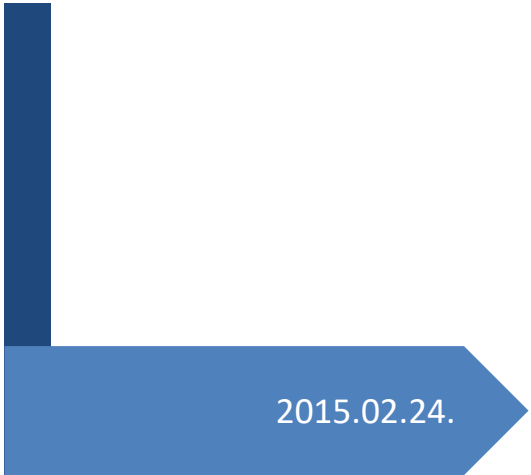
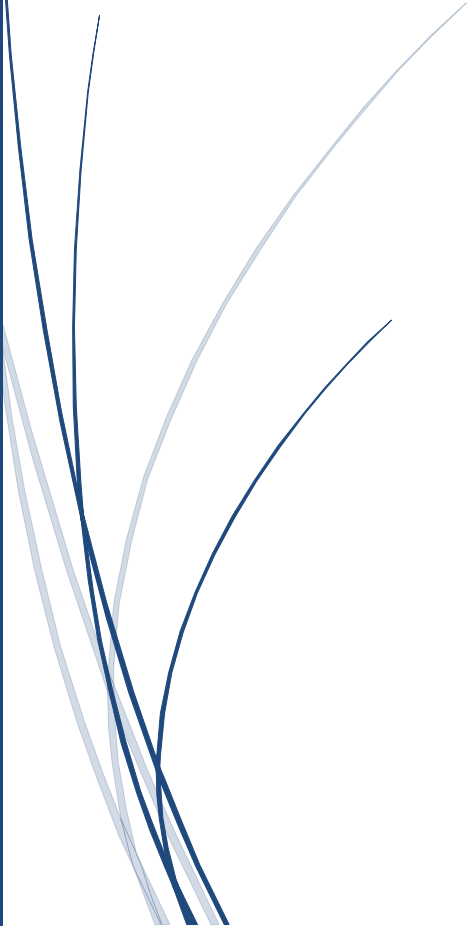




2015.02.24.

A hozamgörbe becslésének módszertani vizsgálata

Elemzés az optimális
adósságportfólió modellhez



Fegyveres György

ÁLLAMADÓSSÁG KEZELŐ KÖZPONT ZRT.

Tartalomjegyzék

ÁBRAJEGYZÉK	II
1 BEVEZETÉS	1
2 A HOZAMGÖRBE-MODELLEK RÖVID ELMÉLETI BEMUTATÁSA	3
2.1 ALAPVETŐ FOGALMAK ÉS JELÖLÉSEK	3
2.2 A DISZKONTGÖRBE ILLESZTÉSE	4
2.2.1 Polinom illesztés	4
2.2.2 Spline módszerek.....	5
2.3 A HOZAMGÖRBE ILLESZTÉSE.....	7
2.3.1 A Nelson-Siegel és Diebold-Li modellek	7
2.4 A GÖRBEILLESZTÉS FOLYAMATA	9
2.5 A KÜLFÖLDI ADÓSSÁGKEZELŐK ÉS JEGYBANKOK ÁLTAL ALKALMAZOTT HOZAMGÖRBE-MODELLEK	10
3 A KAPOTT EREDMÉNYEK BEMUTATÁSA	12
3.1 HARMADFOKÚ SPLINE.....	12
3.1.1 A kapott súlyok.....	15
3.1.2 A diszkontfüggvény és hozamgörbe vizsgálata	18
3.1.3 Az illesztés hibája	24
3.2 A NELSON-SIEGEL MODELLCSALÁD	28
3.2.1 Diebold-Li.....	32
3.2.2 Nelson-Siegel Modell	58
4 ÖSSZEFOGLALÁS	89
4.1 AZ ILLESZKEDÉS PONTOSSÁGA	89
4.2 IDŐSOROS VIZSGÁLHATÓSÁG	94
4.3 A KAPOTT HOZAMGÖRBÉK.....	97

Ábrajegyzék

1. ÁBRA AZ ELEMI KÖTVÉNYEK ÁRFOLYAMA	3
2. ÁBRA A HOZAM ÉS A FORWARD HOZAM.....	4
3. ÁBRA A BEMUTATOTT MODELLEK CSOPORTOSÍTÁSA	4
4. ÁBRA A POLINOM MODELL ELŐNYEI ÉS HÁTRÁNYAI.....	5
5. ÁBRA A SPLINE MÓDSZEREK ELŐNYEI ÉS HÁTRÁNYAI	6
6. ÁBRA FAKTORSÚLYOK A NELSON-SIEGEL MODELL ESETÉN KÜLÖNBÖZŐ λ ÉRTÉKEK MELLETT.....	7
7. ÁBRA A NELSON-SIEGEL MODELL ELŐNYEI ÉS HÁTRÁNYAI.....	8
8. ÁBRA A DIEBOLD-LI MODELL ELŐNYEI ÉS HÁTRÁNYAI	9
9. ÁBRA A NELSON-SIEGEL MODELL ÉS KÜLÖNBÖZŐ KITERJESZTÉSEI.....	9
10. ÁBRA A KÜLFÖLDI JEGYBANKOK GYAKORLATA	11
11. ÁBRA A HARMADFOKÚ SPLINE MÓDSZER CSOMÓPONTJAINAK SZÁMA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT	13
12. ÁBRA A HARMADFOKÚ SPLINE MÓDSZER CSOMÓPONTJAINAK HELYE 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT	14
13. ÁBRA AZ EGYES BÁZISFÜGGVÉNYEK ÉRTÉKE 2008.03.06-ÁN.....	15
14. ÁBRA A BÁZISFÜGGVÉNYEK SÚLYAI 2002.01.01. ÉS 2010. 05.26. KÖZÖTT.....	16
15. ÁBRA A 2002.01.01-2010.05.26. IDŐSZAK BECSÜLT BÁZISFÜGGVÉNY SÚLYAINAK ÉS AZOK MEGVÁLTOZÁSAINAK SZÓRÁSA (*100).....	16
16. ÁBRA A 2002.01.01-2010.05.26. IDŐSZAK BECSÜLT BÁZISFÜGGVÉNY SÚLYOK MEGVÁLTOZÁSAINAK KORRELÁCIÓJA.....	16
17. ÁBRA A BÁZISFÜGGVÉNYEK SÚLYAI 2012.07.19. ÉS 2014. 06.30. KÖZÖTT.....	17
18. ÁBRA A 2012.07.19-2014.06.30. IDŐSZAK BECSÜLT BÁZISFÜGGVÉNY SÚLYAINAK ÉS AZOK MEGVÁLTOZÁSAINAK SZÓRÁSA (*100).....	17
19. ÁBRA A 2012.07.19-2014.06.30. IDŐSZAK BECSÜLT BÁZISFÜGGVÉNY SÚLYOK MEGVÁLTOZÁSAINAK KORRELÁCIÓJA.....	17
20. ÁBRA A DISZKONTFÜGGVÉNY ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT (HARMADFOKÚ SPLINE).....	18
21. ÁBRA A DISZKONTFÜGGVÉNY ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT A HARMADFOKÚ SPLINE MÓDSZER ESETÉN 2	19
22. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT (HARMADFOKÚ SPLINE)	19
23. ÁBRA A HOZAMGÖRBE STATISZTIKAI MUTATÓI (HARMADFOKÚ SPLINE).....	20
24. ÁBRA AZ 1 ÉS 12 HÓNAPOS AUTOKORRELÁCIÓ A KÜLÖNBÖZŐ LEJÁRATÚ HOZAMOK ESETÉN (HARMADFOKÚ SPLINE) ...	20
25. ÁBRA A HOZAMOK VÁLTOZÁSAI KÖZTI KORRELÁCIÓ KÜLÖNBÖZŐ LEJÁRATOK ESETÉN.....	21
26. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ÉS ANNAK ELSŐ, ILLETVE MÁSODIK DERIVÁLTJA 2012.09.27-ÉN.....	22
27. ÁBRA A NAPI SZÉLSŐÉRTÉKEK SZÁMA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT	22
28. ÁBRA LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK AZ ELSŐ DERIVÁLT ALAPJÁN 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT	23
29. ÁBRA LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK RÖVID ÉS HOSSZÚ LEJÁRAT ESETÉN 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT	24
30. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBA ARÁNYA A TELJES NÉGYZETES HIBÁHOZ VISZONYÍTVA (HARMADFOKÚ SPLINE) ..	25
31. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBÁK DARABSZÁMA KÜLÖNBÖZŐ PAPÍROK ESETÉN (HARMADFOKÚ SPLINE).....	26
32. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBÁKHOZ TARTOZÓ ÁLLAMPAPÍROK LEJÁRATA (HARMADFOKÚ SPLINE)	27
33. ÁBRA AZ RMSE ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT	28
34. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPÍROK ESETÉN (HARMADFOKÚ SPLINE)	28
35. ÁBRA A KEZDŐPARAMÉTEREK KIVÁLASZTÁSA A NELSON-SIEGEL MODELL ESETÉN 2014.06.30-ÁN	30
36. ÁBRA A LAMBDÁK ÉS A MAXIMÁLIS GÖRBÜLETI FAKTORSÚLYHOZ TARTOZÓ LEJÁRATOK KAPCSOLATA.....	32
37. ÁBRA AZ EGYES FAKTOROK A FIRSTGLOBAL ÉS AZ ALLGLOBAL OPTIMALIZÁLÁS ESETÉN (DIEBOLD-LI, 3,99).....	33
38. ÁBRA AZ EGYMÁST KÖVETŐ MEGEGYEZŐ OPTIMÁLIS β_3 ÉRTÉKEK SZÁMA A FIRSTGLOBAL MÓDSZER ESETÉN	33
39. ÁBRA AZ ELSŐ FAKTOR ELTÉRÉSE A FIRSTGLOBAL ÉS AZ ALLGLOBAL OPTIMALIZÁLÁS ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99}).....	34
40. ÁBRA A MÁSODIK FAKTOR ELTÉRÉSE A FIRSTGLOBAL ÉS AZ ALLGLOBAL OPTIMALIZÁLÁS ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})	35
41. ÁBRA A HARMADIK FAKTOR ELTÉRÉSE A FIRSTGLOBAL ÉS AZ ALLGLOBAL OPTIMALIZÁLÁS ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})	36
42. ÁBRA AZ RMSE ÉRTÉKEK ELTÉRÉSE A FIRSTGLOBAL ÉS AZ ALLGLOBAL OPTIMALIZÁLÁS ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})	36
43. ÁBRA A HARMADFOKÚ SPLINE-NAL KAPOTT EMPIRIKUS FAKTOROK.....	37
44. ÁBRA A FAKTOROK REGRESSZIÓS VIZSGÁLATA (DIEBOLD-LI, 0,51)	38
45. ÁBRA A FAKTOROK REGRESSZIÓS VIZSGÁLATA (DIEBOLD-LI, 3,99)	38
46. ÁBRA AZ ELSŐ FAKTOR ALAKULÁSA AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 2,01, 3,99})	39
47. ÁBRA AZ ELSŐ FAKTOR ALAKULÁSA A VIZSGÁLT LAMBDÁK MELLETT AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN.....	39
48. ÁBRA A MÁSODIK FAKTOR ALAKULÁSA AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 2,01, 3,99}).....	40
49. ÁBRA A MÁSODIK FAKTOR ALAKULÁSA A VIZSGÁLT LAMBDÁK MELLETT AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN	41
50. ÁBRA A HARMADIK FAKTOR ALAKULÁSA AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25, 2,01, 3,99}).....	41
51. ÁBRA A HARMADIK FAKTOR ALAKULÁSA A VIZSGÁLT LAMBDÁK MELLETT AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN	42
52. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT (DIEBOLD-LI, 0,51).....	42
53. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ELTÉRÉSE A DIEBOLD-LI (0,51) ÉS A HARMADFOKÚ SPLINE MODELLEK KÖZÖTT	43
54. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ABSZOLÚT ELTÉRÉSE A DIEBOLD-LI (0,51) ÉS A HARMADFOKÚ SPLINE MODELLEK KÖZÖTT 2. ...	43
55. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT (DIEBOLD-LI, 3,99)	44
56. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ABSZOLÚT ELTÉRÉSE DIEBOLD-LI MODELLEK KÖZÖTT 0,51-ES ÉS 3,99-ES LAMBDA ESETÉN	44
57. ÁBRA AZ RMSE ALAKULÁSA AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,31, 2,09, 3,91}).....	45
58. ÁBRA AZ RMSE ALAKULÁSA AZ ALLGLOBAL MÓDSZER ESETÉN	46
59. ÁBRA A LEGJOBB NAPI RMSE ÉRTÉKHEZ TARTOZÓ LAMBDA	46
60. ÁBRA A NAPI SORREND AZ RMSE ÉRTÉKEK ALAPJÁN	47

