekhez tartozó arányokat jelölik, $\underline{\beta}$ a súlyvektor, $\underline{y}$ a mutatószámok vektora és $\underline{\epsilon}$ a hibavektor.

determinisztikus esetben jó volt, nem biztos, hogy a jövőbeli véletlen megvalósulások esetén is az lesz.

6.5 A folyamatokat ért sokkok és az azokra adott válaszok

Eddig is láttuk, hogy a folyamatok alakulását nem lehet egyértelműen leírni, a fejlődésükben mindig van valami bizonytalanság. Ahhoz, hogy ezt le lehessen írni, minden dinamikában szerepel egy véletlen tag. Folytonos esetben leggyakrabban ez egy Wiener-folyamat megváltozása, míg diszkrét esetben véletlen sokk.

6.5.1 Sokkok

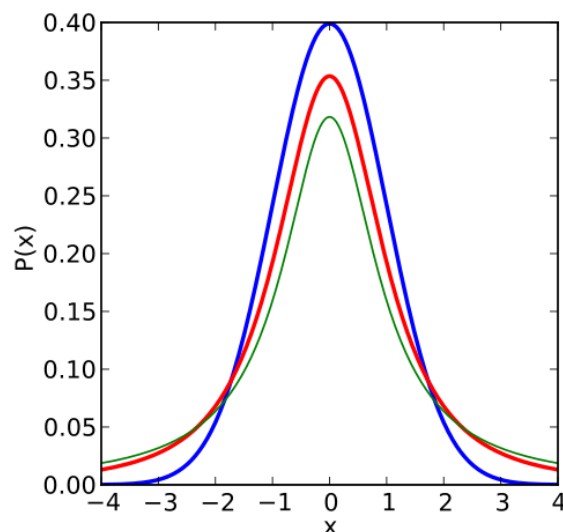
A szimulációnál eldönthető, hogy a diszkrét folyamatokat milyen sokkok érik. Balibek és Memis (2012) ez alapján 5 féle scenárió típust különböztet meg:

- *normális eloszlású sokkok*: a véletlen sokkokat normális eloszlású mintából veszik
- *vastag farkú sokkok*: a szimulált utak egy adott részénél nem normális, hanem vastag farkú eloszlást (például t -eloszlás) használnak. A vastag farkú eloszlás olyan eloszlás, aminek nagy a csúcossága és a ferdesége, így jobban modellezhetők a kis valószínűségű, extrém események,
- *aszimmetrikus sokkok*: ez ugyanaz, mint az előző, azonban a felhasználó eldönti, hogy a bal, vagy a jobb farokból történik-e a véletlen szám választása,
- *hozamgörbe eltolódás scenárió (béta sokkok)*: a török modellben azért szerepel,, mert a hozamgörbe modellezésénél konstans meredekség és görbület paramétereket feltételeznek,
- *bootstrapping*: a bootstrap módszerrel vizsgált historikus változások alapján generálják a scenáriókat.

A következő ábrán a normális⁵⁸ és a t -eloszlás⁵⁹ sűrűségfüggvénye látható. A kék a sztenderd normálisé, míg a másik kettő két eltérő szabadságfok melletti t -eloszlásé (a piros a nagyobb szabadságfokú). A különböző szabadságfokok az ilyen típusú eloszlásoknál (például khi-négyzet, vagy az F -eloszlás) a statisztikai tesztekkel való felhasználhatóságuk miatt szükségesek. Megfigyelhető az ábrán, hogy a szabadságfok növekedésével a sűrűségfüggvény közelít a normális eloszlásához, illetve hogy a t -eloszlás lassabban cseng le, azaz simul az x -tengelyre. Pont ez a lecsengés jelzi azt, hogy az extrém események nagyobb valószínűséggel történhetnek meg, ugyanis a valószínűséget a sűrűségfüggvény görbe alatti területeként kaphatjuk.

⁵⁸ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, ahol μ a várható érték, míg σ a szórás és $f(x)$ a sűrűségfüggvény.

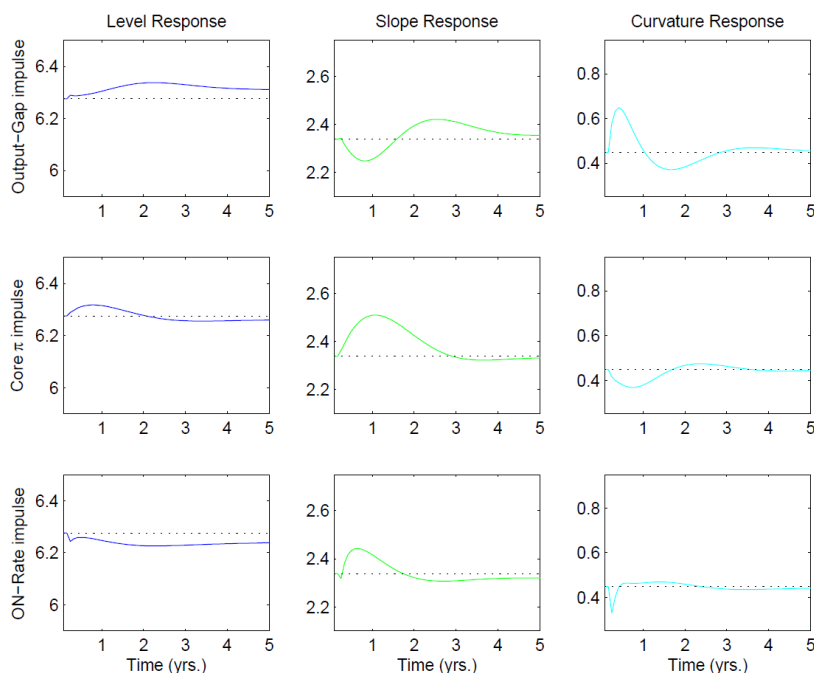
⁵⁹ $f(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$, v a szabadságfok, $\Gamma(\cdot)$ az úgynevezett Gamma-függvény és $f(x)$ a sűrűségfüggvény.



15. ábra A normális és t -eloszlás sűrűségfüggvénye (Forrás: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/63/T_distribution_2df_enhanced.svg/500px-T_distribution_2df_enhanced.svg.png, Letöltve: 2013.09.25.)

6.5.2 Impulzusválaszok

Az állapotváltozók fejlődésének leírására alkalmas vektorautoregresszív folyamatok hátránya, hogy nehéz értelmezni a redukált formájú paramétereket (az egyenleteket az endogén paraméterekre fejezzük ki) illetve, hogy a korrelációt és az okságot nehéz megkülönböztetni ebben a modellben. Ez azt jelenti, hogy csak a kapcsolatot lehet felismerni, azt nem tudjuk megmondani közvetlenül, hogy valamelyik változó hat-e a másikra (ez például regressziós modellel vizsgálható).



16. ábra Makróváltozókat ért impulzusokra adott válasza a pénzügyi változóknak (Forrás: Bolder, D. J. és Deeley, S. (2011): *The Canadian Debt Strategy Model: An Overview of the Principal Elements*, p. 59.)

Az egyes paraméterek szignifikanciájának értékelése is nehézségekbe ütközik, azaz, hogy szükséges-e az adott paramétert használnunk, és az R^2 mutató (ez jelzi az illeszkedés minőségét) sem hasznos ebben az esetben. A VAR modellek használhatóságára ezért más módszerek célravezetőek. Az egyik a korábban ismertetett mintán kívüli előrejelzőképesség, míg a másik az impulzus függvények használata. Utóbbi azt jelzi, hogy az egyik állapotváltozót ért 1 egységnyi többlet sokk hogyan befolyásolja annak és a többi változónak a fejlődését, ha nincs más zaj. A következő ábra azt szemlélteti kanadai adatok alapján, hogy a makróváltozókat (kibocsátási rés, maginfláció, O/N-kamat) ért sokkok hogyan módosítják a pénzügyi változók (szint, meredekség, görbület) alakulását, azaz mennyi idő alatt csillapodik a hatás.

6.6 Diagnosztikai tesztek

A szimulációs modell ellenőrzésére szolgáló további módszer a diagnosztikai tesztek használata Bolder (2003). Ezek azt a célt szolgálják, hogy (1) megbizonyosodhassunk, hogy az elméleti modell azt csinálja, ami a modellalkotó szándéka, (2) a paraméterek megfelelőek (ha nem akkor kalibrálással érhetjük el a kívánt értékeket) és végül (3) segítenek megérteni az elmélet legfontosabb tényezőit, ezáltal előrevetítve a szükséges érzékenységvizsgálati elemzéseket. A diagnosztika során elsősorban azt vizsgálják, hogy a becsült állapotváltozók dinamikája konzisztens-e a historikus adatokkal, ezt úgy végzik, hogy az adott paraméterhalmaz melletti becsült értékeket vetik össze a korábbi évek megegyező valós adataival. Ezért a következőket vizsgálja Bolder (2003):

- *a hozamgörbe szintje*: itt az egyes lejáratokra a teljes időtáv átlagos szintjeit hasonlítja össze a szimulált és megfigyelt értékek esetén,
- *a görbe meredekségének eloszlása*: a szimulált 3 hónapos és 10 éves hozamok közötti eltérés relatív gyakoriságát ábrázolja (ezzel megvizsgálható, hogy a szimulációk mekkora részében lesz inverz hozamgörbe, ugyanis azoknál negatív az eltérés),
- *a hozamváltozások volatilitása*: a változások volatilitását vizsgálja az egyes lejáratok esetén a szimulált és a valós esetben,
- *a hozamok szintjének volatilitása*: hasonló az előzőhöz, csak a szint volatilitásával
- *a rövid kamatok sávszélessége*: a 3 hónapos hozamok alakulását ábrázolja minden egyes véletlen kimenetel esetén, így megvizsgálható, hogy milyen értékek között mozog az idő folyamán,
- *a rövid kamatok eloszlása*: ez a 3 hónapos hozamok hisztogramja (ezzel ellenőrizhetjük a hozamgörbe modell feltételeinek vagy következményeinek teljesülését).

7 Külföldi modellek bemutatása

Az összefoglalók az egyes országok adósságkezeléssel kapcsolatos tanulmányai alapján és a Brunel University CARISMA (Centre for the Analysis of Risk and Optimisation Modelling Applications) központjának szervezésében megtartott 2010-es „Analytical Models For Sovereign Debt Management” fórum Réz András és Mohai Ádám által írt kivonata alapján készültek.

7.1 Ausztria

Az osztrák adósságkezelő elsődleges célja a piaci érték megváltozásával korrigált kamatköltségek minimalizálása a kockázat adott szintje mellett. A kockázatkezelők feladata esetükben nem az összes felmerülő kockázat minimalizálása, hanem olyan folyamatok megalkotása, amelyek nagy valószínűséggel megakadályozzák a nagymértékű veszteségek kialakulását. Teljes kockázatsemlegességet csak rendkívül magas költségek mellett lehetne elérni, így a helyes egyensúlyt kell megtalálni a költségek és kockázatok között.

Az adósságportfólió fő kockázatainak a piaci és a hitelkockázatot (partnerkockázatot) tartják, a kockázatot váratlan veszteségként, vagy a tervezett alakulástól való negatív eltérésként értelmezik. Két lényeges stratégiai paramétert említenek, amik meghatározzák ezeket: a durationt és a deviza-összetételt.

A piaci kockázatokon belül elsőként a devizakockázatot különítik el. Ez ellen deviza swapokkal védekeznek, így a devizakockázatot hitelkockázattá alakítják. A devizaadósság értékváltozásának mérésére kockázatmentes érték típusú mutatót használnak (Currency Value-at-Risk). A GDP százalékában kifejezett korlátot alkalmaznak a 12 hónap alatt 95%-os valószínűséggel bekövetkező maximális veszteségre, ami a devizaárfolyam változásból adódhat. A kamatláb-kockázatok mérésére az Interest Costs-at-Risk mutatószámot alkalmazzák, ahol a kamatköltségek alakulását a következő három faktor határozza meg: (1) az elsődleges egyenleg jövőbeli alakulása, (2) a refinanszírozási és a portfóliókezelési stratégia és (3) a piaci árfolyam és hozam alakulása. A hozamkockázatra általuk használt másik mérőszám a teljes portfólió Value-at-Risk értéke, amit Monte Carlo szimulációval határoznak meg, ugyanazokat a lehetséges kimeneteket használva, mint a kamatok előrejelzésénél. A szimuláció időtávja 8 év.

7.2 Belgium

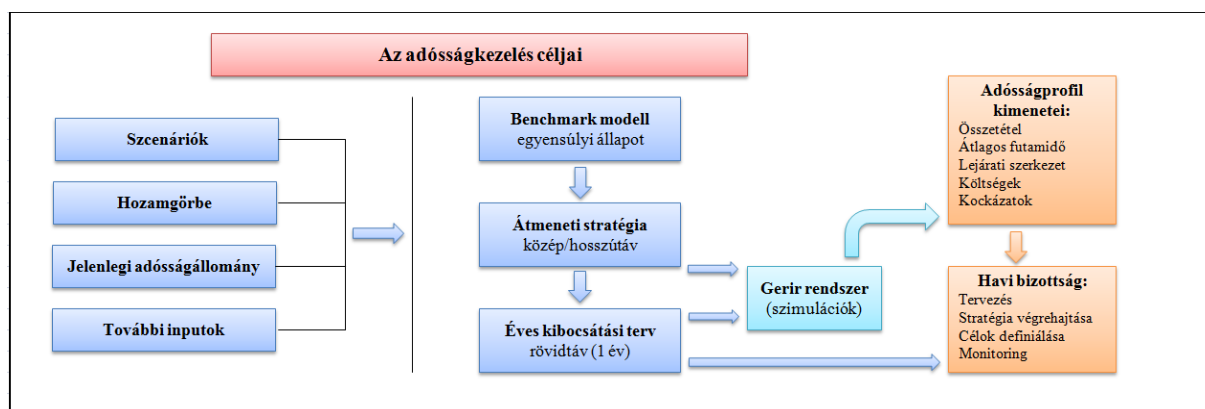
A belga adósságkezelő fő célja a központi költségvetés adósságához kapcsolódó pénzügyi költségek csökkentése a piaci és működési kockázatok kezelése mellett, figyelembe véve a költségvetési és monetáris politika céljait. A pénzügyi költségeket abszolút módon vagy a GDP arányában határozzák meg (a piaci értéket nem tartják lényeges mutatónak). A piaci kockázatok közé a refinanszírozási és az átárazódási kockázatot sorolják. Három modulja van a modellnek, egy hozamgörbe modellező, egy ökonometria és egy szcenárióelemző.

A kamatlábak alakulására kétfaktoros Heath-Jarrow-Morton modellt használnak, ahol a faktorokat főkomponens analízissel (PCA, Principal Component Analysis) határozzák meg, és a makrogazdasági és pénzügyi változókat exogénnek tekintik. Először ezt a modellt a devizaszerkezet kialakítására használták, később előtérbe került a megújítási kockázat és az átárazódási kockázat (duration) elemzése a modellel, például swapkötések előkészítéséhez. Elemzik a modellek előrejelző képességét, és vizsgálják a makrogazdasági faktorok (növekedés, infláció, kamatlábak és a költségvetés) közötti kapcsolatot. Az eredmények alapján hasznosnak tartották, hogy egyes makrováltozókat endogénnek tekintsenek, ezt a fejlesztési irányt indukálta az inflációhoz kötött kötvények kibocsátása is. Ezért elkészítették az ökonometria modult, amivel a GDP növekedést és az inflációt jelzik előre. A 2008-as válság implicálta piaci környezetváltozás miatt az optimális portfóliómodellről azonban áttértek az egyszerűbb szenárióelemzéshez, amelyben olyan lehetőségeket vizsgálnak, mint például az egyensúlyi állapothoz való visszatérés, vagy elhúzódó recesszió. Az elhúzódó recesszió forgatókönyv esetén az ilyen környezettel szembesülő japán tapasztalatok alapján tervezték meg a hozamalakulást, míg egy magasabb inflációs szenárióban egy 1990-s évekbeli hozamalakulást használtak mintaként, amikor Belgiumban magas infláció volt.

7.3 Brazília

A brazil adósságkezelő egy sztochasztikus szimulációs modellt és a hatékony portfóliók elméletét használja a megfelelő adósság-összetétel kialakításához. Az adósságkezelő középtávú célja a változó kamatozású kötvények fokozatos lecserélése fix kamatozású és inflációhoz kötött papírokra, a fennálló adósság átlagos lejáratának növelése és a lejárat szerkezet simítása. A nettó államadósság GDP-hez viszonyított arányát szimulálják.

Kezdőportfóliónak az elérendő egyensúlyi portfóliót tekintik, így a szimulált folyamatok kezdőértékei is a folyamatok hosszú távú várható értékével egyeznek meg, és ez a portfólió-kialakítás feltevésük szerint változatlan marad a modellezés időtávja alatt. Az adósságkezelő a hosszú távú stratégia kialakításához a benchmark modellt használja, ez adja az optimális egyensúlyi portfóliót, míg az abba való átmenethez egy középtávú stratégiát alakítanak ki. Végül éves finanszírozási szerkezeteket határoznak meg, ezeket szemlélteti az 17. ábra.