61. ÁBRA AZ EGYES LAMBDAKHOZ TARTOZÓ LEGJOBB NAPI RMSE-K SZÁMA	47
62. ÁBRA AZ ÁRAZÁS HIBÁJÁNAK LEHETSÉGES SZÁMÍTÁSI MÓDJAI.....	48
63. ÁBRA ÁRAZÁSI HIBÁK (WRMSE(D*)) A BENCHMARK DISZKONTKINCSTÁRJEGYEK ESETÉN (DIEBOLD-LI, 0,51)	49
64. ÁBRA ÁRAZÁSI HIBÁK (WRMSE(D*)) A BENCHMARK ÁLLAMKÖTVÉNYEK ESETÉN (DIEBOLD-LI, 0,51).....	50
65. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (DIEBOLD-LI, {0,25; 0,51; 1,01}).....	50
66. ÁBRA AZ EGYMÁST KÖVETŐ HIBÁK FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGE (DIEBOLD-LI, 0,51).....	51
67. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (BID-ASK SÁV, DIEBOLD-LI, {0,25; 0,51; 1,01}).....	51
68. ÁBRA AZ EGYMÁST KÖVETŐ HIBÁK FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGE (BID-ASK SÁV, DIEBOLD-LI, 0,51)	52
69. ÁBRA A BENCHMARK ÁLLAMPAPÍROK ÁRAZÁSI HIBÁJÁNAK PERCENTILISEI (DIEBOLD-LI, 0,51)	52
70. ÁBRA KORRELÁCIÓ AZ BENCHMARK ÁLLAMPAPÍROK ÁRAZÁSI HIBÁI KÖZÖTT (DIEBOLD-LI, 0,51)	53
71. ÁBRA ELTÉRÉS A NÉGYZETES HIBAFÜGGVÉNYEK KÖZÖTT AZ ÖSSZES ÁLLAMPAPÍRRA 0,51-ES LAMBDA MELLETT	53
72. ÁBRA A RÖVID KAMAT ÉS AZ MNB ALAPKAMATHOZ TARTOZÓ SÁV ALAKULÁSA (DIEBOLD-LI, {0,25, 0,61, 1,01}).....	55
73. ÁBRA A RÖVID KAMAT ÉS AZ O/N BUBOR-HOZ TARTOZÓ SÁV ALAKULÁSA (DIEBOLD-LI, {0,25, 0,61, 1,01}).....	56
74. ÁBRA A RÖVID KAMAT ÉS A 3 HÓNAPOS BENCHMARK HOZAMHOZ TARTOZÓ SÁV ALAKULÁSA (DIEBOLD-LI, {0,25, 0,61, 1,01}).....	57
75. ÁBRA AZ EGYES LAMBDAKRA A MEGFELELŐ SÁVBA ESÉSEK SZÁMA A VIZSGÁLT IDŐTÁV ALATT	57
76. ÁBRA A FAKTOROK ALAKULÁSA (NELSON-SIEGEL).....	58
77. ÁBRA A FAKTOROK STATISZTIKAI MUTATÓI (NELSON-SIEGEL).....	58
78. ÁBRA A FAKTOROK REGRESSZIÓS VIZSGÁLATA (NELSON-SIEGEL)	59
79. ÁBRA A FAKTOROK MEGVÁLTOZÁSAINAK ALAKULÁSA (NELSON-SIEGEL).....	59
80. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT (NELSON-SIEGEL)	60
81. ÁBRA A BECSLÉS HIBÁJA A NELSON-SIEGEL MODELL ESETÉN.....	60
82. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (NELSON-SIEGEL)	61
83. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (BID-ASK SÁV, HARMADFOKÚ SPLINE ÉS NELSON-SIEGEL)	61
84. ÁBRA A LAMBDA RA VONATKOZÓ KORLÁT SÁVKÖZEPE KÜLÖNBÖZŐ TÜRÉSHATÁROK (5%, 10%, 20% ÉS 50%) MELLETT	62
85. ÁBRA A LAMBDA RA VONATKOZÓ KORLÁT SÁVKÖZEPE KÜLÖNBÖZŐ KÉSLELTETÉSEK (5, 10, 20, 60, 120 ÉS 250 NAP) MELLETT	63
86. ÁBRA A SÁVHATÁROK ÉS A BECSÜLT LAMBDA K ALAKULÁSA (TÜRÉSHATÁR: 20%, KÉSLELTETÉS: 60 NAP)	64
87. ÁBRA A FAKTOROK REGRESSZIÓS VIZSGÁLATA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	64
88. ÁBRA A FAKTOROK STATISZTIKAI MUTATÓI (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	65
89. ÁBRA A FAKTOROK MEGVÁLTOZÁSÁNAK KORRELÁCIÓS VIZSGÁLATA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	65
90. ÁBRA AZ ELSŐ FAKTOR ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ TÜRÉSHATÁROK (5%, 20%) MELLETT	66
91. ÁBRA A MÁSODIK FAKTOR ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ TÜRÉSHATÁROK (5%, 20%) MELLETT.....	67
92. ÁBRA A HARMADIK FAKTOR ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ TÜRÉSHATÁROK (5%, 20%) MELLETT.....	67
93. ÁBRA A LAMBDA ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ TÜRÉSHATÁROK (5%, 20%) MELLETT.....	68
94. ÁBRA AZ ELSŐ FAKTOR ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ KÉSLELTETÉSEK (5, 20 ÉS 250 NAP) MELLETT.....	69
95. ÁBRA A MÁSODIK FAKTOR ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ KÉSLELTETÉSEK (5, 20 ÉS 250 NAP) MELLETT	69
96. ÁBRA A HARMADIK FAKTOR ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ KÉSLELTETÉSEK (5, 20 ÉS 250 NAP) MELLETT	70
97. ÁBRA A LAMBDA ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ KÉSLELTETÉSEK (5, 20 ÉS 250 NAP) MELLETT	71
98. ÁBRA A FAKTOROK MEGVÁLTOZÁSA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	71
99. ÁBRA A LAMBDA MEGVÁLTOZÁSA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	72
100. ÁBRA A MEGVÁLTOZÁSOK KÖZTI KORRELÁCIÓ (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	72
101. ÁBRA A MEGVÁLTOZÁSOK IRÁNYA A FAKTOROK ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	73
102. ÁBRA A MEGVÁLTOZÁSOK STATISZTIKAI MUTATÓI (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	73
103. ÁBRA QQ ÁBRÁK A BECSÜLT FAKTOROK MEGVÁLTOZÁSA ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	73
104. ÁBRA A BENCHMARK LEJÁRATÚ HOZAMOK ALAKULÁSA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	74
105. ÁBRA A BENCHMARK LEJÁRATÚ HOZAMOK (BAL) ÉS AZOK MEGVÁLTOZÁSAINAK (JOB) KORRELÁCIÓJA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	75
106. ÁBRA A BENCHMARK LEJÁRATÚ HOZAMOK MEGVÁLTOZÁSÁNAK STATISZTIKAI MUTATÓI (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	75
107. ÁBRA A BENCHMARK LEJÁRATÚ HOZAMOK MEGVÁLTOZÁSAINAK HISZTOGRAMJAI (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	76
108. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ALAKULÁSA 2002.01.01. ÉS 2014.06.30. KÖZÖTT (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	76
109. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ELTÉRÉSE NELSON-SIEGEL (20 NAP, 0,05%) ÉS A HARMADFOKÚ SPLINE MODELLEK KÖZÖTT ...	77
110. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ABSZOLÚT ELTÉRÉSE A NELSON-SIEGEL (5%, 20 NAP) ÉS A HARMADFOKÚ SPLINE MODELLEK KÖZÖTT	77
111. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ELTÉRÉSE NELSON-SIEGEL (20 NAP, 0,05% ÉS KORLÁT NÉLKÜLI) MODELLEK KÖZÖTT	78
112. ÁBRA A HOZAMGÖRBE ABSZOLÚT ELTÉRÉSE NELSON-SIEGEL (20 NAP, 0,05% ÉS KORLÁT NÉLKÜLI) MODELLEK KÖZÖTT	78
113. ÁBRA AZ ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉS ALAKULÁSA KÜLÖNBÖZŐ KÉSLELTETÉSEK (5, 20 ÉS 250 NAP) MELLETT	79
114. ÁBRA A LEGKISEBB ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉSŰ NAPOK SZÁMA A VIZSGÁLT IDŐSZAKBAN A KÉSLELTETÉS ÉS A TÜRÉSHATÁR FÜGGVÉNYÉBEN	80
115. ÁBRA AZ ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉS SZERINTI HELYEZÉSEK DARABSZÁMA A VIZSGÁLT IDŐSZAKBAN (KÉSLELTETÉS).....	80
116. ÁBRA AZ ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉS SZERINTI HELYEZÉSEK DARABSZÁMA A VIZSGÁLT IDŐSZAKBAN (TÜRÉSHATÁR)	80
117. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBÁK DARABSZÁMA KÜLÖNBÖZŐ PAPIROK ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP) ..	81
118. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBÁKHOZ TARTOZÓ ÁLLAMPAPÍROK LEJÁRATI MEGOSZLÁSA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP ÉS HARMADFOKÚ SPLINE).....	82
119. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	82

120. ÁBRA AZ EGYMÁST KÖVETŐ HIBÁK FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGE (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	82
121. ÁBRA A BECSLÉSI HIBÁK AUTOKORRELÁCIÓJA A 6 HÓNAPOS KINCSTÁRJEGY ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP) ..	83
122. ÁBRA A BECSLÉSI HIBÁK AUTOKORRELÁCIÓJA A 10 ÉVES KÖTVÉNY ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	84
123. ÁBRA A HIBÁK AUTOKORRELÁCIÓJA A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	84
124. ÁBRA A HIBÁK KORRELÁCIÓJA A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	85
125. ÁBRA AZ ALUL- VAGY FELÜLBECSLÉS ESÉLYE A BENCHMARK PAPIROK ESETÉN (BID-ASK SÁV, NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	85
126. ÁBRA AZ EGYMÁST KÖVETŐ HIBÁK FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGE (BID-ASK SÁV, NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	85
127. ÁBRA A BENCHMARK ÁLLAMPAPIROK ÁRAZÁSI HIBÁJÁNAK PERCENTILISEI (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	86
128. ÁBRA KORRELÁCIÓ AZ BENCHMARK ÁLLAMPAPIROK ÁRAZÁSI HIBÁI (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP)	86
129. ÁBRA A RÖVID KAMAT ÉS A 3 HÓNAPOS BENCHMARK HOZAMHOZ TARTOZÓ SÁV ALAKULÁSA (NELSON-SIEGEL, 5%, 20 NAP).....	87
130. ÁBRA A 3 HÓNAPOS BENCHMARKPAPÍR ÁLTAL MEGHATÁROZOTT SÁVBA ESÉSEK SZÁMA A VIZSGÁLT IDŐTÁV ALATT (NELSON-SIEGEL)	87
131. ÁBRA A NÉGYZETES HIBÁK ALAKULÁSA A VIZSGÁLT MODELLEK ESETÉN	90
132. ÁBRA A NÉGYZETES HIBÁK (RMSE) STATISZTIKAI MUTATÓI A VIZSGÁLT MODELLEK ESETÉN	90
133. ÁBRA AZ ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉS SZERINTI HELYEZÉSEK SZÁMA A VIZSGÁLT IDŐSZAKBAN	91
134. ÁBRA A VIZSGÁLT MODELLEK EGYMÁS KÖZTI RMSE SZERINTI TELJESÍTMÉNYE	91
135. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBÁK DARABSZÁMA KÜLÖNBÖZŐ PAPIROK ESETÉN.....	92
136. ÁBRA A MAXIMÁLIS NÉGYZETES HIBÁKHOZ TARTOZÓ ÁLLAMPAPIROK LEJÁRATI MEGOSZLÁSA	93
137. ÁBRA A BENCHMARK PAPIROK ALUL- ÉS FELÜLBECSLÉSÉNEK ESÉLYE A VIZSGÁLT MODELLEK ESETÉN.....	93
138. ÁBRA A BENCHMARK PAPIROK ALUL- ÉS FELÜLBECSLÉSÉNEK EGYÜTTES VALÓSZÍNŰSÉGE A VIZSGÁLT IDŐSZAK ALATT	94
139. ÁBRA A BENCHMARK PAPIROK ALUL- ÉS FELÜLBECSLÉSÉNEK FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGE A VIZSGÁLT IDŐSZAK ALATT	94
140. ÁBRA AZ ELSŐ FAKTOR ALAKULÁSA A NELSON-SIEGEL TÍPUSÚ MODELLEK ESETÉN	95
141. ÁBRA A MÁSODIK FAKTOR ALAKULÁSA A NELSON-SIEGEL TÍPUSÚ MODELLEK ESETÉN	96
142. ÁBRA A HARMADIK FAKTOR ALAKULÁSA A NELSON-SIEGEL TÍPUSÚ MODELLEK ESETÉN	97
143. ÁBRA AZ ÁTLAGOS HOZAMGÖRBE A VIZSGÁLT MODELLEK ESETÉN	97
144. ÁBRA AZ ÁTLAGOS HOZAMGÖRBE SZÓRÁSA A VIZSGÁLT MODELLEK ESETÉN	98
145. ÁBRA AZ ÁTLAGOS HOZAMGÖRBE A 2008-AS VÁLSÁG ELŐTT ÉS UTÁN A HARMADFOKÚ SPLINE ÉS A KORLÁTOZOTT NELSON-SIEGEL MODELL ESETÉN.....	98
146. ÁBRA A HOZAMGÖRBE SZÓRÁSA A 2008-AS VÁLSÁG ELŐTT ÉS UTÁN A HARMADFOKÚ SPLINE ÉS A KORLÁTOZOTT NELSON-SIEGEL MODELL ESETÉN.....	99

1 Bevezetés

Az ÁKK 2004-ben alakította ki az adósságkezelés első átfogó költség/kockázati modelljét, amely több okból kifolyólag a 2008/2009-es válságot követően elavulttá vált. 2013-ban egy új modell kialakítása kezdődött meg az ÁKK-n belül.

A szimulációs adósságkezelési modellek egyik fő alapfunkciója, hogy valószínűségi eloszlásokat adnak a hozamok jövőbeli alakulására (ez elsősorban a kamatkiadások nagyságának és kockázatának becslését szolgálja), ezért a hozamgörbe-becslési módszertan kialakítása és a modellbe való beépítése egyike a legfontosabb feladatoknak. A jelen anyagban az ÁKK részletesen megvizsgálta a nemzetközi gyakorlatban jelenleg használt hozamgörbe-modelleket, ezek közül behatóan vizsgálja a (1) harmadfokú spline, (2) Diebold-Li és (3) Nelson-Siegel modelleket.

A hozamgörbe-modellek egyik jellemzője, hogy az alkalmazandó matematikai modell paramétereit egy bizonyos múltbeli időszak árfolyam-adatai alapján minden napra meghatározzák, majd pedig ezek alapján készítenek előrejelzést a jövőbeli hozamok várható alakulására. A paraméterek több ezer lehetséges realizációjának eloszlását és ennek különböző mutatószámait (például várható érték, szórás, kvantilis) használhatjuk arra, hogy a jövőbeli hozamokról képet kaphassunk. A teljes hozamgörbe modellezéséhez elegendő ezen paraméterek ismerete, ugyanis ezek egyértelműen meghatározzák a görbét. Tehát maga a hozamgörbe-modellezés is több szakaszra bontható fel, a becslésre és az előrejelzésre.

A kutatás a 2002-2014 közötti magyar állampapír-árfolyamokat használja adatsorként. Megfigyelhető, hogy ebben az időszakban nagyon volatilis volt a hozamgörbe, erőteljes hozamnövekedések és -csökkenések, a görbe meredekségének negatívból pozitívba fordulása, illetve a meredekség változása is előfordultak. Külön kiemelhető a 2008-2009-es válság során bekövetkezett hozamemelkedés, de markánsan jelentkezik a 2013-2014-es időszak hozamcsökkenése is. A hozamok nagyfokú volatilitása megnehezíti a paraméterek idősoros vizsgálatát és így a hozamok előrejelzését is.

A kutatás eredményeként azt tapasztaltuk, hogy nincsen egyértelműen legjobb hozamgörbe-modell a magyar hozamadatokat tekintve. Míg a harmadfokú spline módszer jó illeszkedést ad, a kapott súlyok idősoros vizsgálata – és így a megfelelő előrejelzésük – nem lehetséges, így ez a modell nem javasolt önmagában az optimális portfóliómodellben a hozamgörbe modellezésére. A Diebold-Li modell (mint a Nelson-Siegel modell egyszerűsített változata) egyszerű alakja és a paraméterekre tett feltételezések miatt könnyen becsülhető, azonban a kapott hozamgörbékre vonatkozó vizsgálatok megmutatták, hogy ezen feltevések nem tükrözik a valóságot. Ez az időszak során történt strukturális töréseknek és rezsimváltásoknak (például a 2008-as válságnak) köszönhető. Habár e két említett modell nem használható közvetlenül az adósságkezelési modellben, eredményeik felhasználhatóak a kiválasztandó hozammodell becslése során. A harmadikként vizsgált Nelson-Siegel modell egyik legfontosabb előnye, hogy a modell paraméterei (faktorai) könnyen értelmezhetőek, nevezetesen megfeleltethetőek a hosszú távú hozamszintnek, a görbe meredekségének, illetve görbületének. Ezen faktorok idősorosan is vizsgálhatók, így ez a modell használható a hozamgörbe előrejelzéséhez is.

Az adósságkezelők jellemzően a Nelson-Siegel modellt alkalmazzák, ahogy ezt a külföldi gyakorlatot bemutató tavalyi elemzésünk is tartalmazta. A jegybankok gyakorlatában legelterjedtebbek a spline módszerek egyik változata (simított spline) és a Nelson-Siegel (illetve annak a Svensson-féle bővítése) modellek, az MNB is használja a Svensson modellt. Az előzetes módszertani áttekintés, az egyes modellek előnyei és hátrányai, valamint az

adósságkezelők és jegybankok gyakorlata alapján is a Nelson-Siegel (illetve Svensson) modell tűnik a jó választásnak a magyar hozamgörbe becslésére az ÁKK új modelljében is, ezt az ÁKK kutatásából származó empirikus eredmények is alátámasztják. A kutatás részletes folyamatát és eredményeit az alábbi tanulmányban foglalta össze az ÁKK.

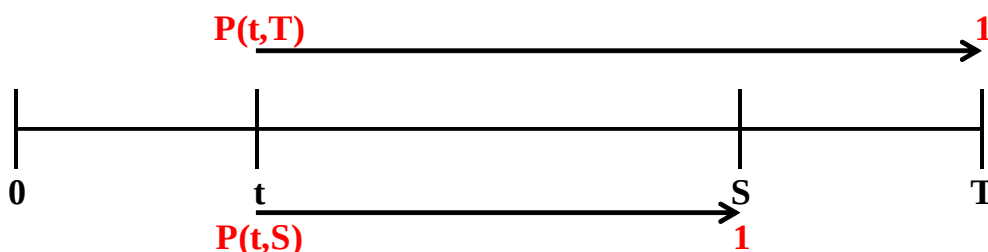
2 A hozamgörbe-modellek rövid elméleti bemutatása¹

2.1 Alapvető fogalmak és jelölések

A kötvénypiacok legegyszerűbb építőelemei a kockázatmentes diszkontpapirok, vagy elemi kötvények. Ezek $P(t, T)$ árfolyama a T -beli egységnyi kifizetés t időpillanatra vonatkozó értéke (tehát az elemi kötvény lejáratát $T - t$). Ha egy adott időpontra tekintjük a különböző lejáratú elemi kötvények árfolyamát (ezt szemlélteti az 1. ábra), akkor a diszkontgörbét kapjuk, azaz formálisan a

$$d(t, \cdot): s \mapsto P(t, t + s)$$

hozzárendelést nevezzük diszkontgörbének. A piacon (közvetetten) ezen görbe egyes pontjait figyelhetjük meg, így a teljes hozamgörbére irányuló becslési folyamat során a többi pontot próbáljuk egy előre adott szempontrendszer alapján minél jobban közelíteni.



1. ábra Az elemi kötvények árfolyama

A (t, T) időtávon elérhető $R(t, T)$ hozam² az elemi kötvény árfolyamából könnyen adódik a

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

összefüggés átrendezésével. Ha minden t -ből induló időtávra meghatározzuk a hozamot, akkor a hozamgörbét kapjuk, formálisan

$$r(t, \cdot): s \mapsto R(t, t + s).$$

Pillanatnyi (rövid kamat) kamatlábnak nevezzük az infinitezimálisan rövid időtávú befektetés hozamát, matematikailag³

$$r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} R(t, t + s) = \lim_{t \rightarrow T} R(t, T).$$

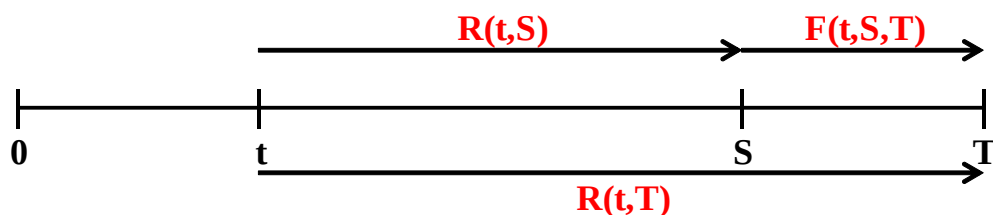
Lehetséges, hogy nem a befektetés elején tudjuk a hozamot, hanem egy korábbi időpontban (ezt mutatja a 2. ábra). Ebben az esetben beszélhetünk a forward hozamról, azaz az (S, T) későbbi időszakra vonatkozó, t -ben megállapított határidős kamatlábat jelöljük $F(t, S, T)$ -vel.