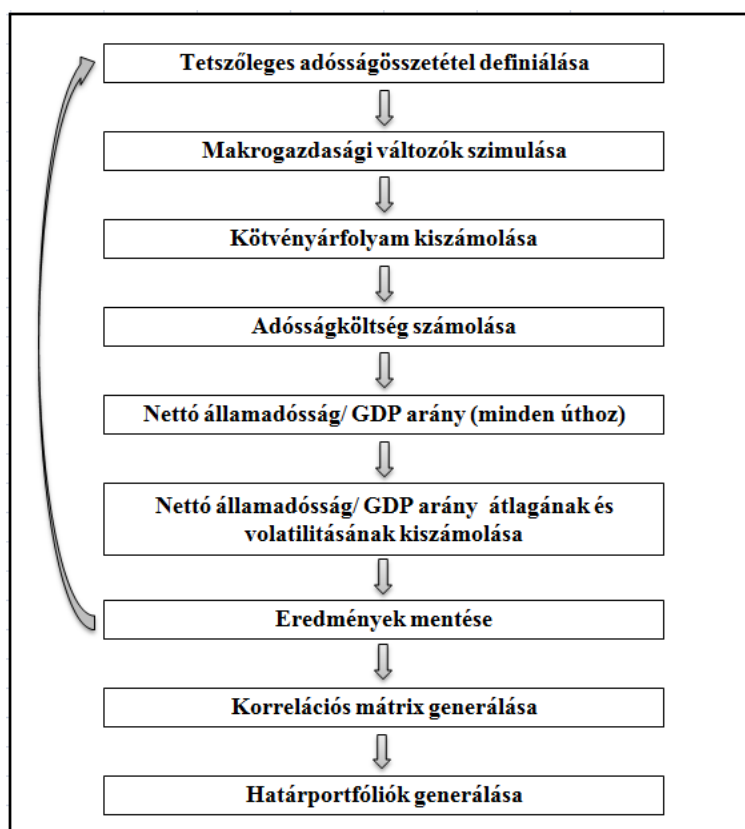


17. ábra A brazil adósságkezelő stratégiai tervezésének folyamatábrája (Forrás: Cabral et al. (2008): *A benchmark for Public Debt: The Brazilian Case* 38. o. nyomán)

A hatékony portfóliók görbéjéhez adott kockázati szintek mellett határozzák meg a minimális költségű portfóliót. A modellezés során ehhez először kiválasztják az adósságprofil

a fő adósságelemek segítségével, amik a lejáratban és a kamatozásban térnek el egymástól. Ez alapján négy eszközcsoportot különítenek el: (1) fix és (2) változó kamatozású papírok, (3) infláció-indexált eszközök és (4) devizakötvények (dollár és euró). A kötvényárfolyamokat korrelált sztochasztikus folyamatokkal (hozamgörbe, devizaárfolyam, infláció) szimulálják, és ezek segítségével határozzák meg a nettó adósság/GDP arányt. Ezen arányra vonatkozóan a szimulációs időtávra egy eloszlást ad eredményül a modell, amiből költség és kockázat mutatók számolhatók.

A rövid (O/N) kamatok esetén egyensúlyi hozamgörbe modellt használnak (az ún. CIR modellt). Megemlítik, hogy habár nem ez a legjobb közelítés a hozamokra, azonban a hosszú távú átlaghoz való visszahúzás miatt jobban használható egyensúlyi kezdőportfólió esetén. A reál devizaárfolyam dinamikájára – hasonló tulajdonsága miatt – pedig az ún. CKLS modellhez hasonló fejlődést használnak. Az inflációhoz szükséges árindex a modellben geometriai Brown-mozgást követ. A devizaadósság költségéhez nominális devizaárfolyamokra van szükség, így azokhoz is felhasználják az előbbi árindexeket. Az infláció-indexált és a devizaadósság esetén a költségek kiszámításához kockázati prémiummal korrigálnak (a fix kamatozású belföldi kötvények hozamgörbéjéből levonják a megfelelő kockázati prémiumot), amit a Nelson-Siegel módszerhez hasonlóan modelleznek. Végül a GDP-t is geometriai Brown-mozgással szimulálják.



18. ábra A brazil adósságkezelő modellezési folyamata (Forrás: Silva, et al. (2010): *Public Debt: The Brazilian experience*, 189. o. nyomán)

Az eredményeket a nettó adósság/GDP arány költség-kockázat terében ábrázolják. Itt meghatározható a hatékony portfóliók görbéje, így a döntéshozók számára több lehetőség is van a kockázatvállalási hajlandóságtól függően az optimálisnak tekinthető portfólió-összetétel kialakítására. A kockázati korlát mellett vizsgálták a piaci kereslet hatását is különböző

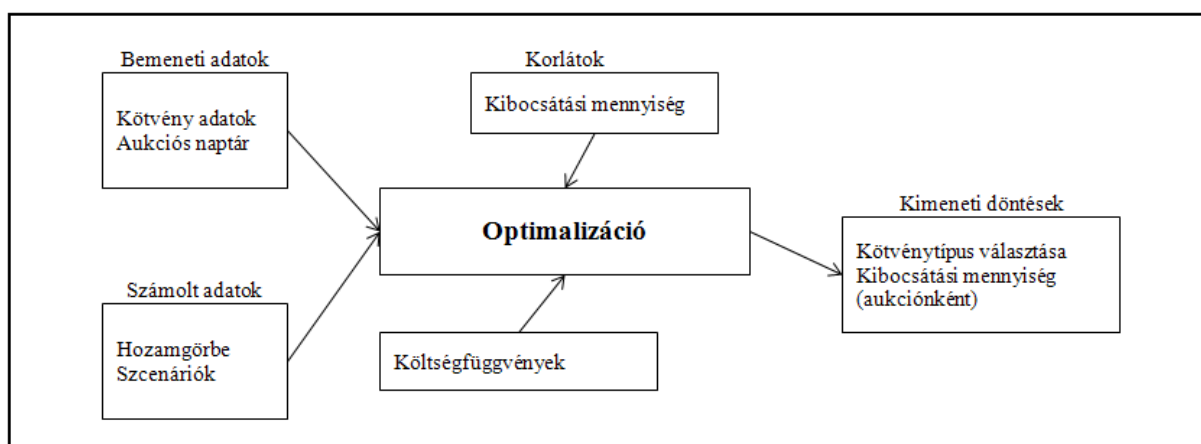
mennyiségbeli korlátozásokkal. A 18. ábra ábra foglalja össze a brazil adósságkezelő modellezési folyamatát.

7.4 Brunel Egyetem

A Brunel Egyetem Carisma elemzőközpontja magas szinten foglalkozik optimalizációs modellezéssel. Egy projekt keretében azt modellezték, hogy mi lehet az optimális kötvénykibocsátási szerkezet egy szuverén (konkrét esetben a brit adósságkezelő, DMO) számára.

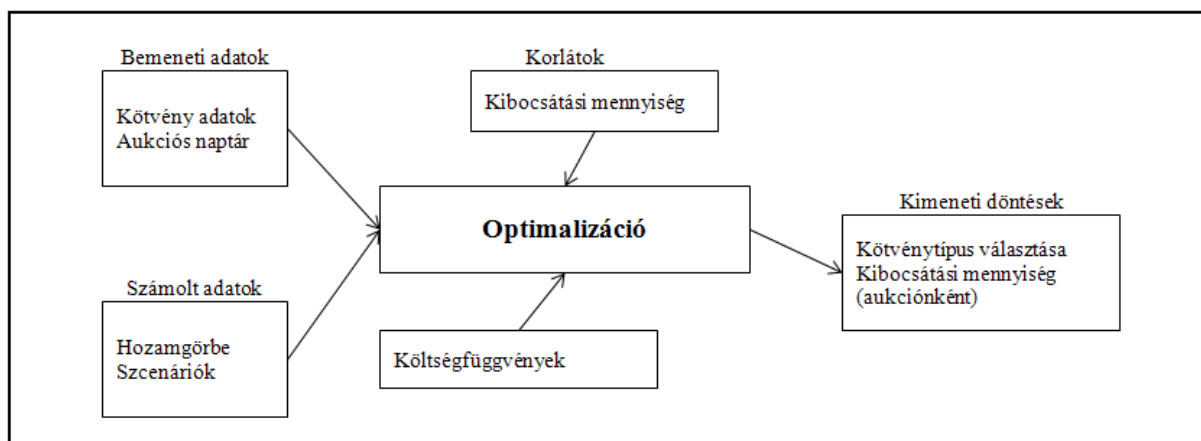
A program célja az adott finanszírozási szükséglet kielégítésére olyan kötvény-mix meghatározása a rögzített aukciós naptárra illesztve, amelynek a várható költségei a legalacsonyabbak a valószínűsíthető hozamgörbe-realizációk alapján. A kötvénykibocsátás modellezésekor feltették, hogy három kötvényt bocsátanak ki (rövid, közép és hosszú távút) előre meghatározott mennyiségben és fix aukciós időpontokban. Feltették továbbá, hogy az aukciós árakat a kötvények aznapi arbitrázsmentes árfolyama, a jövőbeli hozamokat pedig a jövőben megvalósítandó kibocsátások árfolyamai határozzák meg. A modell célja minimalizálni a kibocsátás költségeit (tőke- és kuponfizetéseket) egy véletlen hozamgörbe dinamika mellett (látható, hogy ebben a modellben nem számolnak idegen devizában történő kibocsátással).

Módszertanilag a rövid kamatok alakulására trinomiális fát (az utak az egyes időpontokban háromfelé ágazhatnak) használnak Vasicek modellel. Utóbbit a Kálmán-szűrővel kalibrálják, ahol a napi kötvényárfolyamokat mérik és a rövid kamat a látens változó. Negyedévente újrakalibrálják a modellt és ekkor újra felépítik a trinomiális fát is. Többféle minimalizálandó költségfüggvényt is megvizsgálnak, egyrészt a kibocsátás átlagos összköltségét, illetve annak diszkontált értékét. Az optimalizáció során a túlzott kilengések ellen korlátokat határoznak meg a feltételes kockázatotott értékre (cVaR, conditional Value-at-Risk).



19. ábra A CARISMA központ optimalizációs modelljének sematikus rajza (Forrás: Date, P., Abdel-Jawad, M. és Canepa, A. (2011): A mixed integer linear programming model for optimal sovereign debt issuance, 11.o. nyomán)

A



19. ábra az optimalizáció bemenő adatait (külsőleg adott és számolt adatok, költségfüggvény, korlátok) és eredményeit foglalja össze.

7.5 Commonwealth Secretariat

A Brit Nemzetközösség Titkársága (Commonwealth Secretariat, CS) a tagországai számára nyújtott gazdaságpolitikai támogatás részeként egy finanszírozási szerkezeteket elemző eszközt (PDAT, Public Debt Analytical Tool) fejlesztett ki, melybe egy sztochasztikus szimulációs modell kimenetei betölthetők inputként.

A PDAT négy építőközből áll: (1) a stratégia megfogalmazásából (a költség és kockázat közötti átváltás), (2) az éves finanszírozási tervből, (3) az adósságportfólió kezeléséből és (4) az ellenőrzésből. A portfóliókezelés célja lehet a refinanszírozási kockázat csökkentése (visszavásárlásokkal vagy cserékkel), a piaci likviditás növelése, az egyéb kockázatok csökkentése (swapokkal) és a költségek csökkentése (ez jelenbeli megtakarítást eredményez).

A költség mérőszámokra a kamatkiadások és kormányzati bevételek arányát, az adósság/GDP arányt, illetve az adósság jelenértéke/GDP arányt javasolják. A kockázatokat olyan mérőszámokkal mérik, mint az éven belül lejáró adósság arányával, az éven belül átárazódó adósság arányával, az átlagos hátralévő futamidővel (ATM), az átárazódás átlagos idejével (ATR), illetve a hazai és külföldi devizaadósság arányával.

A rendszer három modulból tevődik össze: (1) a portfólió elemzéséből, (2) a stratégia kialakításából és (3) kivitelezéséből. Az első modulhoz a következő mérőszámokat használják: külföldi és hazai adósság aránya, devizaszerkezet, fix-változó arány, eszköztípusok, ATM, ATR, duration, éven belül lejáró adósság aránya, lejárat szerkezet, teljes kamatköltség, adósság/GDP és kamatköltség/bevétel arány. A második modul egy alapszenáriót tartalmaz, és ehhez képest vizsgálnak sokk-szenáriókat, ahol a sokkok független, százalékos eltérést jelentenek az alapszenárióhoz képest historikus adatok alapján a hozamgörbe szintjében, meredekségében és görbületében. A PDAT a háttérben meghúzódó számításokhoz a MATLAB matematikai szoftvert használja.

7.6 Dánia

A dán adósságkezelő (a dán jegybank) a költség és kockázat viszonyok mérésére a duration, a kockázatos költség (CaR, Cost-at-Risk) és az átárazódási időtartam mutatókból, valamint egy stressz-tesztekből álló eszközrendszert használ. Az adósságkezelési modellben az adósságot nettó módon veszik figyelembe, azaz a kötelezettségek mellett az állam követeléseit (például továbbhitelezéseket) is tekintik. A fennálló állományok mellett a modell tartalmazza a kibocsátási terveket is. A CaR számításához egy kétfaktoros CIR modellt alkalmaznak, 2500 realizáció futtatásával, 10 éves mintával és állandó spreadet feltételezve a DKK és EUR swapgörbére nézve. A számítás alapjául szolgáló kétfaktoros CIR modell mellett megvizsgálták a háromfaktoros Nelson-Siegel hozamgörbe modellt is. A kettőt egy benchmark volatilitásmodell (EGARCH) segítségével hasonlították össze, és az eredmény az lett, hogy a harmadik faktor használata nem javítja szignifikánsan az eredményeket.

Elemezték a 2008-as gazdasági válság hatásait a portfólió szerkezetére, a növekvő adósságra és a pénzügyi környezetre vonatkozóan. A válságra az adósságkezelő több választ is adott, egyrészt kibocsátásra került a 30 éves kötvény, ami jelentősen megnövelte a portfólió durationját (4 évről 7 évre, ezzel benchmarksértést okozva), többek között ezzel megnövelték a szabad tartalékok nagyságát is. A válság egyik következményeként a dán hozamok jelentősen elváltak a német benchmark hozamoktól, miközben korábban ez az eltérés minimális volt.

A modellben nagyobb figyelmet kapott a refinanszírozási kockázat, ami az évente megújítandó adóssággal, az átlagos lejáratú idővel (ATM), az átlagos költséggel és a farok költségekkel (kis valószínűségű esemény bekövetkeztekor felmerülő költségekkel) mérhető. A refinanszírozási kockázat csökkenthető hosszú lejáratú papírok kibocsátásával, azonban ekkor az adósságszolgálat átlagos költsége növekszik. Másik lehetőség különböző likvid eszközök tartása, ezeket is meg kell finanszírozni, ami szintén plusz költséggel jár. A gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy a refinanszírozási kockázatot elfogadható szinten lehet tartani, ha kombináljuk a hosszabb lejáratú kibocsátásokat (magasabb duration) és a magasabb szabad készpénz tartalékokat.

A költség és kockázat kapcsolatát leíró dán modellnek több továbbfejlesztési irányát jelölte meg a dán adósságkezelő. Az egyik az államkötvény- és a swaphozamok közötti spread figyelembe vétele, ez a jelenlegi modellben determinisztikus, azaz a várható költségekbe beépül, de a spread pótlólagos varianciáját nem veszik figyelembe a kamatlábak szimulálásánál. A másik irány a kamatláb volatilitásának pontosabb leírása, főleg alacsony kamatlábak mellett.

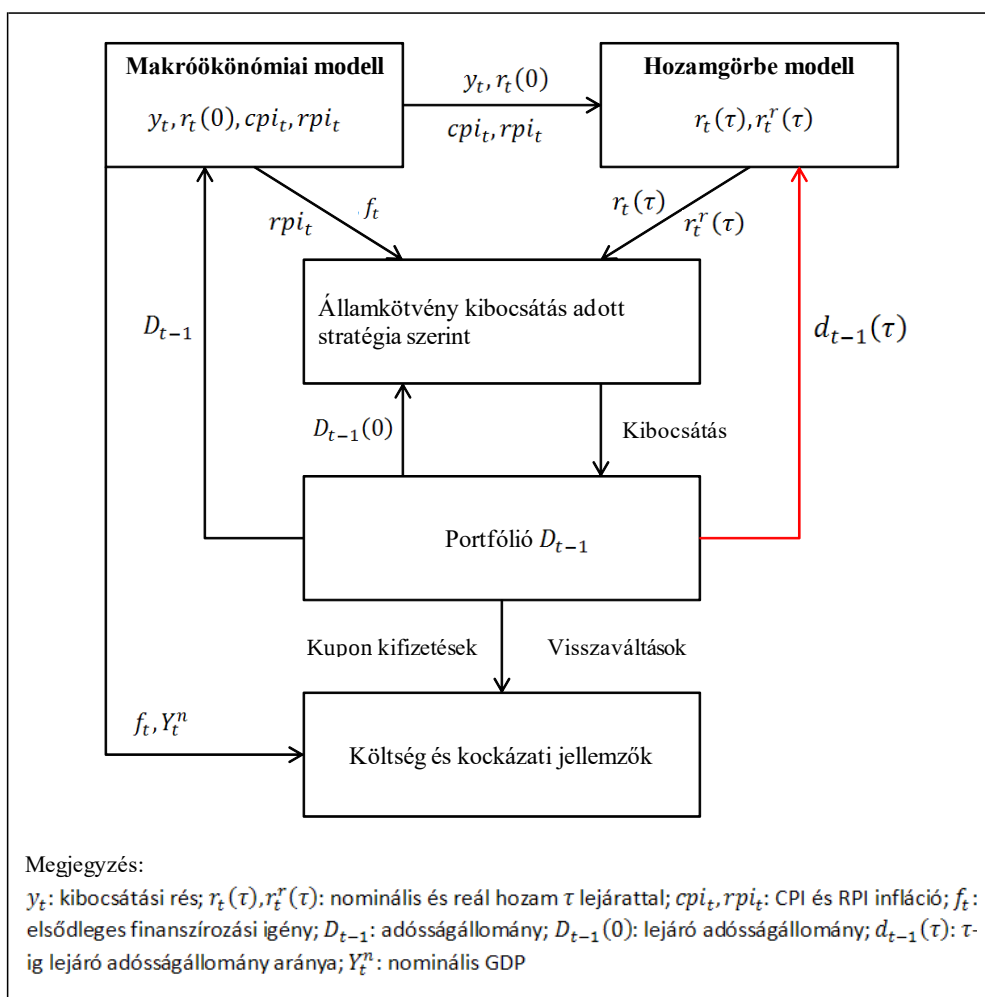
7.7 Egyesült Királyság

Az Egyesült Királyság adósságkezelője két, egymást kiegészítő modellt használ adósságkezelési tevékenysége során. Az első a stratégiai adósságelemző modell (SDA, Strategic Debt Analysis model), mely a sztochasztikus adósságstratégiai szimulációs modellek családjába tartozik, alapvetően egy Cost-at-Risk modell. Különböző finanszírozási szerkezetek kamatköltségét, kockázatát és az azok közti átváltást elemzi, 50 éves időtávon, finanszírozási szerkezetenként 10.000 realizáció futtatásával. Azért szükséges ilyen hosszú időtávot használni, mert 50 éves államkötvényt is kibocsátanak. Korábban 2000 realizációt használtak

és 125 évre terveztek előre. A modell szerint az adósságszolgálati költségekre az adósság mérete és szerkezete, a reálgazdaság állapota, a hozamgörbe, az infláció és a finanszírozási szükséglet van hatással, így ezeket jelzi előre. Négyféle kockázattípust különítenek el: a kamatkockázatot (finanszírozási kockázat, megújítási kockázat, kamat-újramegállapítási kockázat), az inflációs kockázatot, a likviditási kockázatot és a működési kockázatot.