¹ A hozamgörbe illesztésről bővebb elméleti összefoglaló és empirikus vizsgálat található Fegyveres György "A hozamgörbe modellezésének módszertani bemutatása a spline és a Nelson-Siegel típusú modellek összehasonlításán keresztül" című írásában:

http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_actfinmat/2014/fegyveres_gyorgy.pdf

² A következőkben hozam alatt mindig loghozamot értünk, az effektív és loghozam közti átváltást az $r_{\text{effektív}}(t, T) = \ln(1 + r_{\text{log}}(t, T))$ összefüggés adja meg.

³ A határérték szükséges, ugyanis $R(t, t) = 1$.



2. ábra A hozam és a forward hozam

Ebből adódik az összefüggés az elemi kötvények árfolyamából kifejezve

$$F(t, S, T) = -\frac{\ln P(t, T) - \ln P(t, S)}{T - S}.$$

Ha a jövőbeli befektetés időtávja infinitezimálisan kicsi, azaz $T \rightarrow S$, akkor az $F(t, T)$ pillanatnyi határidős kamatlábat kapjuk, amire

$$F(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}.$$

Ha minden lejáratra meghatározzuk a pillanatnyi határidős kamatlábat⁴, akkor a forwardgörbét kapjuk, formálisan

$$f(t, \cdot): s \mapsto F(t, t + s).$$

Összefoglalva elmondható, hogy a $d(t, \cdot)$ diszkontgörbe, az $r(t, \cdot)$ hozamgörbe, az $r(t)$ pillanatnyi kamat és az $f(t, \cdot)$ forwardgörbe egymásból kifejezhető fogalmak. A különböző hozamgörbe modellek többek között abban térnek el egymástól, hogy ezek közül melyiket modellezi.

Diszkontgörbe	polinom illesztés, spline módszerek
Hozamgörbe	Nelson-Siegel, Diebold-Li, Svensson
Forwardgörbe	Heath-Jarrow-Morton
Rövid kamat	Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross

3. ábra A bemutatott modellek csoportosítása

2.2 A diszkontgörbe illesztése

A diszkont-, hozam- vagy forwardgörbék vizsgálata történhet statikusan vagy dinamikusan. Előbbi keresztmetszeti becslést jelent, azaz egy adott időpontra határozzák meg a görbét a piacon megfigyelhető árfolyamok felhasználásával. Statikus becslés során nem feltételezünk semmilyen sztochasztikát (véletlent) a görbét leíró paraméterekre. A dinamikus becslés a hozamok idősoros jellegét ragadja meg a görbe fejlődésének leírásával.

2.2.1 Polinom illesztés

A diszkontgörbe illesztése során a keresett függvényt bázisfüggvények lineáris kombinációjaként állítják elő. Ezen bázisfüggvények alakját előre rögzítik, majd a lineáris kombináció együtthatóit úgy határozzák meg, hogy minimális legyen a szintén korábban megadott célfüggvény értéke. A célfüggvényt jellemzően a becsült és megfigyelt

⁴ A pillanatnyi kamatlábra $r(t) = f(t, t)$.

középárfolyamok vagy lejáratig számított hozamok eltéréséből számítják. Ebből kifolyólag az alábbi elvárásaink vannak⁵:

- a becsült kötvényárfolyamok legyenek közel az empirikusan megfigyeltekhez
- legyenek kiszámíthatók a becslés pontosságát mérő mutatók (célfüggvény)
- a becsült diszkontgörbe feleljen meg az arbitrázsmentességnek (1-ből indul, monoton csökken, pozitív)
- a diszkontgörbéből számított forwardgörbe legyen kellően stabil és sima
- a becslés ne legyen számításigényes.

A bázisfüggvényekre vonatkozóan a legegyszerűbb függvényalak a polinom⁶. Ekkor a diszkontgörbe a következő alakban írható fel (azaz a diszkontfüggvény értéke ha a t időpillanatban vagyunk és s a lejárat):

$$d(t, s) = \beta_0 + \beta_1 s^1 + \dots + \beta_N s^N$$

A becslési feladat ekkor a β együtthatók meghatározása. Ennek előnye, hogy a polinomok fokszámának növelésével tetszőlegesen közelíthetők a folytonos függvények, illetve könnyen számíthatók. A megfelelő fokszám eldöntendő kérdés, a túl alacsony fokú polinomok nem elég rugalmasak, hogy az így becsült görbéből megfelelő kötvényárfolyamokat kapjunk. Magas fokszám esetén „túl jó” az illeszkedés, ez azonban a görbe kedvezőtlen tulajdonságait eredményezheti, például túlságosan ingadozik, vagy nem teljesíti közgazdaságtani elvárásainkat (például nem ad mindig pozitív forwardhozamot). Polinom illesztés esetén a teljes időintervallumra történik a közelítés, ezáltal nem vesszük figyelembe a kötvénypiacok azon sajátosságát, hogy rövid távra több megfigyelés esik, így ott rugalmasabb függvényforma indokolt.

POLINOM ILLESZTÉS	
Előny	könnyű kiszámítani a bázisfüggvényeket
	tetszőleges pontosság elérhető
Hátrány	kicsi fokszám esetén rugalmatlanság
	nagy fokszám esetén ingadozás
	nem veszi figyelembe a megfigyelések elhelyezkedését

4. ábra A polinom modell előnyei és hátrányai

2.2.2 Spline módszerek

A spline függvények megoldást jelentenek az előbbi hátrányokra. A spline modellek esetén olyan csomópontok meghatározása szükséges, melyek az időintervallumot szakaszokra osztják fel. Ezután ezeken a részintervallumokon határozzuk meg N -ed fokú (tipikusan harmadfokú) polinomokat úgy, hogy azok a szakaszhatárokon illeszkedjenek (különben nem lenne folytonos a görbe). További követelmény, hogy még az $N - 1$. derivált is folytonos legyen, ez a görbe simasága miatt fontos. Harmadfokú spline esetén ez azt jelenti, hogy a diszkontgörbe folytonossága mellett a forwardgörbe (mint első derivált) is az, illetve a forwardgörbében nincsenek nagy ugrások (második derivált folytonossága). Bázisfüggvényeknek ebben az esetben olyan függvényeket választunk, hogy azok kombinációja az előbb leírt N -ed fokú spline legyen.

A spline modellek esetén a diszkontgörbe rugalmassága három dologtól függ:

⁵ Kopányi Szabolcs András: A hozamgörbe dinamikus becslése. Ph.d. értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem, 2009.

⁶ Makara Tamás: A hozamgörbe mérése. Egyetemi Tanulmány (BCE), 2013.

- a használt polinomok fokszámától,
- a csomópontok számától és
- a csomópontok helyétől.

Így a diszkontgörbe rugalmasabbá tételére egyik lehetőség a részintervallumokon értelmezett polinomok fokszámának növelése. Ez az előző részben említett problémákon kívül azért sem előnyös, mivel ekkor több illeszkedési követelménynek is teljesülnie kell (ezáltal komplexebb lesz a bázisfüggvények matematikai alakja).

Másik lehetőség a csomópontok számának növelése, ekkor az alkotó polinomok fokszáma nem változik. A használt szakaszok száma két további szempontból is lényeges kérdés. Egyik, hogy túl kevés részintervallum esetén a diszkontgörbe nem fog jól illeszkedni, míg túl sok esetén a kötvényárfolyamokban lévő mérési hibákat is illesztjük. Nem hatékony megoldás, ha több csomópontszám esetére is elvégezzük a becslést, ugyanis ez rendkívül munkaigényes. Ezért a nemzetközi szakirodalom alapján a megfigyelések számának gyökéből származtathatjuk a csomópontok számát. Másik fontos észrevétel, hogy minél több szakaszhatár van, annál több bázisfüggvény is, így több paramétert (bázisfüggvény) súlyt kell becsülni, ami növeli az illesztés számításigényét.

A spline módszerekkel figyelembe vehető a megfigyelések lejárat szerkezete, ugyanis ha rövid távra több szakaszhatárt helyezünk, akkor ott, ahova az adatok nagy része esik, rugalmasabb a görbe. Általánosan is elmondható, hogy a csomópontok elhelyezése kötetlen (akár az optimalizálási feladat része is lehet), így úgy választható meg, hogy a diszkontgörbe minél jobban illeszkedjen. Ez a választás jelenthet bonyolult numerikus eljárásokat is (amik erőforrás igényesek), népszerű megoldás azonban, hogy minden részintervallumba közel ugyanannyi megfigyelés essen.

SPLINE MÓDSZEREK	
Előny	kicsi fokszám esetén is lehet rugalmas a görbe
	figyelembe veszi a megfigyelések elhelyezkedését
	keves csomópont esetén sima görbe
	sok csomópont esetén jó illeszkedés
Hátrány	numerikusan nem mindig stabil
	keves csomópont esetén rossz illeszkedés
	sok csomópont esetén nem sima a görbe
	a diszkontgörbe exponenciális alakú, így polinomokkal nehéz közelíteni
	itt sem értelmezhetőek a bázisfüggvények súlyai

5. ábra A spline módszerek előnyei és hátrányai

A minél jobb illesztés mellett további cél lehet, hogy a kapott görbe sima is legyen. A simaságot mérhetjük heurisztikusan a vizsgált intervallumon a görbület négyzetének átlagolásával, egészen pontosan a második derivált négyzetének integráljával, azaz

$$\int \left(\frac{\partial^2 d(t, u)}{\partial u^2} \right)^2 du$$

Így a minimalizálandó célfüggvényt (a becsült és megfigyelt árfolyamok vagy lejáratig számított hozamok eltéréseinek négyzetösszege) bővíthetjük ezzel a simaságot leíró mérőszámmal. A kettő közti átváltást egy konstans vagy egy lejáratától függő függvény segítségével határozhatjuk meg. Ezt a módszert nevezzük simított spline-nak.

A diszkontgörbe exponenciális típusú függvény, így szakaszonként polinomokkal problémás közelíteni az eltérő görbület miatt. Habár kellően sok csomóponttal tetszőlegesen közelíthető

a diszkontgörbe, lokálisan nem lesz megfelelő az illeszkedés, ugyanis a becült görbe ingadozik a valós körül (ami instabil forwardgörbét okoz). Egyik megoldás a diszkontgörbe logaritmusának közelítése volna, ez azonban nem-lineáris becslési módszerek szükségességét eredményezné. Másik lehetőség a lejáratnak (mint a diszkontgörbe argumentumának) a transzformálása⁷. Ez utóbbi módszert nevezik exponenciális spline-oknak.

Az előző megállapítások világítottak rá, hogy célravezető lehet, ha exponenciális függvényeket használunk, illetve ne csak szakaszonként, hanem az egész intervallumon értelmezett bázisfüggvényeket alkalmazzunk. A kettő ötvözte a Merrill Lynch exponenciális spline modell, ahol a bázist exponenciális függvények alkotják. Tehát lényegében ugyanaz, mint a polinom illesztés, csak polinomok helyett különböző lecsengésű exponenciális függvényekkel.