Az SDA modell komponensei: (1) makroökonómiai feltételezések (új-keynesi modell), (2) változókat meghatározó egyenletek, (3) reál és nominális hozamok és (4) kibocsátási tervek. A CPI és az RPI inflációt a Phillips-görbe, a rövid hozamokat a Taylor-szabály segítségével határozzák meg, a kibocsátási rést és az elsődleges finanszírozási igényt rezsimváltó modellel számítják. A hozamgörbe előrejelzéséhez egy módosított Nelson-Siegel modellt használnak historikus adatokra alapozva. A látens faktorok dinamikáját a rövid kamatok, a CPI infláció és a kibocsátási rés fejlődésével írják le. A modell faktorait Kálmán-szűrővel becslik, a hozamgörbe görbülete pedig kapcsolódik a makrováltozók értékeihez. A reálhozam-görbét a várható RPI inflációval számolják. A változókhoz a paramétereket kalibrálással és elméleti megkötésekkel az 1992 és 2008 közti múltbeli adatok alapján határozzák meg. A szimulált adatokból az idő előrehaladtával rendszeresen frissítésre kerül a finanszírozási igény és a portfólió, és kiszámításra kerülnek a kívánt Cost-at-Risk értékek és a várható kamatkiadás nagysága.

A válság óta a makroökonómiai változókkal kapcsolatos feltevések és várakozások, főleg múltbeli adatok alapján, komoly problémát jelentenek, és a modell továbbfejlesztése ennek kezelése mellett a hozamgörbe egyes futamidőin lévő különböző spreadek becslésének beépítése felé történik. A 20. ábra az általuk használt modell változóit mutatja abban az esetben, amikor van visszacsatolás a kínálat és a hozamgörbe modell között.



20. ábra Az Egyesült Királyság szimulációs modelljének folyamatábrája (Forrás: Pick, A. és Anthony, M. (2006): *A simulation model for the analysis of the UK's sovereign debt strategy*, 29.o. nyomán)

A másik modell a portfólió szimulációs modell (PST, Portfolio Simulation Tool), ami alapvetően egy optimális kibocsátási mix meghatározását szolgálja. Ennek az input adatai a meglévő adósságportfólió, az SDA modell által generált nominális és reál hozamgörbék, a várható finanszírozási igények és a kibocsátandó eszközök százalékos megoszlása (megkötések vannak beépítve a futamidő-választék és az instrumentumtípusok futamidőnkénti megoszlása tekintetében). A PST eredménye

- egy olyan aukciós naptár (kibocsátási terv), ami megvalósítja a finanszírozási szükséglet teljesítését,
- az egyes kibocsátási alkalmakkor használandó kötvénysorozat (kitérve arra is, hogy újranyitásra kerüljön-e egy korábbi, vagy pedig új sorozat induljon),
- a kötvények kuponja, melyeket a hozamgörbékkel számítja a modell,
- az előzőeket felhasználva az aukciós hozam és ár.

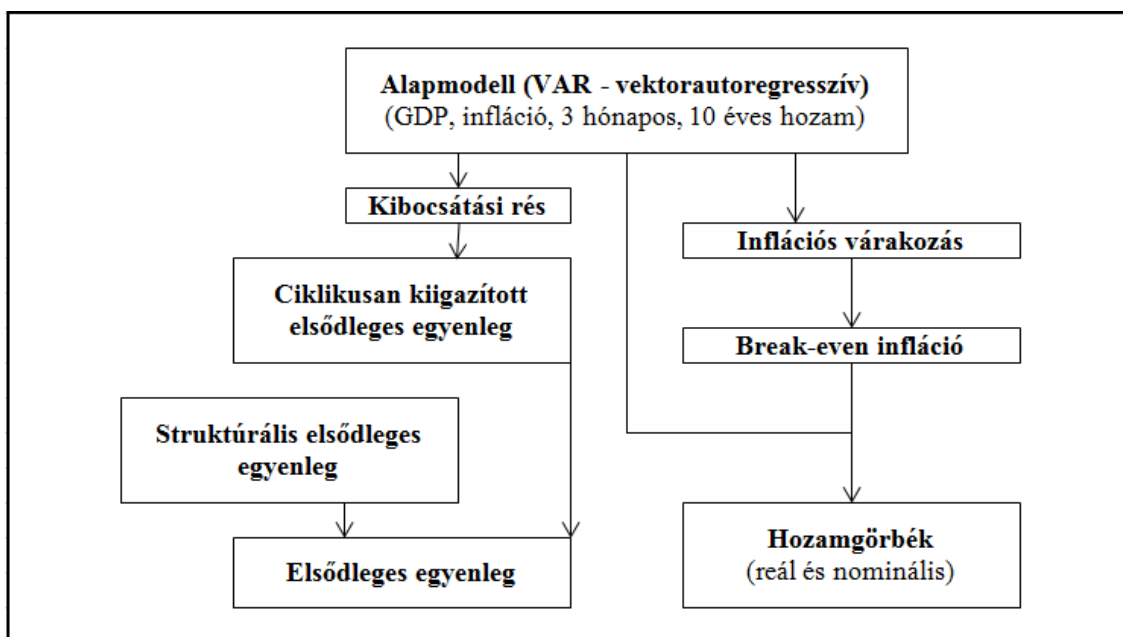
További lényeges output a kötvény pénzáramlások (kötvénykibocsátásból származó bevételek, kamatfizetések, lejáratok) ütemezésének becslése.

A PST modellt elsősorban arra használják, hogy megértsék a kibocsátási döntések portfólióra gyakorolt hatását. Ehhez a portfólió különböző statisztikáit számítják ki, úgymint lejáratig számított hozam, duration, konvexitás, piaci érték, illetve eszköztípus és lejárat

szerinti szerkezet. Vizsgálják még ezenkívül a lejárat szerkezetre és az átlagos lejáratra gyakorolt hatást is.

7.8 Franciaország

A francia modell egy központi modulra épül, ami a GDP-t, az inflációt, a 3 hónapos kamatozatokat, valamint a 3 hónapos és a 10 éves kamatok közötti különbséget szimulálva. Ezek modellezésére vektorautoregresszív folyamatot használnak, ugyanis az viszonylag egyszerű és jól reprodukálja a historikus korrelációkat, a folyamat rendjének becslésére különböző statisztikai tesztek és információs kritériumokat használnak. A központi modulra épül az elsődleges egyenleget meghatározó segédmodell és a nominális- és reálkamatozatok szimuláló rész. A ciklikusan kiigazított elsődleges egyenleget a kibocsátási rész egyszerű függvényeként modellezzik. A hozamgörbe esetén úgy határozzák meg a paramétereket, hogy minimális legyen az eltérés a modellezett és megfigyelt kamatlábak között 12 benchmark lejárat esetén. A nominális hozamgörbe paraméteres alakjához pedig a Nelson-Siegel modellt használják. A reálhozamgörbét ebből a break-even infláció kivonásával kapják. A modell sematikus rajzát tartalmazza az 21. ábra.



21. ábra A francia makromodell sematikus ábrája (Forrás: Renne, J-P. (2007): *What are the consequences of active management of average debt maturity in terms of cost and risk* 23.o. nyomán)

A modell érzékenységének elemzéséhez vizsgálják a makrogazdasági és pénzügyi sokkokat (lépték, eloszlás), a hozamgörbe és a VAR folyamat paramétereit, és a múltbeli adatok időtávját.

Gyakorlati szempontból a modelleknek célszerű együtt szimulálni a makrogazdasági változókat és az eszközök árát (azaz a hozamgörbét) és képesnek kell lennie, hogy nagyszámú stratégiát lehessen kezelni. Ennek a célnak a makropénzügyi affin hozamgörbe modellek (MF-ATSM, Macro-Finance Affine Term Structure Models) felelnek meg, míg a finanszírozási szerkezetek teljesítményének vizsgálatát úgynevezett spektrálemeléssel végzik. A francia modell vizsgálja az adósságszolgálat pro- és kontraciklikusságát (prociklikus egy változó, ha

pozitívan korrelál a gazdaság állapotával, míg kontraciklikus, ha negatívan) az egyes finanszírozási szerkezetek esetén. A modell a rövid kamatokat a Taylor-szabály, míg az inflációt a Phillips-görbe segítségével határozza meg. Minden periódusban Kálmán-szűrővel jelzik előre az állapotváltozókat és a VAR modell hibatagjainak kovariancia mátrixát, majd az új adatok ismeretében frissítik ezeket a becsléseket. A makromodell egyes paramétereit a log-likelihood függvény maximalizálásával, míg másokat kalibrálással határoznak meg. 10 éves, havi gyakoriságú adatsort (1999-2009) használnak. Reálhozamok azonban csak 2004-től elérhetőek, illetve az inflációs előrejelzések csak negyedéves gyakoriságúak.

7.9 Kanada

A kanadai adósságkezelő a konkrétan alkalmazott modell mellett D. J. Bolder révén tanulmányokon keresztül bemutatta az optimális adósságportfólió kialakításának egyes részterületeit. Jelen anyag elméleti része jelentős mértékben támaszkodik e tanulmányokra, így külön nem emeljük ki a megállapításokat. Így érintették a hozamgörbe elméleti és empirikus modellezését és az egyes modellek előrejelzésének és összehasonlításának lehetőségeit. Megemlítették ennek nehézségét, miszerint éven túl nem lehet zérókuponhozamokat megfigyelni, csak kötvényárfolyamokat. Próbálták megtalálni az egyensúlyt a hozamgörbe adott időpontbeli illeszkedésének pontossága és a görbe dinamikájának minél alaposabb leírása között, ugyanis mindkettő egyszerre nem javítható. Az optimalizáció kapcsán vizsgáltak lehetséges célfüggvényeket és korlátokat, az erőforrás igénybevétel csökkentése érdekében ismertettek több függvény-approximációs eljárást is. A modellben szerepelnek finanszírozási igény előrejelzések is, a modell időhorizontja 10 év. A hozamok alakulását egy összetett makroökonómiai modell alapozza meg, ez figyelembe veszi a hozamgörbét, inflációs előrejelzéseket és kibocsátási rést (output gap). A modell 1.800 futtatást végez. Az adósságkezelő nem alkalmaz durációs célkitűzést.

A hozamgörbe leírásának javítása érdekében makróváltozókat (kibocsátási rés, overnight kamat, maginfláció) és pénzügyi változókat (szint, meredekség, görbület) is szimulál a sztochasztikus modell. Ezen állapotváltozók leírására vektorautoregresszív folyamatokat használnak, és feltevés szerint a kamatlábak ezeknek az állapotváltozóknak a függvénye (pl. Nelson-Siegel modell). Ez utóbbi leképezés alapján különíthetők el az általuk vizsgált hozamgörbe modellek (többek között elemzik a Nelson-Siegel modellt is). Itt vizsgálati szempontként megemlítik, hogy a modellezett hozamgörbe különböző lejárati pontjai közti korrelációnak vissza kell adnia a historikus megfigyeléseken alapuló összefüggéseket. Az állapotváltozók volatilitását impulzusfüggvényekkel vizsgálják, azaz azt elemzik, hogy milyen hatással van egy változóra egy másik változót ért sokkhatás.

A kormányzat fiskális politikáját a finanszírozási szükséglettel modellezzik, erre többféle módszer lehetséges. A finanszírozási szükséglet az elsődleges egyenleg és az adósságszolgálati költségek összege, hangsúlyt fektetnek ezek kapcsolatának leírására is. Áttekintik ezenkívül az infláció kötvényekkel kapcsolatos számításokat is. A finanszírozási szerkezetet az egyes időpontokban kibocsátandó papírok részarányai jelentik, és büntetőfüggvények használatával figyelembe veszik a keresletet és kínálatot. A költség és kockázati mutatók közül az alábbiakat tekinti a modell (22. ábra):

Elsődleges dimenzió	Másodlagos dimenzió	Mérték
Költség	Éves szemlélet	Abszolút adósságköltség Relatív (százalékos) adósságköltség
	Aggregált szemlélet	Teljes (összegzett) nem-diszkontált adósságköltség Teljes (összegzett) diszkontált adósságköltség
Kockázat	Költséggel kapcsolatos kockázat	Adósságköltség szórása Abszolút, relatív és farok kockázatosított költség (Cost-at-Risk) Feltételes adósságköltség volatilitás
	Egyenleggel kapcsolatos kockázat	Költségvetési egyenleg szórása Abszolút, relatív és farok kockázatosított költségvetési egyenleg (Budget-at-Risk) Feltételes költségvetési egyenleg volatilitása
	Refinanszírozási kockázat	Megújítandó adósság aránya Napi és negyedéves megújítás Lejáratí profil

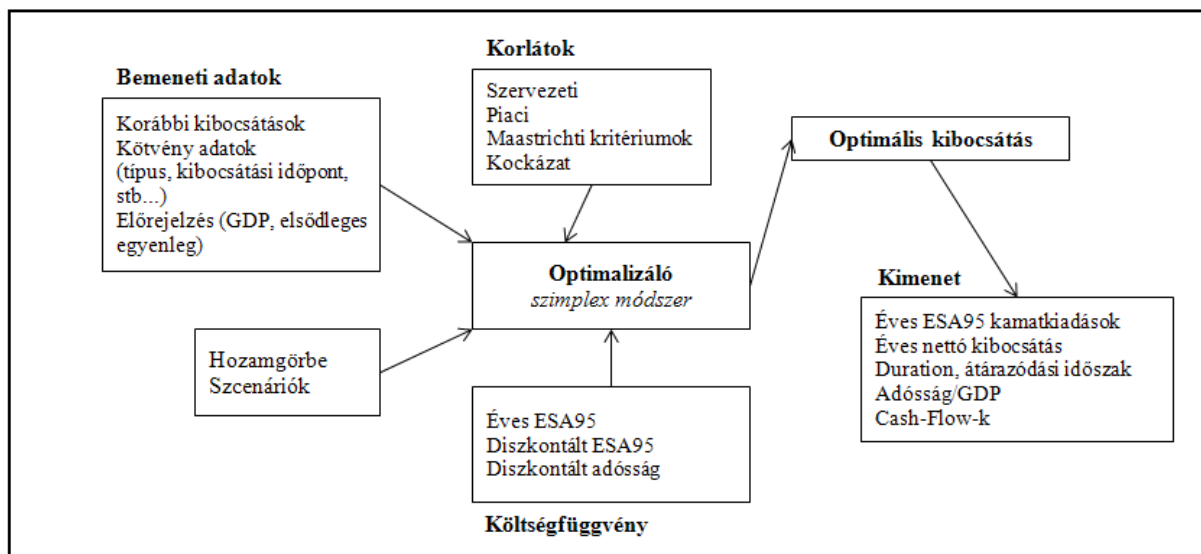
22. ábra A kanadaiak által használt alapvető költség és kockázati mérőszámok (Forrás: Bolder, D. J. és Deeley, S. (2011): *The Canadian Debt Strategy Model: An Overview of the Principal Elements* 20. o. nyomán)

7.10 Olaszország

A 2004-ben bemutatott olasz módszertan szerint az optimális portfólió megtalálása, ami minimalizálja az előre meghatározott költségfüggvényt, egy sztochasztikus optimális irányítási probléma, amely során a nemzeti és nemzetközi szabályozásokból, illetve a piaci gyakorlatból adódóan korlátok merülnek fel. Szabályozási korlátok például a maastrichti kritériumok. A sztochasztikus komponenst a kamatlábak és az elsődleges költségvetési egyenleg dinamikájával szemléltetik. Kiválasztják a szimulált változók alakulásának egy konkrét lehetséges megvalósulását, ezzel az optimalizálási feladat lényegesen egyszerűsödik (ugyanis véges dimenziós lineáris programozási probléma lesz csupán. Minden megvalósulás mellett elvégezve az optimalizálást lényegében a szimulált kimenetek mellett optimális megoldások eloszlását kapják eredményül. A modell az egyes időpontokra kiszámítja az egész portfólió pénzáramlását és a Kincstári Egységes Számlán lévő készpénzmenntységet. Korlátot alkalmaznak egyrészt arra, hogy a kamatfizetések és a tőketörlesztések visszafizetésének fedezete rendelkezésre álljon, másrészt pedig az éves nettó kibocsátásra is meghatároznak felső korlátot. Ezen kívül a piaci stabilitás miatt korlátot állapítanak meg a rövid kötvények arányának megváltozására (dinamikus korlát), illetve a hosszú kötvények arányának nagyságára (statikus korlát).

Az olasz modellben költségfüggvénynek az ESA95 szerinti eredményszemléletű éves költségeket (vagy a diszkontált költségeket) használják. Ennek értelmében szétsztyják a teljes költséget (kamat, a névérték és a kibocsátási ár különbözete) a futamidő alatt, tehát eredményszemléletű modellt használnak. A kamatlábakat sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásként definiálják, azaz a rövid kamatokra a CIR modellt alkalmazzák, ebből határozzák meg a diszkontfaktorokat, és így a teljes hozamgörbét. Másik lehetőségként megemlítik a Heath-Jarrow-Morton modellt is. A modellben havonta történik kibocsátás, a folyamatok diszkrét dinamikájának időközai is egy hónaposak, az optimalizáció időtávja 5 év. Az optimális stratégia meghatározására két lehetőséget vizsgálnak. Az egyik esetén meghatározzák a kamatlábak legvalószínűbb alakulását és ennek mentén minimalizálnak, míg a másik esetben egy alkalmazkodó stratégiát (MPC, Model Predictive Control Strategy) használnak, melynél a kibocsátás napján lévő hozamgörbét alapul véve becsülik a költséget a

szcenáriók széleskörű sorozatát tekintve. A 23. ábra összefoglalja az optimalizálási folyamatot az olasz modell esetén.



23. ábra Az olasz modell optimalizálási folyamata (Forrás: Adamo et al. (2004): *Optimal Strategies for the Issuances of Public Debt Securities* 8.o. nyomán)

Több továbblépési irányt is megemlítenek, ilyen például a hozamgörbe pontosabb előrejelzése sztochasztikus ugrásokat is használva, a kötvénykibocsátás makrogazdaságra gyakorolt hatásának vizsgálata és az elsődleges egyenleg modellezése.

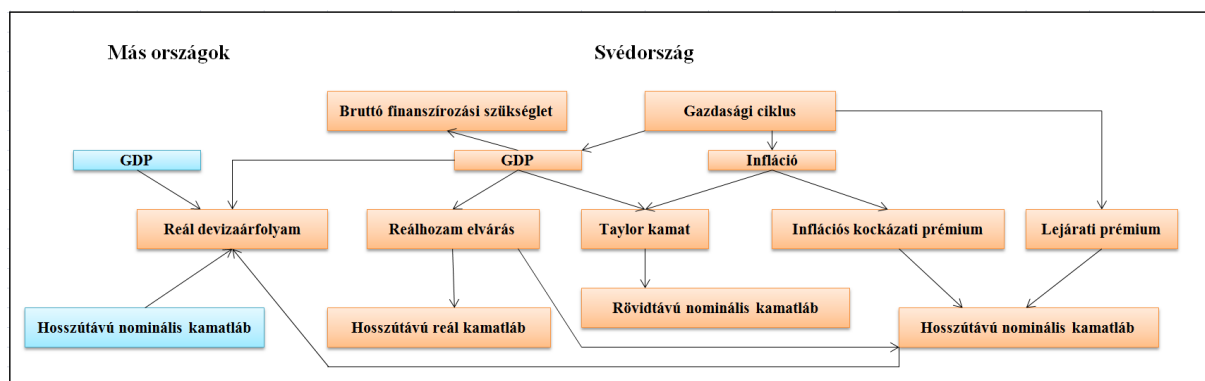
Az olasz adósságkezelő egy 2010-es tanulmánya az optimalizációt részletezi, bemutatva egy többlépcsős sztochasztikus programozási módszertant. Ebben az egyes állapotokat és lehetséges alakulásokat fával modellezzik, az egyes csomópontbeli döntéseket pedig endogén módon határozza meg a modell. A döntések azt számszerűsítik, hogy az egyes állapotokban, az egyes papírokból mekkora névértékű kibocsátás szükséges, hogy fedezzék a fennálló adósságot. Felteszik továbbá, hogy egy döntés költségei két tényezőből adódnak össze, (1) pénzbeli költségekből a kupon- és tőkefizetések miatt, illetve (2) a jövőbeli kifizetések jelenértékéből, azaz azon kötvények árából, amik nem járnak le a tervidőszak végéig. Ebben a modellben a kockázatokat a feltételes kockázattal mérik (cVaR, conditional Value-at-Risk). Az eredményeket grafikusan szemléltetik a költség-kockázat térben, és meghatározzák a hatékony portfóliók halmazát.

7.11 Svédország

A svéd adósságkezelő három modellt is használ, egy makroökonómiai alapú sztochasztikus modellt, egy scenáriómodellt és egy szimulációs Cost-at-Risk modellt. Megállapításuk szerint a költségekre ható faktorok az adósság nagysága, a kamatláb, a devizaárfolyam, az inflációs ráta, a finanszírozási igény és a kibocsátási szerkezet, így ezeknek az alakulását szükséges elemezni és modellezni. E változók közötti interakciók a hibatagok kovariancia mátrixán keresztül történhetnek. A modellek elsődleges célja a hosszútávú adósság minimalizálása a kockázatok figyelembe vételével. Különös figyelmet fordítanak az adósság szerkezetére, köszönhetően az inflációhoz kötött és a külföldi devizában denominált adósságelemek miatt.

A különböző adósságstratégiákat elsődlegesen egy egyensúlyi állapotban vizsgálták, az ide való eljutás azonban más modelleket is igényel.

Az első modell két almodellből áll. Ez sztochasztikus folyamatok alapján modellezi többek között a GDP, az infláció, a kamatok, a devizaárfolyamok és a nettó finanszírozási igény alakulását. A változók stacionárius autoregresszív folyamatot követnek, néhány változó esetén azonban ez a folyamat függ attól, hogy konjunktúra vagy recesszió van-e, ezért Markov-féle rezsinváltó modelleket használnak. Három devizakörnyezetben modellezik a folyamatokat: Svédország, USA és euróövezet (a nettó finanszírozási igényt és a reálkamatoakat csak Svédországnál modellezik). A szimuláció eredményei bekerülnek egy portfóliómodellbe, ami költségeket számol a makrotényezők alapján, azonban az outputjai nem kerülnek vissza a makromodellbe. E portfólió-almodell nem a tényleges adósságelemeket tartalmazza, hanem a stratégiának megfelelő portfólió-kialakítást, elsődlegesen a szerkezetre és a durationre összpontosítva. Mivel a GDP-t a makromodell generálja, így a portfólió-kialakításhoz kapcsolódó adósságköltségek endogén változók. A modell összetettségét jelzi a következő ábra, ami a devizaárfolyamra ható tényezőket ábrázolja.



24. ábra A devizaárfolyamra ható tényezők (Forrás: Bergstrom, P., Holmlund, A. és Lindberg, S. (2002): *The SINDO's Simulation Model for Government Debt Analysis*, 4.o. nyomán)

A második modell a sokkok vizsgálatát célozza, és itt már lényegesebb szerepe van az adósságkezelésnek. Az inputadatok sokk-szenáriók a finanszírozási igények, kamatok vagy devizaárfolyamok terén, a modell ezek hatását vizsgálja a portfólióra. Az eredmények pontbecslések a modellező által meghatározott helyzetre, de a különböző sokkok mellett kapott eredmények nem összehasonlíthatók, ugyanis nem ismert a szenáriók bekövetkezésének valószínűsége. Megállapították, hogy egy hosszú durationú portfólió ugyan véd a kamatkilengések hatása ellen, azonban magasak a költségei (drága biztosítást jelent), miközben a devizaarány csökkentése jelentősen csökkenti az árfolyamkockázatot, a költségkülönbség pedig kicsi.

A harmadik, CaR modellben a hozamgörbe, infláció és devizaárfolyam változókat sztochasztikus szimulációval közvetlenül (azaz nem a makromodellből) jelzik előre. A nominális, reál- és deviza-hozamgörbéket nagyon részletesen autoregresszív folyamatokkal modellezik (nem csak a hozamszinteket, hanem a görbe meredekségét és görbületét is). A szimulált változók segítségével számolják az adósság egységére eső költséget, miközben a kockázatot ún. RYaR (Running-Yield-at-Risk) mutatóval mérik. Ez a kockázati mutató a szimulált költségelosztás mediánja és 95. percentilise közti eltérést méri. A CaR modell eredményeit alapvetően a kibocsátási futamidók kiválasztására használják azzal, hogy a portfólió-összetétel

konstans a modellben. A költség mérőszámának megválasztása kritikus, különösen akkor, ha van devizaadósság is.

A modellek továbbfejlesztési iránya Svédországban a kockázatok és költségek attól függő figyelembe vétele, hogy mekkora az adósság nagysága. Magasabb adósság mellett például jelentősen nőhet a kockázatelutasítás mértéke, míg alacsonyabb adósságnál, ha a költségek csökkenthetőek, akkor a magasabb kockázat is elfogadhatóbb lehet egy adósságkezelő számára. Új kihívásokat jelentenek a kormányzat szabályozásai (adósság összetétel és lejárat), az adósság csökkentésének célja, a piaci likviditásnak és az állampapírok iránti keresletnek a modellezése is.

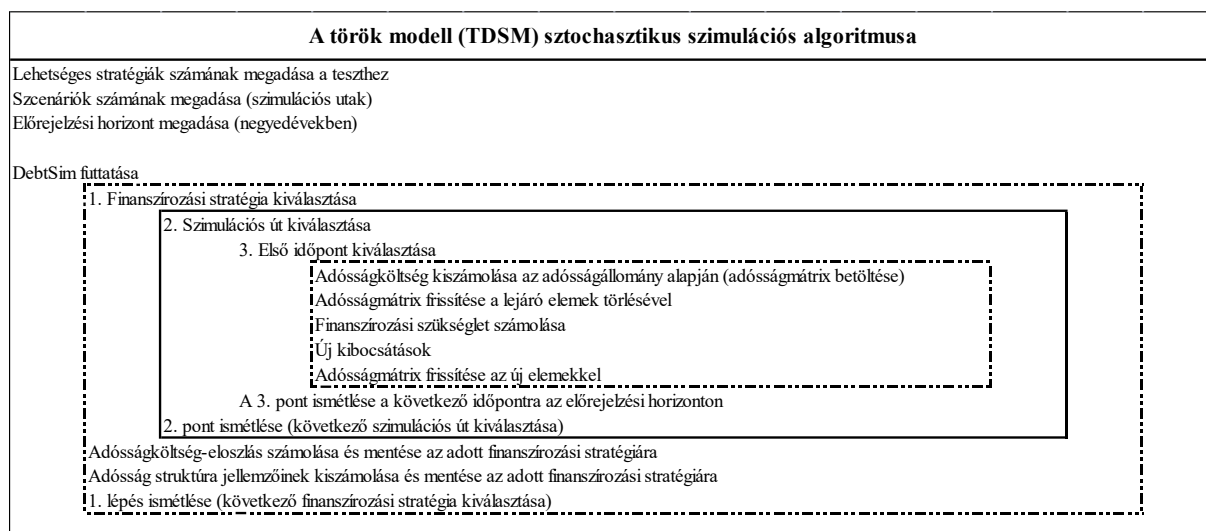
7.12 Törökország

A török kincstár egy sztochasztikus adósságkezelési modellt, és az ahhoz kapcsolódó kockázatos költség (CaR, Cost-at-Risk) szimulációs modellt alkalmaz. A modell kialakítása hosszú időn keresztül történt, és törekedtek arra, hogy más országok gyakorlatából a legjobb eredményeket adó megoldásokat vegyék át. A modell futtatásának számos eredménye van már, azonban ezekből még nem alakítottak ki az adósságszerkezetre vagy a finanszírozási szerkezetekre vonatkozó új benchmarkokat.

A sztochasztikus modell (lineáris többlepcsős, több célkitűzéses sztochasztikus programozási modell) a stratégiát kívánja megalapozni azáltal, hogy megmutatja (a költségek, kockázatok és más makrogazdasági szabályok alapján) mely kibocsátási szerkezet tekinthető optimálisnak a következő ismérvek mentén: futamidő (rövid vagy hosszú), kamatozás (zéró kupon vagy kamatozó adósság, fix vagy változó), devizanem (hazai vagy külföldi deviza denomináció). Az optimalizálás során egyszerre több célkitűzést is figyelembe vesz a modell, a várható költségek (kamatkiadások felhalmozott vagy cash flow szemléletben, piaci vagy nominális érték), a piaci kockázat (legrosszabb eset, ingadozás egy célérték körül, feltételes CaR) és a likviditási kockázat (Cash Flow-at-Risk, legrosszabb eset, ingadozás egy célérték körül, változás az időben) csökkentését. A modellbe korlátokat is beépítenek a kötvénykibocsátások összegére, a kincstári számla állományára, a kamatkiadásokra és a devizaadósság piaci értékére. A makrotényezők (hozamok, USD/TRY devizaárfolyam, havi hazai infláció és dollár infláció) modellezésére a török kincstár vektorautoregresszív folyamatokat használ. Az egyes makroszcenáriók könnyebb alkalmazása és a vizsgálandó esetszám csökkentése érdekében a modellben egy klaszterezési algoritmus segítségével a szimulált scenárióeseteket kevés számú klaszterbe csoportosítják, melyekhez hozzárendelik azok bekövetkezési valószínűségét. Ezáltal gyorsabb a futásidő és könnyebben vizsgálhatnak mintán belüli és mintán kívüli stabilitást.

A költség-kockázat elemzés fő célja a stratégiai benchmarkok meghatározása, ezek a portfólió fő mutatószámainak olyan numerikus célértékei, amelyek leírják a kívánt adósságstruktúrát, és ezáltal iránymutatást adnak az alkalmazandó stratégiát illetően. Az optimalizáció eredményeként azonban nem egy konkrét legjobb kibocsátási mix, hanem az ilyen hatékony kibocsátási szerkezetekből alkotott halmaz adódik, melyek közül a döntéshozóknak kell kijelölniük az elérni kívánt célt. A három célkitűzést tekintve a modell eredménye egy háromdimenziós felület, a dimenziók a költség, a piaci kockázat és a likviditási

kockázat. A döntéshozóknak kell meghatározniuk a preferenciáikat, megvizsgálni különböző változatokat és kijelölni, hogy e felület pontjai alapján melyik irányba mozduljon az adósságkezelő a kibocsátási szerkezet kialakításában. A modell a finanszírozási szerkezeteket elemzi, de a modell átalakítható a portfólió-összetétel optimalizálására is.



25. ábra A török sztochasztikus szimulációs algoritmus folyamatábrája (Forrás: Balibek E., Memis H. A. (2012): *Turkish Treasury Simulation Model for Debt Strategy Analysis* 29.o. nyomán)

A török modellben a kockázatosított költség (CaR) szimuláció 5 éves időhorizontra tekint előre, negyedéves időközökkel, reprezentáns értékpapírokkal 5000-szer futtatva. A modell a makrogazdasági szcenáriók futtatása, az adósság szerkezete és az egyes finanszírozási szerkezetek alapján eredményül adja, hogy mik az adott finanszírozási szerkezet követésének várható költségei és kockázata, és a modell egyben azt is megmutatja, hogy mi a várható adósságállomány az egyes szcenáriók esetén. A szimuláció további szemléletes eredménye az előrejelzett kamatköltségek és az adósságállomány GDP-hez viszonyított arányának eloszlása. Az adott év kibocsátásainak költségei megjelennek a további évek költségvetési hiányában is, ezt figyelembe veszi a modell. A kockázatokat tekintve vizsgálják a 12 hónapon belül lejáró adósság arányát, a likviditást biztosító készpénzállomány szintjét, a CPI-indexált kötvények arányát, az egy éven belül átárazódó adósság arányát, a devizarésarányt és a devizák közötti megoszlást. A modellt a MATLAB programban írták meg, és a CIR (Cox-Ingersoll-Ross) hozamgörbe modellt alkalmazzák a rövid kamatlábak szimulálására, az egész hozamgörbéhez pedig egy módosított Nelson-Siegel módszertant. A szükséges paramétereket historikus adatokból becslik. A makromodellezés nehézségei közé tartozik a hosszú törökországi piaci adatsorok hiánya, a rezsimváltások és a válságok miatti törések az adatsorokban és a kis valószínűséggel bekövetkező extrém esetek kezelése.

8 Összegzés

Az egyes országok konkrét modellezési gyakorlatából nem rajzolódik ki egyértelmű „best practice”, így ahhoz, hogy a hazai modellt megfelelő alapokra helyezze az ÁKK, az előbbieken felül át kell tekinteni a portfóliómodellezés és optimalizálás elméleti hátterét is. A külföldi adósságkezelők is ezt teszik, a modellek leírásai – amennyiben ez elérhető – a konkrétan megvalósított eljárások mellett számba veszik a lehetséges eljárásokat és megindokolják, hogy miért egyik vagy másik hozamgörbe modellt, makrováltozó-becslést, optimalizációs eljárást stb. alkalmazták. Ehhez azonban a lehetséges eljárások előzetes vizsgálata szükséges, és az egyes országok sajátosságai következtében ezt minden adósságkezelőnek magának kell elvégeznie.

A külföldi modellek közül a svéd, a török és a brazil modellek gyakorlati leírása olyan részletezettségű, hogy az ÁKK várhatóan az új modelljének kialakításakor nagyban tud építeni e modellekre. E három ország azért is jó példa, mert rendelkeznek devizaadóssággal és modelljeik kezelik is azt, míg számos más – egyébként jól kidolgozott modellel rendelkező – országból (pl. Egyesült Királyság) ez hiányzik. Az ÁKK új modelljének elméleti kialakításakor azonban a vonatkozó szakirodalomra is támaszkodni fog, ebből a szempontból pedig a kanadai adósságkezelő modelljének leírása a legkidolgozottabb.

A nemzetközi szakirodalom és gyakorlat alapján összeállítható, hogy milyen lépéseken keresztül történhet egy optimális portfólió (vagy kibocsátási szerkezet) modell kialakítása. A folyamat számos részre bontható, fő lépései a következők:

1. az időhorizont megválasztása,
2. a kezdőportfólió meghatározása,
3. a finanszírozási szerkezet kiválasztása,
4. az állapotváltozók (makrováltozók, finanszírozási szükséglet, jövőbeli kamatlábak) véletlen sorozatának generálása,
5. a finanszírozási szerkezet alkalmazása az egyes időpontokra,
6. az adósságköltségek kiszámítása az egyes időpontokra az adott finanszírozási szerkezet esetén,
7. a 4-6. lépések több ezer megismétlése az adósságköltségek eloszlásának előállításához,
8. az adósságköltség eloszlások alapján a költségek, a kockázatok és az adósságszerkezet mutatószámainak meghatározása,
9. a 3-8. lépések ismétlése a vizsgálandó finanszírozási szerkezetek esetén,
10. optimalizálás,
11. a modell alkalmazhatóságának ellenőrzése (érzékenységvizsgálat, stresszteszt),
12. eredmények elemzése és ábrázolása.