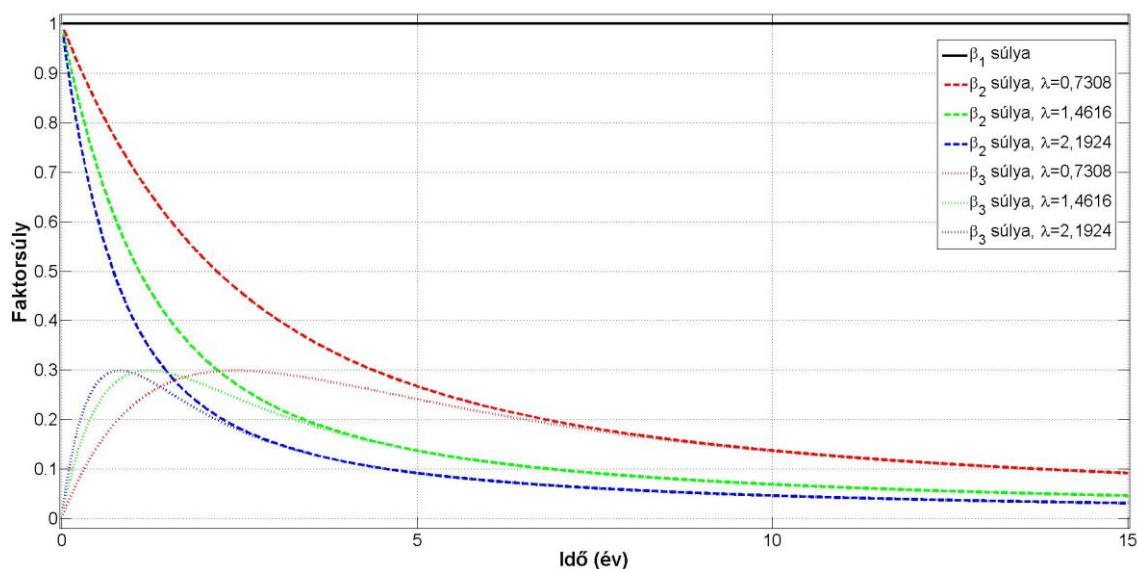
2.3 A hozamgörbe illesztése

2.3.1 A Nelson-Siegel és Diebold-Li modellek

A Nelson-Siegel⁸ modell feltevése⁹ alapján a hozamgörbe a következő alakban írható:

$$R(t, \tau) = \beta_{t,1} + \beta_{t,2} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{t,3} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right).$$

A $\beta_{t,}$ paraméterekre tekinthetünk úgy, mint faktorokra a hozzájuk tartozó faktorsúlyokkal. A spline módszerekkel ellentétben a Nelson-Siegel modellnél kevesebb és fix számú paraméter írja le a hozamgörbét. A λ_t paramétert nevezik exponenciális késleltetésnek, kis értékei lassú lecsengést eredményeznek, így a görbe jobban illeszkedik hosszú lejáratokon. Nagy értékek mellett rövidtávon rugalmasabb a görbe. A λ_t paraméter határozza meg továbbá, hogy mikor éri el a harmadik faktor súlya a maximumát.



6. ábra Faktorsúlyok a Nelson-Siegel modell esetén különböző λ értékek mellett

⁷ O. A. Vasicek és H. G. Fong: Term structure modeling using exponential splines. The Journal of Finance, 37(2):339-348, 1981.

⁸ C. R. Nelson és A. F. Siegel: Parsimonious modeling of yield curves. The Journal of Business, 60(4):473-489, 1987.

⁹ A forwardgörbe egy másodrendű differenciálegyenlet megoldása (két valós és egyenlő gyök esetére).

A 6. ábra (a vízszintes tengelyen szereplő idő jelen esetben a τ lejárat) mutatja, hogy az első faktor konstans 1 súlyú, így ez tekinthető egy hosszú távú faktornak. A második faktor $\frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}$ súlya is az 1-ből indul, ezután azonban exponenciális sebességgel, monoton tart a 0-hoz (minél nagyobb a λ_t , annál gyorsabban), tehát ez rövid távú faktor. A $\beta_{t,3}$ -hoz tartozó $\frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau}$ súly 0-ból indul és ugyanoda tér vissza, így se nem rövid, se nem hosszú távú faktor. λ_t értékétől függően éri el közben maximumát, ez alapján ez a faktor középtávon hat. A 6. ábra alapján annál hamarabb veszi fel maximumát, minél nagyobb a λ_t .

NELSON-SIEGEL MODELL	
Előny	kevés paraméterrel írja le a hozamgörbét
	kellően rugalmas, hogy különböző alakú görbéket előállítson
	a modell komponensei értelmezhetőek rövid, közép és hosszú távú súlyokként
	a leginkább elterjedt, így gazdag szakirodalom
Hátrány	statikus modell
	nem-lineáris módszerekkel becsülhető

7. ábra A Nelson-Siegel modell előnyei és hátrányai

A 7. ábra foglalja össze a (statikus) Nelson-Siegel modell előnyeit és hátrányait. Utóbbiakra a következőkben említendőek jelentenek megoldást. Egyrészt a $\beta_{t,\cdot}$ együtthatók tekinthetők látens dinamikus faktoroknak¹⁰, továbbá az eddigiekkel ellentétben a Nelson-Siegel modell esetén ezek közgazdaságilag is értelmezhetőek. $\beta_{t,1}$ egyformán változtatja az összes lejáratú hozamot és $R(t, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, \tau) = \beta_{t,1}$, így azonosítható a hozamgörbe szintjével. A meredekség értelmezésére természetesen adódik, hogy az egy hosszú és egy rövid távú hozam különbsége. Formailag $R(t, \infty) - R(t, 0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, \tau) - \lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, \tau) = -\beta_{t,2}$ ¹¹, így a második faktor azonosítható meredekségként. A harmadik faktor azonosítható a hozamgörbe görbületével, ugyanis középtávú faktorként ez felelős a hozamgörbe púpos vagy U alakjáért. A hozamgörbében lévő görbületek helye és az exponenciális késleltetés közti kapcsolatot meghatározhatjuk a harmadik faktorsúly deriváltjából, erre azt kapjuk, hogy

$$e^{-\lambda_t \tau} (\lambda_t^2 \tau^2 + \lambda_t \tau + 1) = 1.$$

A piacon értelemszerűen nem lehet a végtelen és pillanatnyi lejáratokra hozamot megfigyelni, így a szakirodalom az empirikus szintet az $R(t, 10 \text{ év})$, az empirikus meredekséget az $R(t, 10 \text{ év}) - R(t, 3 \text{ hónap})$ és az empirikus görbületet az $2R(t, 2 \text{ év}) - R(t, 3 \text{ hónap}) - R(t, 10 \text{ év})$ mennyiségekként definiálja. Azt, hogy a faktorok értelmezése ezzel konzisztens-e úgy ellenőrizhetjük, hogy megvizsgáljuk a kapcsolatot közöttük (korreláció vagy regresszió).

A Diebold-Li modell a $\beta_{t,\cdot}$ paraméterek dinamikus értelmezésén túl a λ_t paramétert időben konstansnak veszi. Ezzel, ahogy a modell alakjából is látszik, legkisebb négyzetek módszerével becsülhetővé válik a hozamgörbe. Így elkerülhető a numerikus optimalizáció, ami instabilitást eredményezhetne és erőforrás igényes is. A modell hátránya azonban, hogy rögzíti a lambda paramétert, de egy hosszabb időszakot vizsgálva strukturális törések is lehetnek az idősorban, így az exponenciális késleltetés változhat.

¹⁰ F. X. Diebold és C. Li: Forecasting the term structure of government bond yields. Journal of Econometrics, 130:337-364, 2006.

¹¹ Ebből adódik, hogy a pillanatnyi kamatra $r(t) = R(t, 0) = \beta_{t,1} + \beta_{t,2}$.

	DIEBOLD-LI MODELL
Előny	numerikusan megbízható
	reprodukálja a hozamgörbe (megfigyelt) tényeit
	a modell faktorai értelmezhetők súlyként, meredekségként és görbületként
	lineáris módszerekkel becsülhető
Hátrány	nem valóság, hogy az exponenciális késleltetés konstans az időtávon
	ezzel sem írható le minden lehetséges hozamgörbe alak

8. ábra A Diebold-Li modell előnyei és hátrányai

A 8. ábra a Diebold-Li modell előnyeit és hátrányait foglalja össze. Mind a Nelson-Siegel, mind annak speciális változata a Diebold-Li modell sem képesek leírni az összes empirikusan megfigyelhető hozamgörbe alakot, ezért további paraméterek lehetnek szükségesek a görbe rugalmasabbá tételéhez. További faktorok használatával a 9. ábra modelljeit¹² kaphatjuk. Habár ezek sem használnak sokkal több paramétert, maga a becslési eljárás a nem-linearitás miatt jóval bonyolultabbá válik (főleg két exponenciális késleltetésnél).

Modell	Fő jellemző	Becsülendő paraméterek
Diebold-Li	fix exponenciális késleltetés	$\beta_{t,1} \beta_{t,2} \beta_{t,3}$
Nelson-Siegel		$\beta_{t,1} \beta_{t,2} \beta_{t,3} \lambda_{t,1}$
Björk és Christensen	második meredekség faktor eltérő súllyal	$\beta_{t,1} \beta_{t,2} \beta_{t,3} \beta_{t,4} \lambda_{t,1}$
Bliss	a meredekség és a görbület esetén eltérő exponenciális késleltetés	$\beta_{t,1} \beta_{t,2} \beta_{t,3} \lambda_{t,1} \lambda_{t,2}$
Svensson	új görbület faktor eltérő exponenciális késleltetéssel, megegyező súllyal	$\beta_{t,1} \beta_{t,2} \beta_{t,3} \beta_{t,4} \lambda_{t,1} \lambda_{t,2}$
Módosított Svensson	a két görbület eltérő súllyal	$\beta_{t,1} \beta_{t,2} \beta_{t,3} \beta_{t,4} \lambda_{t,1} \lambda_{t,2}$

9. ábra A Nelson-Siegel modell és különböző kiterjesztései

2.4 A görbeillesztés folyamata

A következő felsorolás a statikus (és az azokból származtatott dinamikus) görbeillesztés folyamatának lépéseit foglalja össze a lehetőségek rendszerezésével együtt (egyes itt szereplő részek az empirikus vizsgálatnál kerülnek kibontásra).

- a piaci középárfolyamok kiszámítása a megfigyelt vételi és eladási árfolyamokból (diszkontkincstárjegy és fix kamatozású államkötvény)
- az illeszteni kívánt görbe kiválasztása
 - diszkontgörbe
 - hozamgörbe
 - forwardgörbe
- a bázisfüggvény alakjának megválasztása
 - polinomiális
 - spline
 - harmadfokú
 - exponenciális
 - simított spline
 - exponenciális
- a minimalizálandó célfüggvény meghatározása
 - a hiba definiálása
 - a becsült és megfigyelt középárfolyamok eltérése

¹² M. De Pooter: Examining the Nelson-Siegel class of term structure models. Tinbergen Institute Discussion Papers. Tinbergen Institute, 2007.

- a becsült és megfigyelt lejáratig számított hozamok eltérése
 - a becsült középárfolyamoknak a megfigyelt bid-ask spreadtől való eltérése
- a hiba számítása
 - abszolút
 - négyzetes
- a súlyozás kiválasztás
 - súlyozatlan
 - árfolyam
 - középárfolyam
 - bid-ask spread alapú
 - idő alapú
 - hátralévő futamidő
 - (módosított) duration
 - benchmark/nem benchmark alapú
- büntetőfüggvény szükségességének eldöntése
- az optimalizálás előkészítése
 - az optimalizálandó paraméterek kiválasztása
 - csomópontok száma és helye, a bázisfüggvények súlyai
 - faktorsúlyok, exponenciális késleltetés
 - az optimalizálandó paraméterekre vonatkozó kezdőértékek megadása
 - globális
 - lokális, az előző becslésből származtatva
 - az optimalizálandó paraméterekre vonatkozó korlátok megadása
 - önkényesen
 - múltbeli eredmények alapján
 - értékadás a nem optimalizálandó paramétereknek
 - csomópontok száma és helye
 - exponenciális késleltetés
 - a módszer kiválasztása
- az optimalizálás elvégzése és a kapott eredmények kiértékelése

2.5 A külföldi adósságkezelők és jegybankok által alkalmazott hozamgörbe-modellek

A külföldi jegybankok gyakorlatában legelterjedtebb a simított spline és Svensson modellek használata, ahogy az 10. ábra is mutatja. Megoszlik azonban, hogy a súlyozott árfolyameltérések vagy pedig a lejáratig számított hozamok eltérését minimalizálják-e. Az adósságkezelők a hozamgörbe empirikus leírására jellemzően a Nelson-Siegel modellt használják.