A tanulmányban kevés szó esett a 10. lépés, az optimalizálás konkrét megvalósításáról. Ennek egy igen gazdag irodalommal rendelkező módszertana a sztochasztikus programozás. Ez olyan optimalizálási problémákra jelent megoldást, ahol a korlátok vagy a paraméterek a véletlentől függnek (ahogy a gyakorlati problémák esetében általában), de ismerjük az eloszlásukat vagy legalábbis becsülni tudjuk azokat. Következő lépés a sztochasztikus

programozási modelleknek az adósságkezelésben való felhasználhatóságának vizsgálata. Az olaszok (Consiglio és Staino 2012), illetve a törökök (Balibek 2008; Balibek és Köksalan 2010) is foglalkoztak ezzel a témával, tehát a nemzetközi példák alapján is egy lehetséges továbblépési irány.

Egy kiemelt részterület a hozamgörbe modellek részletesebb vizsgálata, különös figyelmet fordítva a makrováltozókkal történő együttes szimulálásra. Erre azért van szükség, mert a hozamok alakulása országspecifikus, így szükséges kiválasztani az adott idősorhoz legjobban illeszkedő hozamgörbe modellt (magát a modellt és annak megfelelő paraméterezését). Ez azt is jelentheti, hogy a 4-8. lépéseket különböző hozamgörbe-modellek mellett is érdemes lefuttatni, és összehasonlítani az eredményeket. A 10. optimalizálási fázis ugyancsak különösen fontos lépés, és nem garantálható, hogy lesz egyértelműen optimális megoldás, sőt, az eredményül kapott hatékony portfóliók halmazából sem mindig könnyű a választás, vagy akár benchmark értékek kijelölése.

Az egyes országok által meghatározott benchmark értékeket az *A külföldi adósságkezelők által használt benchmark értékek összefoglaló táblázata* mutatja be. Viszonylag elterjedőben van a duration helyett az átlagos átárazódási idő használata, illetve a bizonyos időtávon belül lejáró adósság arányára vonatkozó célkitűzés is. A táblázatból azonban az is látható, hogy számos ország, amely egyébként kifinomult modellel rendelkezik, nem határoz meg benchmarkokat az adósság szerkezetére, illetve tulajdonságaira vonatkozóan.

Az egyes fentebb ismertetett országmodellek összehasonlító táblázatát a *Függelék C: A külföldi modellek összefoglaló táblázata* fejezet tartalmazza.

Felhasznált irodalom

- Adamo, Massimiliano, Anna Lisa Amadori, Massimo Bernaschi, Claudia La Chioma, Alessia Marigo, Benedetto Piccoli, Simone Sbaraglia, és mtsai. 2004. „Optimal Strategies for the Issuances of Public Debt Securities”. *International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF)* 07 (07): 805–22.
- Állami Számvevőszék. 2012. „Jelentés az államháztartás központi alrendszerének adóssága és éven túli kötelezettségvállalásának ellenőrzéséről”.
- Balibek, Emre. 2008. „Multi-objective approaches to public debt management”. In . Middle East Technical University.
- Balibek, Emre és Murat Köksalan. 2010. „A multi-objective multi-period stochastic programming model for public debt management”. *European Journal of Operational Research* 205 (1): 205–17.
- Balibek, Emre és Hamdi Alper Memis. 2012. „Turkish treasury simulation model for debt strategy analysis”. Policy Research Working Paper Series 6091. The World Bank.
- Bergström, Pal, Anders Holmlund és Sara Lindberg. 2002. „The SNDO’s Simulation Model for Government Debt Analysis”.
- Bolder, David Jamieson. 2001. „Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation”. Staff Working Papers 01–15. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson. 2002. „Towards a More Complete Debt Strategy Simulation Framework”. Staff Working Papers 02–13. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson. 2003. „A Stochastic Simulation Framework for the Government of Canada’s Debt Strategy”. Staff Working Papers 03–10. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson. 2007. „Examining Simple Joint Macroeconomic and Term-Structure Models: A Practitioner’s Perspective”. Staff Working Papers 07–49. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson és Simon Deeley. 2011. „The Canadian Debt-Strategy Model: An Overview of the Principal Elements”. Discussion Papers 11–3. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson és Scott Gusba. 2002. „Exponentials, Polynomials, and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada”. Staff Working Papers 02–29. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson és Yuliya Romanyuk. 2008. „Combining Canadian Interest-Rate Forecasts”. Staff Working Papers 08–34. Bank of Canada.
- Bolder, David Jamieson és Tiago Rubin. 2007. „Optimization in a Simulation Setting: Use of Function Approximation in Debt Strategy Analysis”. Staff Working Papers 07–14. Bank of Canada.
- Cabral, R., M. Lopes, W. Baghdassarian, L. Alves, P. Souza és A. dos Santos. 2008. „A Benchmark for Public Debt: The Brazilian Case”.
- Chan, K. C., G. Andrew Karolyi, Francis A. Longstaff és Anthony B. Sanders. 1992. „An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate”. *The Journal of Finance* 47 (3): 1209–1227.
- Consiglio, Andrea és Alessandro Staino. 2012. „A stochastic programming model for the optimal issuance of government bonds”. *Annals of Operations Research* 193 (1): 159–72.

- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll és Stephen A. Ross. 1985. „A Theory of the Term Structure of Interest Rates”. *Econometrica* 53 (2): 385–407.
- Dai, Qiang és Kenneth Singleton. 2003. „Term Structure Dynamics in Theory and Reality”. *Review of Financial Studies* 16 (3): 631–78.
- Danmarks Nationalbank. 2010. „Danish Government Borrowing and Debt”.
- Darabos Beáta. 2010. „Idősorok rendbecslése információelméleti módszerekkel”. In . Eötvös Loránd Tudományegyetem.
- Date, P., A. Canepa és M. Abdel-Jawad. 2011. „A mixed integer linear programming model for optimal sovereign debt issuance”. *European Journal of Operational Research* 214 (3): 749–58.
- Diebold, Francis X. és Canlin Li. 2006. „Forecasting the term structure of government bond yields”. *Journal of Econometrics* 130 (2): 337–64.
- DMO Annual Review. 2008. „Chapter 6: The Portfolio Simulation Tool”.
- Farkas, Richárd, Zsuzsa Mosolygó és Judit Páles. 2006. „A tőkeindexált államkötvény jellemzői, nemzetközi helyzete és hazai tapasztalatai”. ÁKK belső tanulmány.
- Fisher, Mark, Doug Nychka és David Zervos. 1995. „Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines”.
- Hamilton, James D. 1989. „A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle”. *Econometrica* 57 (2): 357–384.
- Heath, David, Robert Jarrow és Andrew Morton. 1992. „Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation”. *Econometrica* 60 (1): 77–105.
- Kim, Chang-Jin. 1994. „Dynamic linear models with Markov-switching”. *Journal of Econometrics* 60 (1–2): 1–22.
- Li, B., E. DeWetering, G. Lucas, R. Brenner és S. Shapiro. 2001. „Merrill Lynch Exponential Spline Model”.
- Litterman, Robert B és Josè Scheinkman. 1991. „Common Factors Affecting Bond Returns”. *The Journal of Fixed Income* 1 (1): 54–61.
- Magyar Nemzeti Bank. 2013. „Kivetítés a költségvetési egyenleg és az államadósság alakulásáról (2013-2027)”.
- Makara Tamás. 1996. „A portfólióelmélet alapjai és a CAPM”.
- Mörters, P. és Y. Peres. 2010. *Brownian Motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.
- Nelson, Charles R. és Andrew F. Siegel. 1987. „Parsimonious Modeling of Yield Curves”. *The Journal of Business* 60 (4): 473–489.
- Pick, Andreas és Myrvin Anthony. 2006. „A simulation model for the analysis of the UK’s sovereign debt strategy”. UK Debt Management Office Research Paper.
- Pooter, Michiel De. 2007. „Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models”. Tinbergen Institute Discussion Papers 07-043/4. Tinbergen Institute.
- Renne, Jean-Paul. 2007. „What are the consequences of active management of average debt maturity in terms of cost and risk”.
- Renne, Jean-Paul és N. Sagnes. 2006. „Analytical model of French State debt strategies”.

- Robbins, Janine, Brian Torgunrud és Chris Matier. 2007. „Fiscal Planning Under Uncertainty – The Implications of Economic and Fiscal Uncertainty for Budget Forecasts”.
- Silva, A., L. De Carvalho és O. De Medeiros. 2010. „Public Debt: The Brazilian experience - Federal Public Debt risk management”.
- Thorbjörnsdóttir, H. 2011. *Macroeconomic Multifactor Model: An Econometric Study*. Kungliga Tekniska högskolan, Institutionen för matematik.
- Vasicek, Oldrich. 1977. „An equilibrium characterization of the term structure”. *Journal of Financial Economics* 5 (2): 177–88.

Függelék A: Matematikai összefoglaló

Autoregresszív- és vektorautoregresszív folyamatok

Először definiáljuk az X_t p -edrendű autoregresszív folyamatot (AR(p)):

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

ahol $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ valós értékű együtthatók, míg ε_t általában független értékű zaj, vagy fehér zaj. Az előbbi független, míg utóbbi korrelálatlan, 0 várható értékű, azonos eloszlású hibatagokat jelent.

A vektorautoregresszív (VAR) folyamatok esetén az egyenlet a következő alakot ölti:

$$X_t = A_0 + A_1 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + \dots + A_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

ahol X_t a k állapotváltozó vektora, A_0 k dimenziós konstans vektor, A $k \times k$ - méretű mátrix, míg a hibatagok vektorára igazak a következők:

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, tehát mindegyik változó hibatagjának várható értéke 0
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) = \Omega$, tehát az egyidejű hibatagok kovariancia mátrixa egy előre adott Ω
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}^T) = 0$, azaz időben nincs korreláció az egyedi hibatagok között.

Látható, hogy a vektorautoregresszív folyamat esetén az egyes változók közötti kapcsolat a hibatagok kovariancia mátrixán keresztül írható le.

Állapottér modell

Egy N dimenziós y_t idősor állapotter modelljét egy m dimenziós megfigyelt α_t állapotvektor mérési egyenletével és a hozzátartozó Markov-típusú (csak az utolsó állapottól függő) átmenet egyenlettel lehet leírni, utóbbi az állapotváltozó időbeli fejlődését határozza meg. A mérési egyenlet a következőképpen néz ki:

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, T,$$

ahol Z_t egy $N \times m$ -es mátrix, d_t $N \times 1$ -es vektor és ε_t $N \times 1$ -es hibavektor $\mathcal{N}(0, H_t)$ eloszlással. Az állapotváltozó átmenet egyenlete a következő:

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t, t = 1, \dots, T,$$

ahol T_t $m \times m$ -es méretű átmenetmátrix, c_t $m \times 1$ -es vektor, R_t $m \times g$ -s mátrix és η_t hibavektor $\mathcal{N}(0, Q_t)$ eloszlással.

Duration

Vízszintes, effektív hozamgörbe esetén

- a kötvény ára $P_t = P_t(r_t) = \sum_{i=1}^m \frac{CF_i}{(1+r_t)^{t_i-t}}$

- itt r_t a lejáratig számolt hozam (yield to maturity), CF_i -k pedig az egyes pénzáramlások,
- $\frac{\partial P_t(r_t)}{\partial r_t} = -\sum_{i=1}^m \frac{(t_i-t)CF_i}{(1+r_t)^{t_i-t+1}} = -\frac{1}{(1+r_t)} \sum_{i=1}^m \frac{(t_i-t)CF_i}{(1+r_t)^{t_i-t}}$ az árfolyamfüggvény érintőjének meredksége, ha a t időpillanatban ábrázoljuk a P_t kötvényárfolyamot az r_t lejáratig számított hozam függvényében,
- $\frac{\partial P_t(r_t)/P_t(r_t)}{\partial r_t} = -\frac{1}{(1+r_t)} \sum_{i=1}^m (t_i - t) \frac{PV(CF_i)}{P_t(r_t)} = -\frac{1}{(1+r_t)} D_t$, ahol $PV(\cdot)$ a jelenértéket jelöli, és $D_t = \sum_{i=1}^m (t_i - t) \frac{PV(CF_i)}{P_t(r_t)}$ a Macaulay-féle duration,
- az előző ellentettje a D_t^* módosított duration, tehát $D_t^* = \frac{1}{(1+r_t)} D_t$.

Vízszintes, loghozamgörbe esetén

- a kötvény ára $P_t = P_t(y_t) = \sum_{i=1}^m CF_i e^{-(t_i-t)y_t}$,
- $\frac{\partial P_t(y_t)}{\partial y_t} = -\sum_{i=1}^m (t_i - t) CF_i e^{-(t_i-t)y_t}$,
- $\frac{\partial P_t(y_t)/P_t(y_t)}{\partial y_t} = -\sum_{i=1}^m (t_i - t) \frac{PV(CF_i)}{P_t(y_t)} = -D_t$, ahol $D_t = \sum_{i=1}^m (t_i - t) \frac{PV(CF_i)}{P_t(y_t)}$ a Macaulay-féle duration loghozamgörbe esetén
 - a módosított durationre $D_t^* = D_t$,

Nyilván igaz, hogy $t_1 - t \leq D \leq t_m - t$.

A Fisher-Weil duration esetén a pénzáramlások jelenértékéhez nem a lejáratig számított hozamot használják, hanem a t -ben lévő zérókupon görbét.

Az effektív durationt opciós kötvényeknél használják (visszaváltható és visszahívható kötvények), megegyezik az árfolyam, mint a kamatláb függvénye, meredekségének diszkrét közelítésével. A következő képletben V a kötvény árfolyama, Δy pedig a kamatláb elmozdulása.

$$ED = \frac{V_{-\Delta y} + V_{+\Delta y}}{V_0 2\Delta y}.$$

(Hátralévő) Átlagos futamidő

Legyen t_i egy kötvény (hátralévő) futamideje, N_i a névértéke, I_i az indexálási együttható (nem indexált kötvények esetén ez 1) és I a kötvények halmaza. Ekkor az átlagos futamidő (Average Term to Maturity) a következő:

$$ATM = \frac{\sum_{i \in I} t_i N_i I_i}{\sum_{i \in I} N_i I_i}.$$

Konvexitás

Vízszintes, effektív hozamgörbe esetén

$$C_t = \frac{\partial^2 P_t(r_t)/P_t(r_t)}{\partial r_t^2} = \frac{1}{(1+r_t)^2} \sum_{i=1}^m (t_i - t)^2 \frac{PV(CF_i)}{P_t(r_t)}.$$

Vízszintes, loghozamgörbe esetén

$$C_t = \frac{\partial^2 P_t(y_t)/P_t(y)}{\partial y_t^2} = \sum_{i=1}^m (t_i - t)^2 \frac{PV(CF_i)}{P_t(y_t)}.$$

A Taylor-sorfejtés alapján így

$$\begin{aligned} dP_t(r_t) &= \frac{\partial P_t(r_t)}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_t(r_t)}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 + o((dr_t)^2) = \\ &= -D_t^* P_t(r_t) dr_t + \frac{1}{2} C_t (dr_t)^2 P_t(r_t) + o((dr_t)^2). \end{aligned}$$

Átárazódás átlagos ideje

Legyen

- $r \in R$ a változó kamatozású kötvények legközelebbi kamatfizetése, $t \in T$ a fix kamatozású és $j \in J$ indexált kötvények lejáratig hátralévő ideje,
- NZ_r, NS_t, NI_j az egyes kötvények névértéke,
- I_j az indexálási együttható az indexált kötvények esetén.

Ekkor az átárazódás átlagos ideje (Average Time to Refixing) években kifejezve

$$ATR = \frac{\sum_{r \in R} r NZ_r + \sum_{t \in T} t NS_t + \sum_{j \in J} \frac{1}{12} NI_j I_j}{\sum_{r \in R} NZ_r + \sum_{t \in T} NS_t + \sum_{j \in J} NI_j I_j}.$$

Sztochasztikus folyamatok

Legegyszerűbben, az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat egy olyan kétváltozós függvény, amely rögzített t esetén a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó. A t paramétert tekinthetjük az időnek, így $t \in [0, \infty)$.

Ha az $\omega \in \Omega$ kimenetelt rögzítjük, akkor a $t \mapsto X(t, \omega)$ hozzárendeléssel definiált függvényt az X sztochasztikus folyamat ω kimenetel melletti realizációjának vagy trajektóriájának hívjuk. Fontos azonban, hogy a folyamat egy konkrét realizációja nem időpontoként függ a véletlentől, hanem a trajektória egésze. Tehát nem az történik, hogy minden időpillanatban generálunk egy véletlen számot, hanem a folyamat elején egyszer, és az megadja a folyamat teljes realizációját. Egy sztochasztikus folyamat különböző realizációira ad példát az 6. ábra.

Value-at-Risk típusú mutatók

Jelölje a C valószínűségi változó az adósság költségét, és legyen α egy valószínűség. Ekkor a C változó α konfidenciaszintű kockázatos értékét (VaR, Value-at-Risk) a következőképpen definiálhatjuk:

$$\text{VaR}(C, \alpha) = \sup\{x \mid \mathbb{P}(C \leq x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Tehát ez azt mutatja meg, hogy mi az az érték, aminél az adósság költsége $1 - \alpha$ valószínűséggel nem lesz nagyobb. A feltételes kockázatosított érték (CVaR, Conditional Value-at-Risk) azt mutatja meg, hogy várhatóan mekkora az adósság költsége, ha túllépjük az előző határt (tehát a $VaR(C, \alpha)$ -nél nagyobb értékek átlaga), azaz

$$CVaR(C, \alpha) = \mathbb{E}(C \mid C \geq VaR(C, \alpha)).$$

A relatív VaR-t a VaR várható értéktől való eltéréseként definiálhatjuk:

$$RVaR(C, \alpha) = \sup(x \mid \mathbb{P}(C \leq x) \leq 1 - \alpha) - \mathbb{E}(C).$$

Hasonlóan a relatív CVaR:

$$RCVaR(C, \alpha) = \mathbb{E}(C \mid C \geq VaR(C, \alpha)) - \mathbb{E}(C).$$

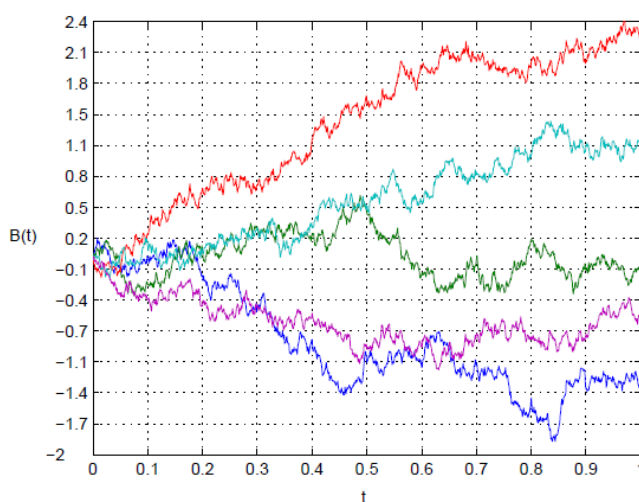
A feltételes kockázatosított érték a legnagyobb veszteségek átlaga, ahol a küszöböt költségben adjuk meg. Ha ehelyett a határt valószínűségben adjuk meg, akkor egy ún. koherens kockázati mértéket kapunk, az Expected Shortfallt.

Wiener-folyamat (Brown-mozgás)

A legalapvetőbb sztochasztikus folyamat a Wiener-folyamat. Ez az a folyamat, amire igazak a következő tulajdonságok:

- $W_0 = 0$, azaz a kezdőpontban a nullából indul,
- $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ esetén a $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ növekmények, mint valószínűségi változók függetlenek,
- $W_{t+h} - W_t$ növekmények normális eloszlásúak 0 várható értékkel és a szórásnégyzet az időváltozás, azaz $W_{t+h} - W_t$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}}$,
- W_t folytonos trajektóriájú.

A következő ábrán egy egydimenziós Wiener-folyamatot 5 trajektóriáját láthatjuk.



26. ábra Wiener-folyamat 5 trajektóriája (Forrás: Mörters, P., Peres, Y. (2010): *Brownian Motion*)

A Wiener-folyamat sok lényeges tulajdonsága közül az egyik, hogy igaz rá a Markov-tulajdonság, azaz a folyamat jövőbeli alakulására csak a jelenbeli állapot van hatással.

Függelék B: Az adósságkezelők benchmark értékei

Az ÁKK által használt, 2013-ra vonatkozó benchmark értékek

Az adósságportfólió forint-deviza összetétele			A devizaadósság devizaösszetétele			A devizaadósság kamatösszetétele				A forintadósság kamatösszetétele			A forintadósság durationje				
Fizetőeszköz	Elfogadási tartomány		Fizetőeszköz	Optimális részarány	Elfogadási tartomány		Kamatozás	Optimális részarány	Elfogadási tartomány		Kamatozás	Elfogadási tartomány		Adósságelem	Optimális duration	Elfogadási tartomány	
	Sávszélek				Sávszélek				Sávszélek			Sávszélek				Sávszélek	
Forint	75%	55%	Euró	100%	95%	105%	Fix	66%	62,70%	67,70%	Fix	61%	83%	Forintadósság	2,5 év	2,0 év	3,0 év
Deviza	25%	45%	Egyéb	0%	5%	-5%	Változó	34%	37,30%	32,30%	Változó	39%	17%				

A külföldi adósságkezelők által használt benchmark értékek összefoglaló táblázata

	Duration (év)	Hátralévő átlagos futamidő (év)	Átlagos átárazódási idő (év)	Éven belül lejáró adósság aránya	5 éven belül lejáró adósság aránya	Éven belül átárazódó adósság aránya	Fix kamatozású adósság aránya	Változó kamatozású adósság aránya	Indexált adósság aránya	Hazai deviza adósság aránya	Külföldi deviza adósság aránya
Ausztria	5-7										
Belgium				<22,5%	<25%	<65%					
Brazília		4,1-4,3		21%-25%			41%-45%	14%-19%	34%-37%		3%-5%
Csehország*		5-6	4-5	<=25%	<=70%	30%-40%					15%+2%
Dánia	12+-1										
Egyesült Királyság						nincs					
Franciaország						nincs					
Kanada						nincs					
Lengyelország*		>=5	2,8-4,0								35-37%
Olaszország											
Svédország								60%	25%		15%+-2%
Törökország											

* Ezen országok benchmark értékei nem optimális portfóliómodell eredményeként kerültek meghatározásra

Függelék C: A külföldi modellek összefoglaló táblázata

Törökország, Dánia, Kanada

- Turkish Treasury Simulation Model for Debt Strategy Analysis (Balibek és Memis 2012)
- Danmarks Nationalbank: Danish Government Borrowing and Debt (2010): Chapter 11: Interest-Rate Models for Cost-at-Risk Analysis
- The Canadian Debt Strategy Model: An Overview of the Principal Elements (Bolder és Deeley 2011)

	Törökország	Dánia	Kanada
Időtáv	- 5 év, negyedéves gyakorisággal - korábban 3 év és havi gyakoriság volt - a szimulált adatok haviak, ezeket alakítják negyedévéssé		- az időközök negyedévesek
Adatok	- 2002 utániak, az ekkori strukturális változás miatt	- a főkomponens elemzésre a 1987 és 2010 közti adatok - az illeszkedésvizsgálathoz 1987 és 2010 közti tízéves minták	- a sztochasztikus szimulációs modellhez 3 input (jelenlegi adósságállomány, a redukált statisztikai modell (az endogén változókra rendezett modell) eredményei, finanszírozási szerkezet) - az optimalizálás esetén 1994 és 2007 februárja közöttiek
Cél	- a költség-kockázat elemzés célja a stratégiai benchmarkok meghatározása		- az adósság költségeinek nagysága és volatilitása közti átváltás megtalálása és optimalizálása
Feltevések	- a hiteleket nem tekintik - a stratégiák egy célt írnak le (pl. költség minimalizálás, kockázatsökkentés, jelenlegi szerkezet fenntartása)	- a becslésnél megfelelő kezdőérték vagy korlát, mivel a faktorokat nem lehet előre megkülönböztetni - az elméleti eredmények helyességéhez a piac arbitrázsmentessége - a hazai kibocsátás 40% 2 éves, 20% 5 éves és 40% 10 éves kötvényből áll a kincstárjegyek mellett - konstans spread az EUR swap- és a DKK hozamgörbe között - az adósságot nettó módon kezelik	- a finanszírozási szerkezet az eszközök részarányait összesíti új kibocsátások esetén, ez az időben állandó marad és a súlyok összege 1 - a makróváltozók és a kamatlábak véletlen változását egy redukált statisztikai modellel írhatjuk le - a rábocsátások esetén a kötvények csak a lejáratban egyeznek meg, a névleges kamatláb úgy kerül megállapításra, hogy az ár a névérték legyen - a kormányzati finanszírozási igény a költségvetési többlet/hiány - túl nagy vagy túl kis összegű kibocsátás esetén büntetőfüggvény használata - a finanszírozási szükséglet esetén a bevételek és kiadások makrogazdasági változók (kibocsátás, infláció, rövid távú kamatok megváltozása) függvénye

	Törökország	Dánia	Kanada
Alkalmazott modellek, eljárások	- szimulációs modell (3 részből áll: a portfólió adatainak tárolása, a pénzügyi változók generálása, CF számítás) - az idősorok paramétereire általánosított momentumok módszere - rövid kamatlábakhoz CIR és Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (CKLS) - a hozamgörbére Diebold-Li a Nelson-Siegelre épülve - a devizaárfolyam alakulása geometriai Brown-mozgás - korrelált véletlen számokhoz Cholesky-dekompozíció - a CPI geometriai Brown-mozgás és a reálhozamok regressziója - a véletlen sokkokra normális eloszlás, vastag farkú eloszlás, aszimmetrikus sokkok, hozamgörbe elmozdulás, bootstrapping	- kétfaktoros CIR (vagy 3 faktoros Nelson-Siegel) a kamatlábakra, mindkettő affin modell - az egyik faktor a kamat szintje, a másik a görbe meredeksége (a harmadik pedig a görbület) - a háromfaktoros esetben a faktorokra főkomponens elemzést használnak - a két modell összehasonlításánál a viszonyítási volatilitásmodell az EGARCH - konfidencia intervallum a hozamgörbékhez - a szignifikancia vizsgálathoz t próba	- a változókra redukált alakú statisztikai modell, aminek paramétereit múltbeli adatokból becslik - sztochasztikus szimulációs modell Monte Carlo szimulációval - a költségek feltételes volatilitásához regressziós egyenlet - fix számú szimulációt futtatnak egyes stratégiákra, majd ezeket approximálják a többi stratégia esetén - a bevételek és kiadások változására a reál GDP-től, az inflációtól, az alapkamattól és véletlen sokktól függő egyenlet - a kamatlábak sztochasztikus dinamikai rendszerek, néhány állapotváltozó függvénye - az állapotváltozók dinamikájára vektor autoregresszív folyamatot használnak - impulzus-válasz függvény a változókat ért sokkok hatásának vizsgálatára - az új-Keynesi modell esetén az inflációhoz várakozásokkal módosított Phillips-görbe, az alapkamathoz becsült vagy kalibrált Taylor szabály - az exogenitáshoz Wald-féle exogenitás teszt - Cholesky dekompozíció a strukturális sokkok felismeréséhez - a kibocsátás kamatokra gyakorolt hatásához kibocsátás-büntető függvények - az állapotváltozókból többféle modellel határozzák meg a hozamgörbét (megfigyelt affin, Nelson-Siegel, exponenciális spline, Fourier-sor, legkisebb négyzetek módszere)
Szimulált változók	- TRY, USD, EUR hozamgörbe - TRY/USD és TRY/EUR árfolyam - inflációs ráta (CPI) - a szimuláláshoz a paramétereket historikus adatok alapján számolják, de ez módosítható	- hozamgörbe pontjai	- makróváltozók (kibocsátási rés, infláció, alapkamat vagy O/N kamat, maginfláció, kibocsátási rés) - kamatlábak (szint, meredekség, görbület)
Exogén változók	- GDP növekedés - középtávú céltervek - költségvetési hiány		- a potenciális GDP változása - teljes CPI
Számolt változók			- finanszírozási szükséglet (bevételek, kiadások, kamatkidadások) - lejáró adósság mennyisége - kibocsátandó adósság nagysága, szerkezete

	Törökország	Dánia	Kanada
Költség	- kamatköltség (CF szemlélet) - adósságállomány hazai devizában - adósságállomány az inflációval növelve az indexált kötvények esetén	- átlagos költség - farok költség	- a kincstárjegyek diszkontja, a nominális kötvények kuponja, az indexált kötvények reálkuponja és inflációs hatása - abszolút vagy relatív költségek - évenkénti vagy a teljes, vizsgált időhorizontra vonatkozóan diszkontfaktorokkal vagy anélkül
Kockázat	- megújítási és likviditási kockázat - kamatkockázat - devizaárfolyam kockázat - a költségeloszlások conditional at-risk mutatói - az adósság szerkezetének mérőszámai a hátralévő átlagos futamidő, a duration és a lejáró adósság részaránya	- a becült hozamok percentilisei (Cost-at-Risk) - duration, ATM - stressz tesztek - átárazódási időtartam (interest-rate refixing) - évente megújítandó adósság aránya	- az éves költségek varianciája - a következő 12 hónapban megújítandó adósság aránya a teljes állományhoz vagy a GDP-hez viszonyítva - évente mekkora százalékát kell megújítani az egyes összetevőknek - abszolút és relatív conditional CaR - a költségek feltételes volatilitása - budget-at-risk mutatók
Használt program	- Matlab (szimuláció) - MS Access (adatbázis) - MS Excel (szimulált utak, output)		- Matlab
Korlátok	- maximális kibocsátási korlátok (múltbeli adatok és kereslet alapján)		- kockázatokra vonatkozóan - minimális kibocsátási mennyiség (likviditás) - a portfólió egészére az átlagos lejárat, az évente megújítandó adósság nagysága - az elsődleges kibocsátásra vonatkozóan az átlagos kéthetes kincstárjegy kibocsátás
Optimalizálás	- nincs egyértelműen legjobb, ami minden kritériumnak megfelel - lehet definiálni hatékony és dominált megoldásokat	N/A	- a portfóliósúlyok változtatásával minimalizálják a költségeket a kockázatra vonatkozó korlát mellett - a költség a teljes adóssághoz viszonyított éves költségek átlaga - a kockázat az adósság költségeinek feltételes volatilitása, a hiány feltételes volatilitása, az első éves relatív CaR és az átlagos negyedéves megújítás lehet - 10.000 realizációja a sztochasztikus modellnek - 2.000 finanszírozási szerkezet

	Törökország	Dánia	Kanada
Eredmények	- a szimulált utak alapján kapott három költségeloszlás statisztikái (átlag, conditional at-risk) - a stratégiák esetén a cash flow-k - nincsenek konkrét, számszerű benchmark értékek - az adósság szerkezetére vonatkozó mérőszámokat számolják ki és azokat ábrázolják, nem számolnak globális optimumot	- nincs szignifikáns különbség a két kamatlábmodell között - a kétfaktoros CIR lényegében a kétfaktoros Nelson-Siegel	- az év növekedésével az abszolút és a relatív költség várható értéke ugyanannyi, de szórása növekszik - minél nagyobb az inflációindexált adósság aránya, annál kisebb a relatív CaR, ez az abszolút esetben nem igaz - a budget-at-risk mutatók esetén az előző mindkettőre igaz - a bevételek volatilisabbak, mint a kiadások - a VAR modellben statisztikai tesztek alapján a szint tekinthető exogén változónak - nincsenek számszerű eredmények
További vizsgálatok		- a tény és becsült hozamgörbék közti szórás - a harmadik faktor becslésekre gyakorolt hatása - a két modell illeszkedésvizsgálata	- ábrázolják a korrelációkat a lejáratok között az egyes hozamgörbe modellek esetén és megvizsgálják az egyenlő súlyú stratégia mellett a várható költségeket, azok volatilitását, a CaR-t és a cCaR-t - két célfüggvény esetén megnézték az optimális portfólió alakulását a hozamgörbe modellekre - ábrázolják az optimalizálással kapott költség-kockázat átváltásokat
További irány		- a swap- és államkötvényhozamok közti spread szimulálása - a kamatláb-volatilitás pontosabb leírása	- a sokkhatás a változó volatilitására is hatással van
Egyéb	- grafikus, interaktív felület	- a különböző lejáratú kamatlábak közti kovarianciának tükröznie kell a múltbeli adatokat - a kamatlábaknak egy átlagos szint körül kell ingadozniuk - 2.500 utat szimulálnak	- elemzik az indexált kötvények pénzáramlásait, a tőkeemelkedés figyelembe vételének módszerét - vizsgálják az állapotjellemzőket (változókat) ért egy szórásnyi sokkok hatását, például az eltérést az alap zérókupongörbétől és annak volatilitásától

Svédország⁶⁰, Egyesült Királyság⁶¹, Franciaország

- The SNDO's Simulation Model for Government Debt Analysis (Bergström, Holmlund és Lindberg 2002)
- A simulation model for the analysis of the UK's sovereign debt strategy (Pick és Anthony 2006)
- DMO Annual Review (2008): Chapter 6: The Portfolio Simulation Tool (PST)
- Analytical model of French State debt strategies (Renne és Sagnes 2006)
- What are the consequences of active management of average debt maturity in terms of cost and risk (Renne 2007)

	Svédország	Egyesült Királyság	Franciaország
Időtáv	- 30 év, negyedéves időközök mindkét modellnél	- negyedéves időközök - 125 évre (a 2010-es szerint 50 évre)	- 10 év, negyedéves
Adatok	- 1.000 trajektória (M)	- 1992 és 2004 közöttiek (2010-ben 2008-ig) - 2.000 trajektória (a 2010-es szerint 10.000)	- 10.000 szimuláció, problémás a korábbi adatokon való tesztelés - 1986 és 2007 közöttiek, de voltak strukturális törések, ezért megvizsgálták 12 évvel is
Cél	- minimalizálni a hosszú távú költségeket a kockázatok figyelembe vételével	- hosszú távon a költségek csökkentése a kockázatok figyelembe vétele mellett, egyben biztosítva a monetáris politika és az adósságkezelés közötti konzisztenciát	- a finanszírozás középtávú költségeinek minimalizálása a kockázatok kezelése mellett - makrogazdaság stabilizálása, pénzügyi piacok növelése, monetáris politika támogatása is lehet
Feltevések	- a portfólió almodell nem a valós adósságelemeket tartalmazza, hanem a stratégiának megfelelő portfólió kialakítást (M) - a GDP-t a modell generálja, - az adósság költsége endogén változó - a (SZ) a finanszírozási igények, a kamatok ill. a devizaárfolyamok sokkhatásának eredményét vizsgálja - a portfólió összetétele konstans (CaR) - 3 devizakörnyezet (SEK, USD, EUR) - a stratégia meghatározásánál feltételeket szabnak az allokációra és a durationre - a feltételeket teljesítő hipotetikus portfólióból indulnak ki - negatív bruttó finanszírozási szükséglet esetén visszavásárlás van	- a gazdaság két állapotának várható időtartama 10 negyedév - az elsődleges nettó finanszírozási igény esetén két fiskális szabályt (arany szabály, fenntartható fejlődés szabálya) is figyelembe vesznek - az infláció indexált kötvényeket az RPI inflációhoz kötik - a CPI infláció hosszú távú átlaga a központi bank inflációs célja, a kibocsátási résé pedig 0 - SDA-ban nincsenek rábocsátások, PST-ben igen - a kuponfizetések negyedévente történnek - a makrováltozók kezdőértékei a hosszú távú átlaguk - meghatározott kezdő adósság/GDP arány - a kiinduló állapot a valós portfólió (PST)	- a finanszírozási szerkezet (ahogy az adósságkezelő allokálja a finanszírozási szükségletet az új időszakok esetén a különböző papírok között) időben állandó - a becslés után úgy módosították a konstansokat, hogy a kívánt feltétel nélküli hosszú távú átlagot kapják - a hozamgörbe nem zérókuponokra vonatkozik, hanem benchmark kötvényekre - a 3 hónapos, a 2 éves és a 10 éves kamatswapokkal érik el a kívánt adósságszerkezetet és átlagos lejáratot