Központi Bank	Becslési módszer	Minimalizált hiba
Belgium	Svensson vagy Nelson-Siegel	súlyozott ár
Egyesült Királyság	simított spline (VRP)	hozam
Finnország	Nelson-Siegel	súlyozott ár
Franciaország	Svensson vagy Nelson-Siegel	súlyozott ár
Japán	simított spline	árak
Kanada	ML exponenciális spline	súlyozott ár
Németország	Svensson	hozam
Norvégia	Svensson	hozam
Olaszország	Nelson-Siegel	súlyozott ár
Spanyolország (-1995)	Nelson-Siegel	árak
Spanyolország (1995-)	Svensson	súlyozott ár
Svájc	Svensson	hozam
Svédország	simított spline vagy Svensson	hozam
USA (kincstárjegy)	simított spline	súlyozott ár
USA (kötvény)	simított spline	árak

10. ábra A külföldi jegybankok gyakorlata¹³

Az előzetes módszertani áttekintés és a külföldi jegybankok gyakorlata alapján a Nelson-Siegel modell tűnik a legjobb választásnak a magyar hozamgörbe becslésére, ezt a következő fejezetben szereplő empirikus eredmények is alátámasztják. A magyar adatokon végzett elemzést modellenként végeztük, azonban a modellspecifikus elemzési lehetőségeken kívül azok összehasonlítására is tekintettel voltunk.

¹³ Bank for International Settlements (BIS): Zero-coupon yield curves: Technical documentation. BIS Papers, 25, 2005.

3 A kapott eredmények bemutatása

A hozamgörbe becslése a 2002.01.01. és 2014.06.30. közti időszakban a forint állampapírok legjobb vételi és eladási árfolyamaiból számított középárfolyamok alapján történt. Az állampapírok számított árfolyamát a

$$\hat{P}_i(t, r(t, t_{i,j})) = \sum_{j=1}^n c_{i,j} e^{-r(t, t_{i,j}) \frac{t_{i,j}}{365}}$$

képlet határozta meg, azaz az i . papír becsült árfolyama a t időpillanatban a $c_{i,j}$ pénzáramlások jelenértékeinek összegeként adódott. A képletben az idő $(t, t_{i,j})$ mértékegysége nap, az alkalmazott kamatkonvenció a diszkontkincstárjegyek és az államkötvények esetén is $\frac{ACT}{365}$ volt (a számítások egyszerűsítése érdekében). Ez kissé torzítja az eredményeket (az ACT/360-as konvenciót alkalmazó diszkontkincstárjegyek esetén 0,0038%-os hibát okoz), de a modellek sajátosságai e feltevés mellett is vizsgálhatók. A későbbiekben a valós kamatkonvenció használatával is elkészítjük a számításokat. Az $r(t, t_{i,j})$ loghozamok becslésére három módszer vizsgálata történt meg részletesen: a harmadfokú spline, a Diebold-Li és a Nelson-Siegel modelleké. A becsléshez végig az R statisztikai program 'termstrc' programcsomagját használtuk¹⁴.

3.1 Harmadfokú spline

A harmadfokú spline módszer esetén a diszkontfüggvény közelítése a

$$d(t, t_{i,j}, \underline{\beta}) = 1 + \sum_{l=1}^n \beta_l g_l(t_{i,j})$$

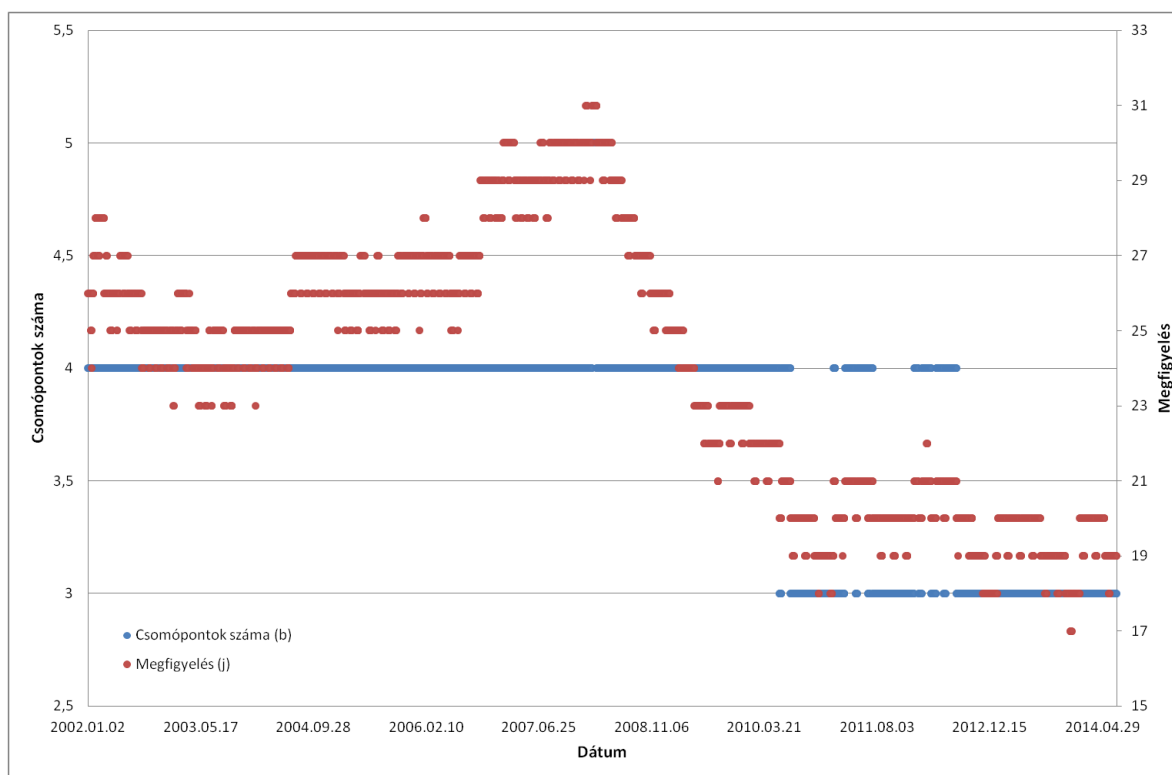
szakaszonként harmadfokú spline függvénnyel történik, ahol $g_i(\cdot)$ az i . bázisfüggvény (a használt bázisfüggvények pontos matematikai alakja alább kerül bemutatásra). Több szakasz alkalmazása jobb illeszkedést biztosít, de megnöveli a becslés idejét és a paraméterek (súlyok) számát is, így fontos ezek helyes megválasztása. A szakaszhatárok vagy csomópontok kiválasztása a következő módon történt. Számuk a bázisfüggvényekénél eggyel kevesebb, a legkisebb csomópont a 0, míg a legnagyobb a leghosszabb lejárát. A bázisfüggvények n száma a megfigyelt állampapíradatok gyökének egészrészeként adódik, a szakirodalomban használt hüvelykujj szabálynak megfelelően¹⁵ (különben bonyolult és időigényes optimalizálási feladatot eredményezne a csomópontok számának meghatározása). A köztes pontok kiválasztása ezután úgy történt, hogy az egyes intervallumokba megközelítőleg ugyanannyi megfigyelés essen. Így a csomópontok száma (11. ábra) és helye (12. ábra) a lenti ábráknak megfelelően alakult.

A válságot követően megváltozott az állampapírok kibocsátásának gyakorlata, kevesebb számú papír van és így kevesebbre van árjegyzés is, ahogy a 11. ábra is mutatja. Sok megfigyelés esetén a becsült hozamgörbe pontosabbá válhat, ugyanakkor a kapott paraméterek volatilisabbak lesznek, így pontatlanabb az előrejelzésük. Kevés megfigyelés esetén éppen ellentétes hatás figyelhető meg, így szükséges a kettő közötti helyes arány megtalálása. A becslés során az összes napi adat felhasználásra került, célszerű lehet azonban

¹⁴ R. Ferstl és J. Hayden: Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc. Journal of Statistical Software, 36(1), 2010.

¹⁵ J.H. McCulloch: Measuring the term structure of interest rates. Journal of Business, 44(1):19, 1971.

a pontosabb becslés érdekében a legnagyobb hibákat eredményező megfigyelések kiszűrése, ha több modell szerint is ugyanazok a nagy hibát adó megfigyelések. Ezt el lehet végezni külön-külön mind a vizsgált időszakba eső 3113 napra egyedileg, vagy pedig kizárhatjuk egyes papírok minden adatát (erre még visszatérünk a 31. ábra kapcsán).



11. ábra A harmadfokú spline módszer csomópontjainak száma 2002.01.01. és 2014.06.30. között

A 11. ábra bemutatja, hogy a harmadfokú spline meghatározása szempontjából 2010 közepéig négy csomópont volt, míg ettől kezdődően jellemzően csak három. Mivel az ÁKK a napi zérókupon hozamgörbe becslése során négy csomópontot feltételez, így szükséges lehet ennek felülvizsgálata. Érdekes azonban figyelembe venni, hogy a szakaszok számának törése esetén a bázisfüggvények súlyai idősorosan a két időszakra csak külön-külön vizsgálhatók (igazából a csomópontok változó helye miatt amúgy is érdemes körültekintéssel kezelni egy idősoros elemzés eredményeit).