⁶⁰ Az (M) jelzés a makroökonómiai sztochasztikus modellre, az (SZ) a szenáriómodellre és a (CaR) a szimulációs CaR modellre utal

⁶¹ Ahol szerepel, hogy PST, az a Portfolio Simulation Toolra vonatkozik, a többi a Strategic Debt Analysis modellre

	Svédország	Egyesült Királyság	Franciaország
Alkalmazott modellek, eljárások	- makroökonómiai sztochasztikus modell (M) - szcenáriómodell (SZ) - szimulációs CaR modell (CaR) - stacionárius autoregresszív folyamattal a változók (M) - a gazdaság állapotára rezsimmáltó Markov-folyamat (Mcsrp) (M) - az (M)-en belül portfólió almodell - makroökonómiai és stratégiai szimulációs modell - a változókra elsőrendű autoregresszív folyamat és Mcsrp - a gazdasági állapot szimulálása Bernoulli véletlen számokkal - az infláció olyan AR(1), melynek várható értéke az inflációs cél és konjunktúra független - a reál GDP növekedés esetén állapotfüggő AR(1) - a rövid távú nominális kamat esetén Taylor-szabály - az elvárt inflációs ráta az adaptív várakozások elmélete alapján - a potenciális reál GDP a reál GDP-ből származik Hodrick-Prescott szűrővel - a lejáratú prémium rendszerváltó autoregresszív folyamat (AR(1)) - a hosszú távú nominális kamat a reálhozam elvárás, a várt hosszú távú éves infláció, az inflációs prémium és a hibatarag összege - a reál devizaárfolyam egy kibővített elsőrendű autoregresszív AR(1) folyamat - a nettó finanszírozási igény az egyensúlyi GDP szintjének és korrigáló tényezőknek a függvénye- sztochasztikus programozás - klaszterezés faépítésre	- SDA modell (makrogazdasági modell, kamatláb modellek, adósságstratégiai szimulációs modell) - a makrogazdaságra új-keynesi modell - a gazdasági körforgás kétállapotú Markov folyamat - a két fiskális szabálynak való megfelelés miatt a gazdasági ciklusok folyamán dinamikus programozás - a CPI inflációhoz Phillips görbe - a rövid kamatokra Taylor szabály - a paramétereket becsléssel, elméleti megfontolásokkal és kalibrálással határozzák meg - a nominális hozamgörbe Nelson-Siegel 3 faktorról és Kálmán-szűrővel - a látens faktorokat a rövidkamatok, a CPI infláció és a kibocsátási rés fejlődésével írják le - a reálhozamgörbét a nominálisból számolják fix inflációs várakozások mellett - portfólió szimulációs eszköz (PST) - a PST-nek meg kell adni a kibocsátandó papírok (kincstárjegyek, nominális kötvények, indexált kötvények) részarányát - a bruttó fin. igény alapján a PST meghatározza az eszközök aukcióit - a PST esetén a VRP (Variable Roughness Penalty) kamatláb modellt használják - a PST a következőket számolja: eszköztípus-arány; lejáratú sávok aránya; piaci érték; inflációval emelt névérték; átlagos lejárati, lejárati számított hozam, Macaulay duration, módosított duration, kamatmegújítási időszak, konvexitás	- különböző indexált kötvény arányok mellett szimulálnak és mérik a költségeket és kockázatokat - a szimulált változókhoz strukturális VAR vagy rezsimmáltó VAR - az elsődleges egyenleget felbontják strukturális és ciklikus komponensre - központi modell, segédmodell a nominális- és reálkamatokra és az elsődleges egyenlegre - a kibocsátási rést a reál GDP idősorából kapják Hodrick-Prescott szűrővel -VAR, ahol maximum likelihood módszer a késleltetés meghatározása helyett - a késleltetésre (múltbeli tagok száma) a Sequential Modified Probability Test, a Final Prediction Error Test és az Akaike Information Criterion Test, a Schwarz Information Criterion és a Hanna-Quinn Information Criterion használható - a paraméterek stabilitására a Chow Break-Point Tesztek - a reziduálisok autokorrelációjára a Portmanteau Tesztek és a Lagrange Multiplier Tesztek - a ciklikusan kiigazított elsődleges költségvetési egyenleg a kibocsátási rés függvénye - az éves költségvetési egyenleg AR(1) folyamat, a potenciális GDP-t a GDP idősorából kapják Hodrick-Prescott szűrővel - a VAR a hozamgörbe két pontját modellezi, ebből az egész görbét Nelson-Siegelgel modellezzik, amiben a súlyok Laguerre-polinomok - a reálhozamgörbét a nominálisból kapják kivonva a break-even inflációt - a sokkok eloszlására (normális vagy vastag farkú) bootstrap módszert (a minta pontosságára használt statisztikai módszer) használnak
Szimulált változók	- GDP, infláció, kamatok, devizaárfolyamok, nettó finanszírozási igény (M) - infláció (CaR) - nominális-, reál-, devizahozamgörbék (szint, meredekség, görbület) (CaR) - gazdasági ciklusok, infláció, reálnövekedés, rövidtávú nominális kamatok, hosszútávú nominális kamatok, devizaárfolyam - a SEK portfóliónál hosszútávú reálkamat, nettó finanszírozási igény	- kibocsátási rés, kormányzat elsődleges finanszírozási szükséglete, RPI és CPI infláció, rövid kamatok - nominális- és reálhozamgörbe - RPI index a reál és nominális hozamgörbéből (PST)	- a GDP növekedés, az infláció, a rövid távú kamat és a 3 hónapos és 10 éves kamatok közötti spread - nominális- és reálhozamok, elsődleges egyenleg - kibocsátási rés, GDP, infláció, 3 hónapos kamat, a 3 hónapos és 10 éves kamat közti spread

	Svédország	Egyesült Királyság	Franciaország
Exogén változók			- a nominális- és reálhozamgörbéhez a szimulált makróváltozók (ÖF)
Számolt változók	- bruttó finanszírozási szükséglet - elsődleges egyenleg - diszkontfaktorok - duration -Fischer-Weil duration	- bruttó finanszírozási szükséglet a központi költségvetés nettó pénzeszköz igényéből és az adott évi kötvénylejáratból (PST) - a nominális hozamgörbéből diszkontfaktorok, abból bruttó árfolyam, abból pedig nettó árfolyam (PST)	
Költség	- az adósság egységére eső költség (CaR) - a nominális költségek cash flow szemléletben - lejáratkor a devizaárfolyam-különbözet vagy a felhalmozott infláció - visszavásárláskor a realizált piaci érték - a reálköltségek a nominális költségek GDP-hez viszonyított aránya	- cash flow szemlélet - a nominális kuponfizetések és a realizált inflációs kompenzáció a lejáró kötvényeken	- a negyedéves kamatköltségeket évesítik, majd elosztják az éves GDP-vel - évenkénti átlagos költség a j. szimuláció esetén, illetve a t. évben az összes szimuláció mentén
Kockázat	- Running-Yield-at-Risk (RYaR) (CaR) - a szcenárió kockázat a lehetséges kimenetek szórása, két percentilis relatív arányaként - az idősor kockázathoz az éves reálköltségekhez húzott regressziós egyenletből indulnak ki	- az adósságköltség arányának szórása - adósságköltség arány eloszlásának 95%-os percentilise	- abszolút vagy relatív CaR, a kamatköltségek eloszlásának szórása vagy volatilitása - az idősorok esetén pillanatnyi (eltérés az átlagostól) vagy kumulált (évenkénti változás) kockázat - a pillanatnyi kockázatra szórás, míg a kumulált kockázatra abszolút CaR
Használt program	- VBA (a randomizálás problémás) - egyes számítások Matlabbal	- Matlab	
Korlátok		- minden eszköztípusból szükséges egy minimális és maximális elfogadható kibocsátási nagyság (PST)	
Optimalizálás	N/A		- a stratégiákat költség-kockázat szempontból vizsgálják hatékony portfóliókkal - a költség-kockázat térben kockázatkiterjedési preferenciákkal

	Svédország	Egyesült Királyság	Franciaország
Eredmények	- az (M) esetén eltérő portfólió kialakítás mellett is hasonló költségeket és kockázatokat kaptak, ez a gazdaságot ért kevés sokkhatás miatt van - az (SZ) alapján a magas duration véd a kamatkilengések ellen, azonban költséges - az (SZ) alapján a devizaarány csökkentése esetén kisebb lesz az árfolyamkockázat és a költség-különbözet is	- a paraméterekre kapott eredmények szerepelnek a tanulmányban - a valós és becsült nominális hozamgörbe pontok átlagai és szórása alapján a modell alulbecsül és a volatilitás is kisebb - minél nagyobb a 30 éves lejáratú papírok aránya, annál kisebb a költség és a volatilitás (púpos hozamgörbe) - a kétféle hozamgörbével szimulált eredmények és a valós hozamgörbe adatok is szerepelnek	- az indexált részarány növekedése csökkenti az átlagos kamatköltségeket, de a kockázat megemelkedik a nagyobb inflációs kitettség miatt - a középtávú költségek gyakran csökkenthetők a duration rövidítésével
További vizsgálatok		- nemcsak a rájuk jellemző púpos hozamgörbe, hanem emelkedő hozamgörbe is - a végén történő inflációs kiadás túl nagy, így felhalmozott szemléletben is megvizsgálják	- a modell feltételeire való érzékenység (a sokkok léptéke, a sokkok eloszlása, hozamgörbe paraméterei, a hozamgörbe átlagos meredeksége, a múltbeli adatok időtávja, késleltetések száma a VAR modellben) - backtesting, tehát a múltbeli adatokon ellenőrizték a modell eredményeit
További irány		- a makrogazdasági változókat szimuláló módosított autoregresszív folyamatok előre is tekintsenek - a hozamgörbék vegyék figyelembe az adott stratégiával járó kínálatváltozásból eredő módosulásokat	
Egyéb	- az indexált kötvényeket is úgy kezelik, mint a devizaadósságot, ekkor a CPI a "devizaárfolyam"	- az inflációs kiadások kétféle szemlélete (felhalmozott, vagy csak az időszak végén tekintett) esetén nem hasonlítják össze a kockázati mutatókat (mert előbbi simít) - a lejáratú szegmenseken belül meghatároznak benchmark sávokat is (PST)	

Olaszország, Brazília

- A Stochastic Programming Model for the Optimal Issuance of Government Bonds (Consiglio és Staino 2012)
- Optimal Strategies for the Issuances of Public Debt Securities (Adamo és mtsai. 2004)
- A Benchmark For Public Debt: The Brazilian Case (Cabral és mtsai. 2008)

	Olaszország	Brazília
Időtáv	- a diszkrét dinamika időközei 1 hónaposak, az optimalizáció időtávja 5 év - a tervezési időszak 24 vagy 36 hónapos	
Adatok	- a hozamgörbe 100 megvalósulása esetén optimalizáltak	- 2.000 megvalósulást szimulálnak
Cél	- az adósságmegújítás mellett a hiány fedezésére plusz kötvényeket bocsátanak ki minden időpontban, a gazdaság minden állapotában - minimalizálni a végső költségeket, miközben azok cVaR értéke egy adott korlát alatt marad	- a hosszú távú adósság minimalizálása megfelelő kockázati szint mellett, a másodpiac fejlesztésével - a gazdaságpolitikai célok figyelembe vétele, adósimítás - a változó és a devizaadósság fokozatos csökkentése
Feltevések	- csak zérókuponok és fix kamatozású kötvények vannak - két típusú időpont van, az egyikben vannak döntések is, a másikban csak a folyamatok dinamikáját szimulálják - a portfólió allokációjára vonatkozó döntéseket az addigi szintekből nyerhető információk alapján határozzák meg - a nem várt költségek alakulása determinisztikus folyamat és konstans 0 - a kötvényeket névértéken bocsátják ki - a fedezendő adósságot minden időpontban fedeznie kell a döntés alapján kibocsátott papíroknak	- kezdőportfólió a hosszú távú egyensúlyi portfólió - a gazdaság is az egyensúlyi állapotában van, a változók kezdőértéke az egyensúlyi értékük - a nettó adósságot tekintik - az adósságportfólió reprezentáns értékpapírokból áll, melyek lejáratban és kamatozásban különböznek - 4 csoport: fix, változó, indexált, devizás (USD, EUR) - a változó kötvények árfolyama a névérték - az adósságszerkezet változatlan az idő folyamán

	Olaszország	Brazília
Alkalmazott modellek, eljárások	- az optimális portfólió megtalálása sztochasztikus optimális irányítási probléma - a kamatlábakra sztochasztikus differenciálegyenletek, a rövid kamatokra CIR vagy Heath-Jarrow-Morton - az állománymátrix alakulása egy lineáris, diszkrét idejű irányítási rendszer - az optimális stratégia meghatározására valószínűségi stratégia: meghatározzák a változók legvalószínűbb alakulását és ennél optimalizálnak - az optimális stratégia meghatározására MPC (Model Predictive Control Strategy) stratégia: alkalmazkodó stratégia a kibocsátás napján lévő hozamgörbét alapul véve - a hozamgörbe alakulására Monte Carlo szimuláció - maximális hibát számolnak az egyes trajektóriák mentén és ezek gyakoriságát ábrázolják - a hozamgörbékhez egy másik tanulmányban lévő diffúziós modellt használnak - a gazdaság fejlődését egy fával szemléltetik - definiálnak egy veszteségfüggvényt is - a cVaR optimalizálása	- a kötvényárfolyamok makróváltozók (hozamok, devizaárfolyam, infláció) szimulációjából - egyensúlyi hozamgörbe modellek (CIR, CKLS) - az O/N kamatra CIR modell, ebből a kötvényárfolyam analitikusan - a reál devizaárfolyamra a CKLS-en alapuló modell az átlaghoz való visszahúzás miatt - az árindex geometriai Brown-mozgás - ezek a modellek Markov-tulajdonságúak (gyenge piaci hatékonyság elmélete) - a devizás adósság költségéhez nominális devizaárfolyam, ehhez az árindexek és a reál devizaárfolyam dinamikája - korrelált véletlen számokhoz Cholesky-dekompozíció - fedezett és fedezetlen kamatparitás - a fix kamatozású kötvények árfolyama analitikusan - az indexált és devizakötvények árfolyam esetén a fix hozamokat csökkentik a kockázati prémiummal, amit egy Nelson-Siegel-szerű módszertannal határoznak meg - a hazai reál hozamgörbe a hazai nominális (fix) hozamgörbe csökkentve a kockázati prémiummal és a várt inflációval - a devizahozamgörbe a hazai nominális hozamok csökkentve a kockázati prémiummal - a GDP geometriai Brown-mozgás - az adósságállomány esetén monetáris bázis is, ami úgy növekszik, mint a GDP - a nettó adósságot pedig az adósságállomány korrigálásával - Blanchard-modell
Szimulált változók	- a hozamgörbék alakulása	- O/N hozamok, reál devizaárfolyam, külső és belső árindexek, nominális devizaárfolyam, kockázati prémium, GDP
Exogén változók	- az optimalizálás esetén a sztochasztikus tagok - az egyes állapotokban a kifizetések a különböző papírok esetén - a kuponfizetések és az árak n állapotbeli vektora, ha m-ben bocsátották ki - fedezendő adósság	- nettó adósság/GDP arány
Számolt változók	- az egyes kötvények pénzáramlásai, a kincstári egységes számlán lévő összeg, nominális adósság, megújítási időszak a kötvényekre, hátralévő átlagos futamidő	

	Olaszország	Brazília
Költség	- éves eredményszemléletű költségek (ESA 95) - diszkontált adósság, ahol az adott időpont utáni összes kiadásnak számítják ki a jelenértékét - egy döntés költségei a kupon- és tőkefizetésektől, illetve a jövőbeli kifizetések jelenértékétől függnnek, ezeknek összege a végső adósság	- a nettó adósság/GDP arány eloszlásából - az egyes eszközcsoportokra külön módszertan - az átlagos adósság/GDP arány
Kockázat	- a végső költségek cVaR értéke	- a nettó adósság/GDP arány eloszlásából - a változó kötvények esetén az O/N határozza meg - a szórás vagy a 99%-os kockázatosított érték
Használt program		- Matlab
Korlátok	- a költségvetés deficitjének 3% alatt kell maradnia - a nominális adósság nem érheti el a GDP 60%-át - KESZ állomány - a rövid kötvényekre dinamikus, a többire statikus mennyiségi korlát - intézményi korlátok (a kamatfizetések és tőketörlesztések fedezetére a KESZ minimuma, az éves nettó kibocsátásra felső korlát) - az átlagos futamidőre alsó és felső korlát - a piac stabilitása miatt lehetséges alsó korlát a kötvények mennyiségére	- előzetes megkötések az összetételre
Optimalizálás	- ha meg vannak határozva a szimulált változók, akkor az optimalizációs feladat egy véges dimenziós lineáris programozási feladat - input adatok: a korábbi kibocsátások, a kibocsátások adatai, a GDP és az elsődleges költségvetési egyenleg előrejelzése - output adatok: a kibocsátott kötvények száma, amik kielégítik a korlátokat	- portfólióelmélet

	Olaszország	Brazília
Eredmények	- egy időben állandó hozamgörbe becslésű MPC módszer esetén a legkisebbek a relatív hibák - hatékony portfóliók halmaza	- hatékony portfóliók a nettó adósság/GDP költség-kockázat terében (átlag, szórás)
További vizsgálatok	- a valószínűségi és MPC stratégiák esetén vizsgálja a relatív hibákat - ábrázolják a cVaR függvényében a minimális költségeket és vizsgálják konfidencia intervallum segítségével a legnagyobb hibát - növekvő cVaR esetén hogyan változik a portfólió összetétele	
További irány	- a hozamgörbe jobb előrejelzése, sztochasztikus ugrásokat is használva - az MPC stratégia paramétereinek optimalizációja és a hozamgörbe előrejelzés érzékenységvizsgálata - a kötvénykibocsátás hatása a makrogazdaságra - az elsődleges egyenleg modellezése	

Függelék D: Országok adósságportfóliójának mutatói

A táblázat a 2013. március végén fellelhető adatokat tartalmazza.

	Duration	ATM	ATR	Éven belül lejáró	Fix	Változó	Indexált	Hazai deviza	Külföldi deviza
Ausztrália	4,4	5,2		9,96%	104,58%	-4,58%	10,62%		
	Az adatok 2012.06.30-ára vonatkoznak. A duration (módosított) és az ATM is emelkedett az előző évhez képest, köszönhetően a 2011-2012-es 7,7 átlagos lejáratú kibocsátásnak. A duration és az ATM enyhén, a kibocsátások átlagos lejáratára meredekebben emelkedő. Valós értékelést használnak, nincs változó kamatozású kötelezettségük, csak eszközük. A indexált-kötvényeket a fix kamatozásúakon belül tartják nyilván. Ha a diszkontálatlan, jövőbeli becsült kamatokkal növelt kötelezettségeket nézzük, akkor az éven belüliek aránya 16,37%. A devizában denominált adósságuk elenyésző, annak is a nagy része USD.								
Ausztria	>6	8,52		10,47%	96,00%	4,00%		100,00%	0,00%
	A duration és a fix, változó arány 2011-es adat, a többi 2012-es.								
Belgium	5,96	7,16		14,50%	84,05%	15,95%		100,00%	0,00%
	Az 5,96 az EUR adósság 2012 végi módosított durationje. A deviza adósságnál az effektív duration 2011 végén 0,06 volt, mindkettő esetén a duration nőtt az előző évhez képest. Az ATM esetén a 2012-es teljes adósságé szerepel, az EUR-é 7,18.								
Bulgária	5,33	9,27		8,29%	82,00%	18,00%		28,60%	70,40%
	A devizarésarány 2011-es adat (EUR 53,3%, USD 15,6%, egyéb 2,5%). A BGN részarány emelkedik, miközben az USD csökken. A fix-változó arány is 2011-es és emelkedik a fix rész, a további tervek is erre irányulnak. A többi adat is 2011-es, az ATM csökkenő, a duration emelkedő tendenciát mutat, az éven belül lejáró adósság aránya pedig ugrál.								
Ciprus		4,61	2,57	22,00%	84,00%	16,00%		0,00%	100,00%
	Az adatok 2011.12.31-ére vonatkoznak. A fix-változó részarány esetén a változó kamatozás kizárólag a hitelekkel származik. A deviza részaránynál, ha nem EUR-ban bocsátanak ki, akkor rögtön swapolnak. Az ATM esetén csökkenés tapasztalható az egy évvel korábbi 5,7-es értékhez képest. Csak a kötvények esetén az ATM 3,03 év, ami megegyezik az ATR-jükkel, ugyanis nincs változó kamatozású értékpapír. Az ATR érték az adósságportfólió hitelek nélküli részére vonatkozik.								
Csehország	4,2	5,7	4,4	17,90%	85,10%	14,90%		82,30%	17,70%
	Az adatok 2012 év végére vonatkoznak. Az éven belül esedékes adósság felső határa 25%. Az ATM esetén a sávhatárok 5 és 6 év, az érték csökken az utóbbi években. Az ATR is csökkenő tendenciát mutat és a 4 és 5 év közti sávban kell maradnia. A devizarésarány enyhén emelkedő. A devizás adósság 89,7%-a EUR-ban denominált. A duration módosított duration. Az éven belüli átárazódású adósság aránya 36%, itt a célsáv 30% és 40% között van.								
Dánia	10	kb 9 év		kb 10%	99,96%	0,04%	3,89%		
	Az átlagos duration 2012-es értéke a 10 (a diszkontáláshoz használt kamat 2,5%), a hazai kötelezettségek Macaulay duration-je 7,5 év, míg a külföldi adósságé -1,1 év. 2013-ban a célsáv 12+-1 év, 0%-os diszkontálási kamat mellett. Az indexált kötvények esetén az indexált névértéket vették alapul a fennálló adósság arányában 2012 év végén. A fix-változó arány a 2009-es összefoglaló alapján került rögzítésre. Az éven belül lejáró adósság a nominális GDP-hez viszonyított arány a kamatfizetéseket is figyelembe véve. Az ATM a 30 éves kötvény kibocsátással emelkedett meg 5-ről, azóta stagnál.								

	Duration	ATM	ATR	Éven belül lejáró	Fix	Változó	Indexált	Hazai deviza	Külföldi deviza
Egyesült Királyság	8,3	13,5					22,53%		
	A 8,3 a 2011-es módosított duration a nem indexált kötvények esetén, az indexált kötvényeknél ez az érték 15,8 év és mindkettő esetén növekedést vártak. A 13,5 2011-es ATM esetén is emelkedésre számítottak. A fix-változó arány a 2011-es font adósságra vonatkozik, ahogy az indexált arány is.								
Finnország	3,7	kb 6	4,1					100,00%	0,00%
	Az adatok 2012 év végére vonatkoznak.								
Franciaország		7,14		21,11%	74,91%	11,35%	12,64%	100,00%	0,00%
	Az adatok 2011-re vonatkoznak. Swapok után az ATM 5 nappal csökkent, a célérték 2012-ben 6,6 volt. A fix-változó arány a kötvényekre vonatkozik a teljes adósságon belül, a maradék a BTF (DKJ) állomány. Az indexált kötvények részarányát a fennálló adóssághoz viszonyítottak. A devizarésarány esetén, ami nem euróban volna, azt rögtön swapolják.								
Görögország		15						96,70%	3,30%
	Az adatok 2012 év végére vonatkoznak és csak a honlapon vannak fent. A súlyozott átlagos lejárati 2012-ben nőtt meg 15 évre, az azelőtti évben 6,3 volt.								
Horvátország					64,74%	35,26%		30,84%	66,16%
	A devizaarány 2011-re, a fix-változó arány 2006-ra vonatkozik.								
Írország				5,42%	20,87%	79,13%		92,42%	7,58%
	Az arányok 2011-re vonatkoznak. A külföldi devizán belül az USD 62,40%, a GBP 21,82%, míg a JPY 15,77%. Az éven belül lejáró adósság aránya az EUR adósságra vonatkozik.								
Izland	4,6	6,34			43,00%	32,00%	28,57%	71,43%	28,57%
	A deviza és az indexált adósság aránya 2013. februári adat és a teljes adósságra vonatkozik, 2011 év végéhez képest nem változott jelentősen. Ha a készletli hitelek nem számítjuk, akkor a nem indexált adósság 61%, a deviza adósság 5% és az indexált adósság aránya 34% 2011 év végén. Erre van célérték is, sorrendben 60-80%, 0-20% és 10-40%. A fix-változó arány 2011-es adat, az indexált kamatozású rész aránya 25%. A 4,6 a 2013. februári Macaluy duration és a hazai benchmark adósságra vonatkozik, a külföldre ez a szám 4,1. Hasonlóan az ATM is februári adat és a teljes portfólióra vonatkozik (hitelekkel együtt), a nem indexált esetén ez 6,37, az indexált esetén 6,58, végül a devizas adósság esetén 6,07 év.								
Japán		7,5							
	Az ATM adat a 2010-es évre vonatkozik. Van infláció követő papírjuk is.								
Kanada	5,2	5,8		kb 39%			kb 7%		
	A duration és az ATM 2012 év végére vonatkozik. Előbbi a módosított átlagidő és emelkedett, míg az ATM csökkent az előző évhez képest. Az infláció indexált kötvények esetén a grafikon 2012. márciusi állapotot ábrázol. A forgalomképes adósság esetén a 2011-es ATM kb 7,3. 2011 év végén a kamatozó papírok 39%-ánál kell újra megállapítani a kamatot a következő éven belül, itt emelkedésre számítanak a következő években.								

	Duration	ATM	ATR	Éven belül lejáró	Fix	Változó	Indexált	Hazai deviza	Külföldi deviza
Portugália	3,9	6,7		12,00%	78,30%	21,70%		95,30%	4,70%
	Az adatok 2013 februárjára vonatkoznak, a teljes adósságra vetítve, kivéve az éven belül lejáró adósság nagyságát, ami 2011 év végére. Az EUR adósságba belevették az IMF hitel SDR-jének EUR részét is. A devizaarány emelkedik az utóbbi években, de így is a 20%-os korlát alatt marad. A devizakockázatot swapokkal csökkentik, az adatok ez utánra vonatkoznak. A módosított duration is emelkedést mutat, habár 2012-ben csökkent. Hasonlóan a hátralévő átlagos futamidő és a fix rész aránya is. Az EUR adósság esetén az utóbbiakban említett három érték is magasabb, mint a teljes adósságra vonatkozóan. Az adósság 20%-a esetén volt szükséges kamat újramegállapítás a 2011-et követő évben. A 12 hónapon belül lejáró adósságra 25% volt a határ 2011 év végén.								
Románia		4,4	3,4	28,76%	67,80%	32,80%		44,00%	56,00%
	Az adatok 2012 végére vonatkoznak. Az adósság 44,8%-a EUR, 5,6%-a USD, 1,1%-a JPY, azaz a deviza adósságon belül az EUR aránya 79,9%, ami a 75%-os minimum felett van. A devizaadósság arányára a maximális korlát az 50%. Az ATM esetén a minimális érték 4,5 év, míg az ATR-nek 3 és 4 év közöttinek kell lennie. A stratégia egyik eleme a fix részarány növelése, így 2013 januárjára ez a szám már 75,6%.								
Spanyolország	4,15	6,33						99,06%	0,53%
	Az adatok 2013. február 28-ára vonatkoznak, a duration-t kivéve, ami 2012 végére. Az deviza ATM 4,28, míg a hazai 6,75. Swapok előtt a deviza adósságon belül az USD részarány 80,7%, a GBP 6,2%, míg a JPY 13,1%, swapok után pedig 100% EUR. A devizaarány esetén a teljes adósság a viszonyítási alap, a hiányzó rész a Bank of Spaintól átvállalt hitelek.								
Svédország	kb. 3,9	kb. 5 év	kb 3					83,60%	16,40%
	A devizaarány 2013.02.28-ai adat és beleveszi a továbbhitelezéseket is. A deviza adósságon belül 45,1% az EUR, 22,3% a CHF és 13,7% a JPY, ezeken kívül van még USD, GBP és CAD. A duration esetén a külföldi adósság duration-je 0 év közeli, az infláció indexált adósságé kb 7,9 év, míg a nem-indexált hazai adósságé kb 3,9 év 2012 végén. Az ATM esetén az előző megbontásban kb. 1,8, kb. 8 és kb. 5,4 év. Az ATR esetén 30 napos mozgóátlagot néztek és ez alapján a 12 évnél nem nagyobb, nem indexált adósságra kb. 3 év, az indexált adósságra kb. 8,2 év, míg a deviza adósságra 0 év közeli.								
Szlovákia	4,9	5,6		kb. 13%	86,60%	17,40%			
	Az adatok 2012. év végére vonatkoznak. Mind a duration, mind az ATM emelkedett az egy évvel korábbi értékhez képest. 2012-ben bocsátottak ki először USD, CZK és CHF kötvényeket.								
Törökország	1,35	4,6		32,80%	59,46%	25,81%	14,72%	72,99%	27,01%
	Az adatok 2013 januárjára vonatkoznak. Az éven belül lejáró adósság a hazai adósságra vonatkozik, 1 éven belül a TRY adósság 70,2%-át kell megújítani. A központi költségvetés adósságállományára vonatkozik az ATM, a hazaié 2,9 év, a külföldié 9,5 év. A fix, változó, CPI indexált részarány a központi költségvetés adósságára vonatkozik, a hasonló számok a TRY adósság esetén 51,97%, 27,86%, 20,16%, míg a deviza adósság esetén 79,72%, 20,27%, 0%. Az indexált kötvények aránya emelkedő, míg a változóké csökkenő tendenciát mutat. A duration a TRY-ben denominált adósságra vonatkozik, és 2007 óta emelkedik. A deviza adósság 97,33%-a USD, 2,12%-a EUR, 0,14%-a JPY és 0,41%-a egyéb, az utóbbi években közel azonos szinten mozog a devizarészarány. A TRY adósság 70,3%-a esetén kell 12 hónapon belül újra megállapítani a kamatokat, ez kis emelkedések mellett csökken.								
Új-Zéland			81,46%	18,54%				100,00%	0,00%
	Az adatok 2009-re vonatkoznak.								

A táblázat elkészítése során felhasznált anyagok:

- Australian Office of Financial Management (Australia): Annual Report 2011-12
- Republic of Austria Debt Management (Austria): Annual Review 2011
- Belgian Debt Agency (Belgium): 2011 annual report
- Republic of Bulgaria (Bulgaria): Government Debt Review 2009
- Republic of Bulgaria (Bulgaria): Government Debt Management Strategy for the Period 2012-2014
- Republic of Bulgaria (Bulgaria): Government Debt Review 2011
- Republic of Bulgaria (Bulgaria) : Monthly Bulletin January 2013
- Republic of Cyprus (Cyprus): Public Debt Management, Annual Report 2011
- Debt and Financial Assets Management Department (Czech Republic): The Czech Republic Funding And Debt Management Strategy 2013
- Debt and Financial Assets Management Department (Czech Republic): Debt Portfolio Management Quarterly Review |December 2012|
- Danmarks Nationalbank (Denmark): Danish Government Borrowing and Debt 2012
- HM Treasury (United Kingdom): Debt and reserves management report 2012-13
- Debt Management Office (United Kingdom): Annual Report and Accounts 2011-2012 of the United Kingdom Debt Management Office and the Debt Management Account
- Republic of Finland (Finland): Debt Management Annual Review 2012
- Agence France Trésor (France): Annual Report 2011
- Dutch State Treasury Agency (Netherlands): Evaluation of the 2008-2011 Policy & 2012-2015 policy
- Dutch State Treasury Agency (Netherlands): Risk management by the DSTA
- Dutch State Treasury Agency (Netherlands): Outlook 2013
- Republic of Croatia (Croatia): Economic and Fiscal Policy Guidelines for the Period 2013-2015
- Republic of Croatia (Croatia): Annual Debt Report and Public Debt Management Strategy 2006
- Republic of Croatia (Croatia): Annual Report of the Ministry of Finance for 2010
- National Treasury Management Agency (Ireland): Annual Report and Accounts for the year ended 31 December 2011
- National Treasury Management Agency (Ireland): Irish Government Euro Denominated Bonds Outstanding Thursday 21 March 2013
- Government Debt Management (Iceland): Market Information, 2013 March
- Ministry of Finance (Iceland): Medium-Term Debt Management Strategy 2012 – 2015
- Ministry of Finance (Japan): Quarterly Newsletter of the Ministry of Finance, Japan, October 2012
- Ministry of Finance (Japan): Debt Management Report 2010
- Department of Finance (Canada): Debt Management Report 2011-2012
- Ministry of Finance (Poland): The public Sector Debt Management Strategy in the years 2013-2016
- Ministry of Finance (Poland): Annual Report 2011
- The Treasury of the Republic of Latvia: Public Report for 2011
- Ministry of Finance (Lithuania): Central Government Debt by Currency, 31 January 2013

- Ministry of Finance (Lithuania): General Government Debt 2011
- Treasury Department (Malta): Malta Government Stocks Outstanding on the Market as at 31 December 2012
- Treasury Department (Malta): Debt Management Directorate
- Finance Agency (Germany): Investor Forum, German Government Securities, June 2010
- Treasury Department (Italy): Average residual life of Government Debt
- Treasury Department (Italy): Government Debt breakdown by instrument as of February 28, 2013
- Treasury Department (Italy): Quarterly Bulletin N. 56 – January 2013
- Treasury Department (Italy): The BTP indexed to Italian inflation, designed for retail investors
- Treasury Department (Italy): Summary of Government Bonds
- Ministry of Finance of the Russian Federation (Russia): Public Debt Management policy of the Russian Federation for 2013-2015
- IGCP (Portugal): Government Debt and Cash Management Annual Report- 2011
- IGCP (Portugal): Debt indicators
- Ministry of Public Finance (Romania): Treasury and public debt department 2012
- Ministry of Public Finance (Romania): Public Debt Bulletin, January 2013
- General Secretariat of the Treasury and Financial Policy (Spain): Central Government Debt: Average Maturity, February 2013
- General Secretariat of the Treasury and Financial Policy (Spain): Foreign Currency Denominated Debt (as at 02.28.2013)
- General Secretariat of the Treasury and Financial Policy (Spain): Government Debt: Maturity Profile of Outstanding Debt at 02/28/13
- General Secretariat of the Treasury and Financial Policy (Spain): Issuance Strategy 2013
- General Secretariat of the Treasury and Financial Policy (Spain): Central Government outstanding Debt, February 2013
- Swedish National Debt Office (Sweden): Sweden's Central Government Debt (28 February 2013)
- Swedish National Debt Office (Sweden): Basis for evaluation of central government debt management 2012
- Swedish National Debt Office (Sweden): Central Government Debt Management, Proposed guidelines 2013-2016
- Debt and Liquidity Management Agency (Slovakia): Annual Report 2012
- Undersecretariat of Treasury (Turkey): Public Debt Management Report 2012
- Undersecretariat of Treasury (Turkey): Public Debt Management Report, February 2013
- Treasury (New-Zealand): Annual Report for 2011/12