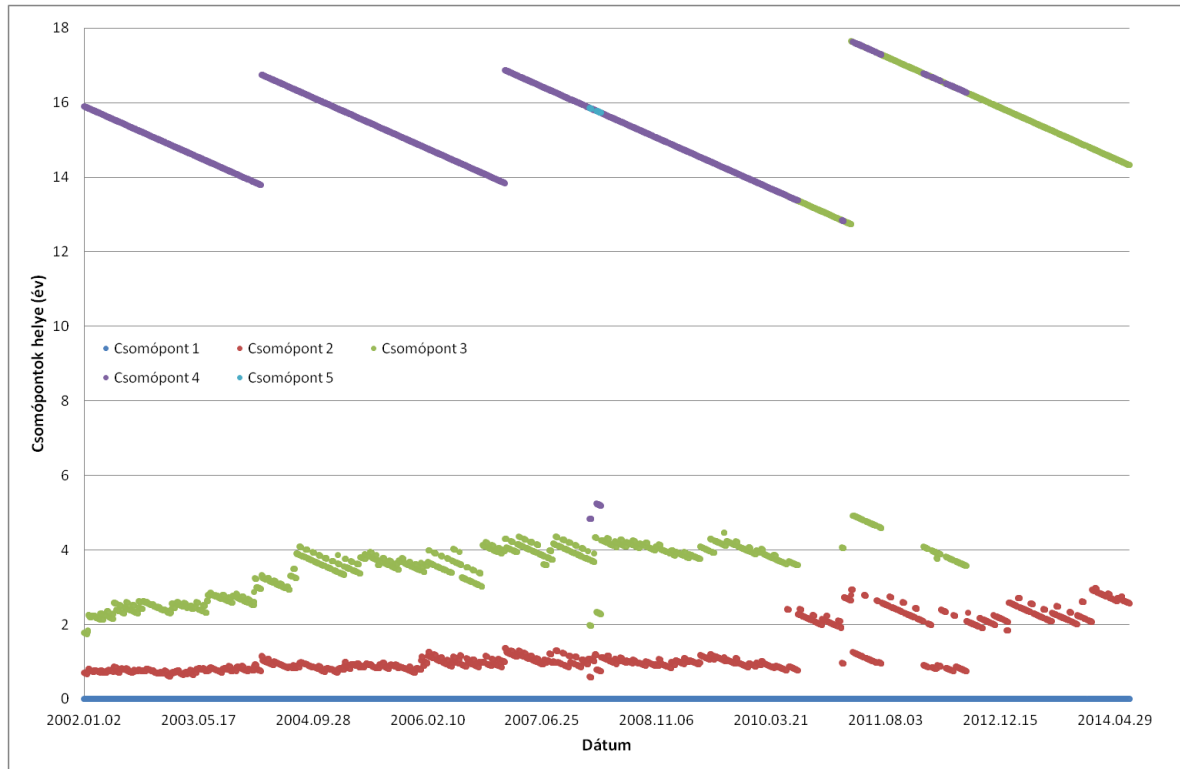
A szakaszhatárok helye alapján (12. ábra) 2010-ig az átlagos lejárat növekedése figyelhető meg (ugyanis a harmadik csomópont elhelyezkedése 2 évről 4 évre emelkedett), illetve három csomópont esetén az látható, hogy a megfigyelések fele 2-3 évnél rövidebb lejáratú. A leghosszabb lejárat (és így az utolsó szakaszhatár) pedig az új 15 éves papírok kibocsátását mutatja. Az ábra alapján a köztes csomópontok megválasztásánál érdemes lehet megvizsgálni, azt is, hogyha egy becsült függvény szerint változnak.

A bázisfüggvények a következő alakban írhatók fel, ahol $q_1, \dots, q_{n-1}$ a csomópontok sorozata (továbbá legyen $q_0 = 0$) :

$$g_{l=1 \dots (n-2)}(t) = \begin{cases} 0, & t < q_{l-1} \\ \frac{(t - q_{l-1})^3}{6(q_l - q_{l-1})}, & q_{l-1} \leq t < q_l \\ \frac{(q_l - q_{l-1})^2}{6} + \frac{(q_l - q_{l-1})(t - q_l)}{2} + \frac{(t - q_l)^2}{2} - \frac{(t - q_l)^3}{6(q_{l+1} - q_l)}, & q_l \leq t < q_{l+1} \\ (q_{l+1} - q_{l-1}) \left[\frac{(2q_{l+1} - q_l - q_{l-1})}{6} + \frac{(t - q_{l+1})}{2} \right], & q_{l+1} \leq t \end{cases}$$

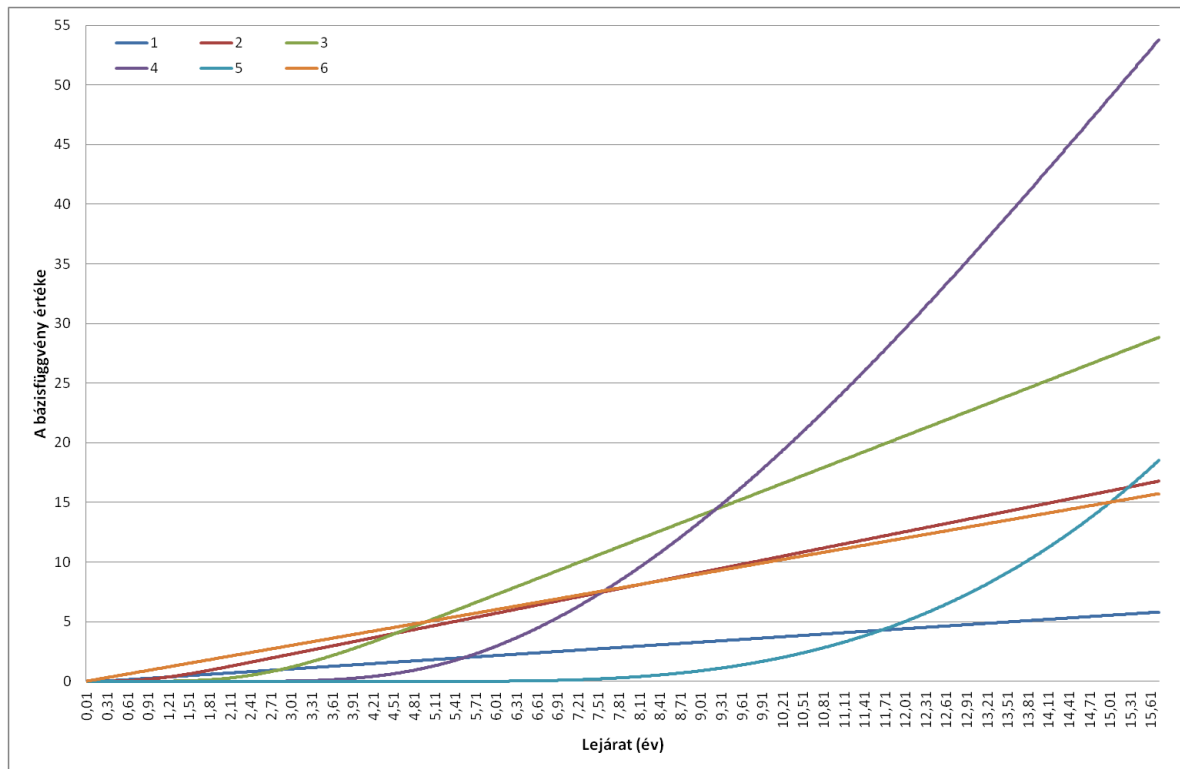
$$g_{n-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < q_{l-1} \\ \frac{(t - q_{n-1})^3}{6(q_l - q_{l-1})}, & q_{l-1} \leq t \end{cases}$$

$$g_n(t) = t.$$



12. ábra A harmadfokú spline módszer csomópontjainak helye 2002.01.01. és 2014.06.30. között

A 13. ábra a bázisfüggvényeket szemlélteti egy adott napra (2008.03.06.) vonatkozóan, melyen a csomópontok 0; 0,75; 2,28; 5,19; 15,73 évnél voltak. Látható, hogy az első, a második és az utolsó bázisfüggvény van jobban hatással a diszkontfüggvény, és így a hozamgörbe meredekségére azáltal, hogy szinte a teljes intervallumon nullától különböző, közel lineárisan növekvő értéket vesz fel. Minél nagyobb sorszámú a bázisfüggvény (kivéve az utolsót), annál nagyobb szerepe van a hozamgörbe görbületében, köszönhetően az egyre nagyobb intervallumon lévő harmadfokú függvényalaknak (tehát különösen a harmadik és negyedik súly esetén). Utóbbi annak köszönhető, hogy a magyar megfigyelések rövidtávon koncentrálnak, így a csomópontok közti differencia egyre nagyobb (ezt támasztja alá a 12. ábra is).



13. ábra Az egyes bázisfüggvények értéke 2008.03.06-án

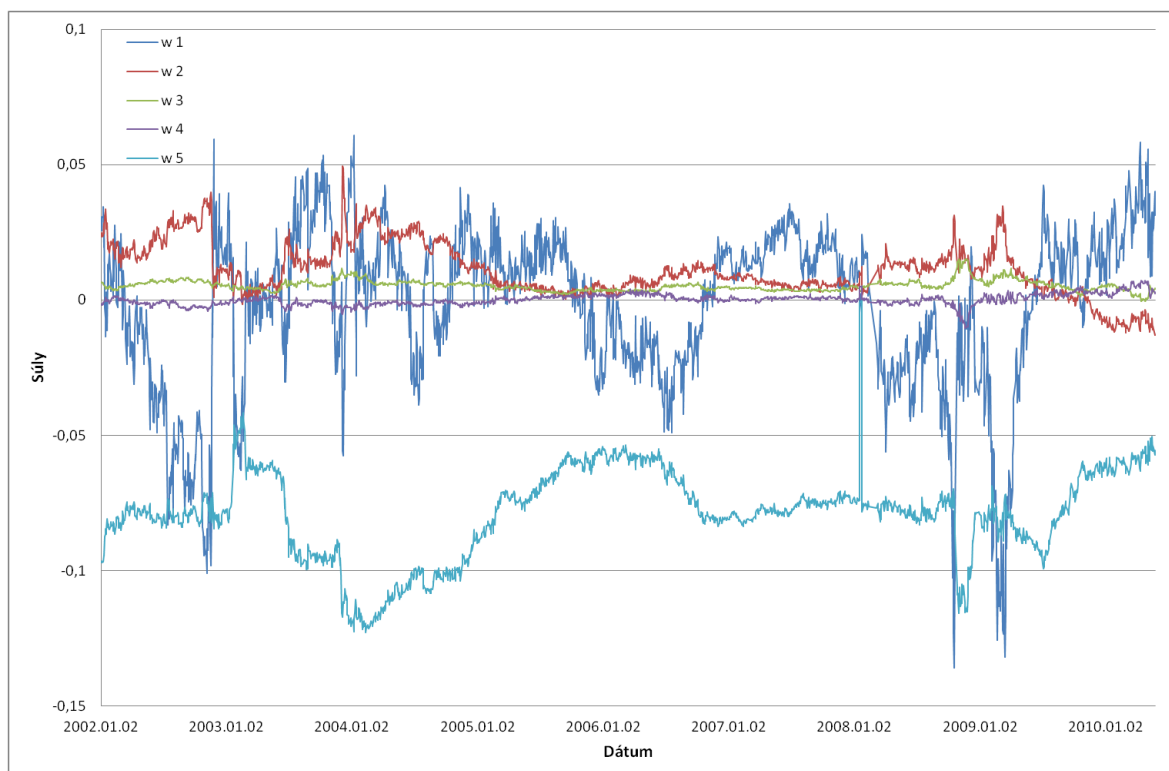
3.1.1 A kapott súlyok

A korábbiak szerint a diszkontfüggvény bázisfüggvények lineáris kombinációja, ahol a feladat a β_i súlyok meghatározása, ami történhet legkisebb négyzetek módszerével. Pontosabban, a

$$\underline{P} - \underline{1}^T \underline{C} = \beta_1 \underline{1}^T \underline{C} \cdot \underline{G}_1 + \dots + \beta_n \underline{1}^T \underline{C} \cdot \underline{G}_n + \epsilon$$

egyenlet alapján (ahol $\underline{P}$ a megfigyelt árfolyamokból és $\underline{1}$ egyesekből álló vektor, míg $\underline{C}$ a pénzáramlások és $\underline{G}_i$ az i . bázisfüggvény értékek mátrixa) lineáris regresszióval becsültük.

A 11. ábrán is látható elemzés alapján a vizsgált időszakot érdemes két részre bontani aszerint, hogy melyik intervallumban volt 4, illetve melyikben 3 csomópont. A következőkben a súlyokra kapott eredmények szerepelnek ezen két időszakra bontva (2010.05.26-ig, illetve 2012.07.19-et követően) úgy, hogy azokban végig 4, illetve 3 csomópont legyen.



14. ábra A bázisfüggvények súlyai 2002.01.01. és 2010. 05.26. között

Az első időszak (2002.01.01.-2010.05.26.) alatti bázisfüggvény súlyokat szemlélteti a 14. ábra. Ezen látható, hogy a két legvolatilisabb súly (a megváltozásokat tekintve is) az első és az ötödik, ezt támasztja alá a 15. ábra is. Ebből megfigyelhető továbbá, hogy a diszkontfüggvény görbületét leginkább meghatározó két súly (harmadik és negyedik) közel állandó az időszak során. A 14. ábra alapján további vizsgálati lehetőség, hogy a súlyok fejlődésének trendjeit (például az ötödik 2004 utáni emelkedése) mennyire határozzák meg a csomópontok elhelyezkedése.

w 1	w 2	w 3	w 4	w 5	delta w 1	delta w 2	delta w 3	delta w 4	delta w 5
2,9676	0,9647	0,1981	0,2047	1,6082	0,9436	0,1969	0,0521	0,0714	0,3228

15. ábra A 2002.01.01-2010.05.26. időszak becsült bázisfüggvény súlyainak és azok megváltozásainak szórása (*100)

Az egyes súlyok megváltozásai közötti kapcsolatból látható, hogy az inkább meredekségre (első, második, ötödik) és az inkább görbületre (harmadik, negyedik) hatók között erősebb, míg a két csoport között alacsonyabb korreláció mutatkozik (16. ábra). Ez két főkomponens jelenlétére is utalhat, amik értelmezhetőek lehetnek meredekségként és görbületként. Nincs minden lejáraton egyformán ható súly, így egyiket sem lehet azonosítani a hozamgörbe szintjével. Habár az előző megállapítások a diszkontfüggvény alakjára vonatkoznak, azok intuitíve igazak a hozamgörbére is.

	delta w 1	delta w 2	delta w 3	delta w 4	delta w 5
delta w 1	1,0000				
delta w 2	-0,8796	1,0000			
delta w 3	0,4610	-0,6091	1,0000		
delta w 4	-0,4036	0,5034	-0,8756	1,0000	
delta w 5	-0,6555	0,5453	-0,4786	0,4546	1,0000

16. ábra A 2002.01.01-2010.05.26. időszak becsült bázisfüggvény súlyok megváltozásainak korrelációja

A két időszak között váltakozó csomópontszám volt, így ott nem összehasonlíthatóak a napi eredmények. A 2012.07.19. és 2014.06.30. közti becslés hasonló eredményeit tartalmazzák a következő ábrák.



17. ábra A bázisfüggvények súlyai 2012.07.19. és 2014. 06.30. között

A 17. ábra alapján is az első és utolsó bázisfüggvény súlya a legvolatilisabb, megfigyelhető továbbá, hogy az utolsó bázisfüggvény súlya trendszerűen emelkedik. Ez közvetetten a hozamgörbe meredekebbé válását eredményezi, ez látható a 22. ábra hozamfelületén.

w 1	w 2	w 3	w 4	delta w 1	delta w 2	delta w 3	delta w 4
0,9538	0,1582	0,1378	1,6320	0,1425	0,0282	0,0379	0,0789

18. ábra A 2012.07.19-2014.06.30. időszak becslült bázisfüggvény súlyainak és azok megváltozásainak szórása (*100)

Az előzőekhez hasonlóan, az első és utolsó súly a legvolatilisabb az elmúlt két évet tekintve. Ha a megváltozásokat tekintjük, azaz így a negyedik súly alakulásából kiszűrjük az előbb említett trendet, akkor is ebben a két esetben tapasztalható a legnagyobb változékonyság, de már az első súlyé meghaladja az utolsóét. Ebben az időszakban is látható, hogy a meredekségre ható súlyok (első és negyedik) volatilisak, míg a görbületre hatók (második, harmadik) közel állandónak tekinthetők.

A megváltozások közti korrelációra is igazak a korábban elmondottak a 19. ábra alapján.

	delta w 1	delta w 2	delta w 3	delta w 4
delta w 1	1,0000			
delta w 2	-0,6398	1,0000		
delta w 3	0,2474	-0,7973	1,0000	
delta w 4	-0,7855	0,4681	-0,2888	1,0000

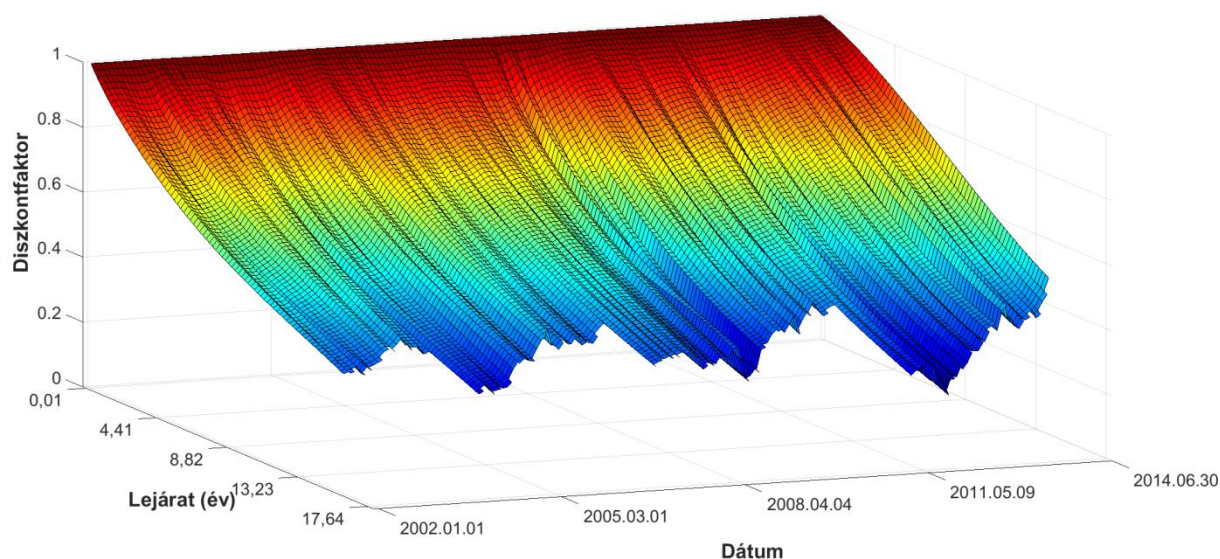
19. ábra A 2012.07.19-2014.06.30. időszak becslült bázisfüggvény súlyok megváltozásainak korrelációja

3.1.2 A diszkontfüggvény és hozamgörbe vizsgálata

A bázisfüggvények és azok súlyainak birtokában már ábrázolható a diszkontfüggvény a vizsgált időszakra. Így a 20. ábra alapján elmondható, hogy a becslésnél kapott diszkontfaktorok teljesítik az arbitrázsmentességhez elvárt feltételeket, azaz a diszkontfüggvény

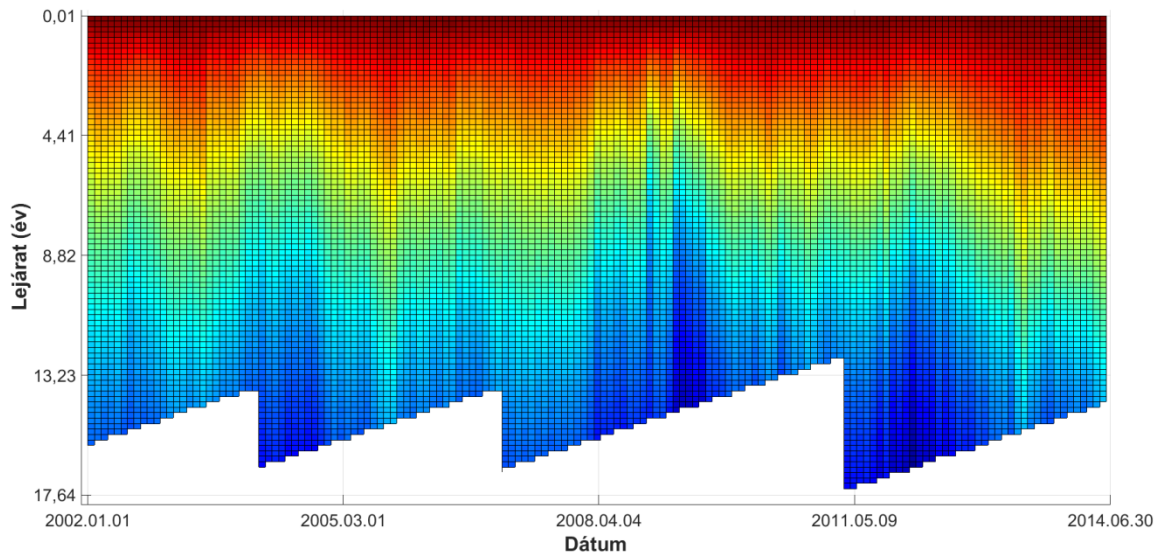
- az egyből indul,
- monoton csökken,
- és pozitív.

Ez persze nem meglepő annak fényében, hogy így definiáltuk a spline függvényeket, azonban megmutatja, hogy az alkalmazott numerikus eljárások ezt nem rontják el.



20. ábra A diszkontfüggvény alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között (harmadfokú spline)

A diszkontfüggvények napi alakulását még jobban szemlélteti a 21. ábra. Ezen megfigyelhetőek például a 2003-as, 2008-as és 2011-es állampapírpiazi zavarok az alacsonyabb diszkontfaktorokon keresztül (ami magasabb hozamokat indukál, 22. ábra). A görbe meredekségére lehet következtetni az egyenletesebb átmenetből, tehát például a 2007 eleji laposabb hozamgörbére, melyet a 22. ábra is megerősít.

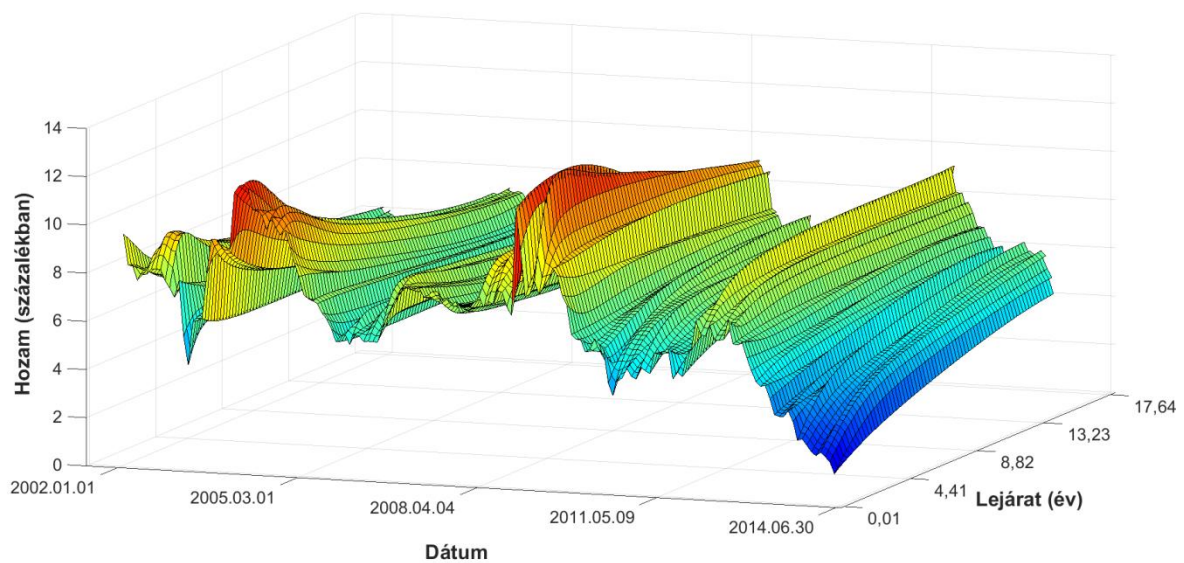


21. ábra A diszkontfüggvény alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között a harmadfokú spline módszer esetén 2

A hozamgörbe a diszkontfüggvényből az

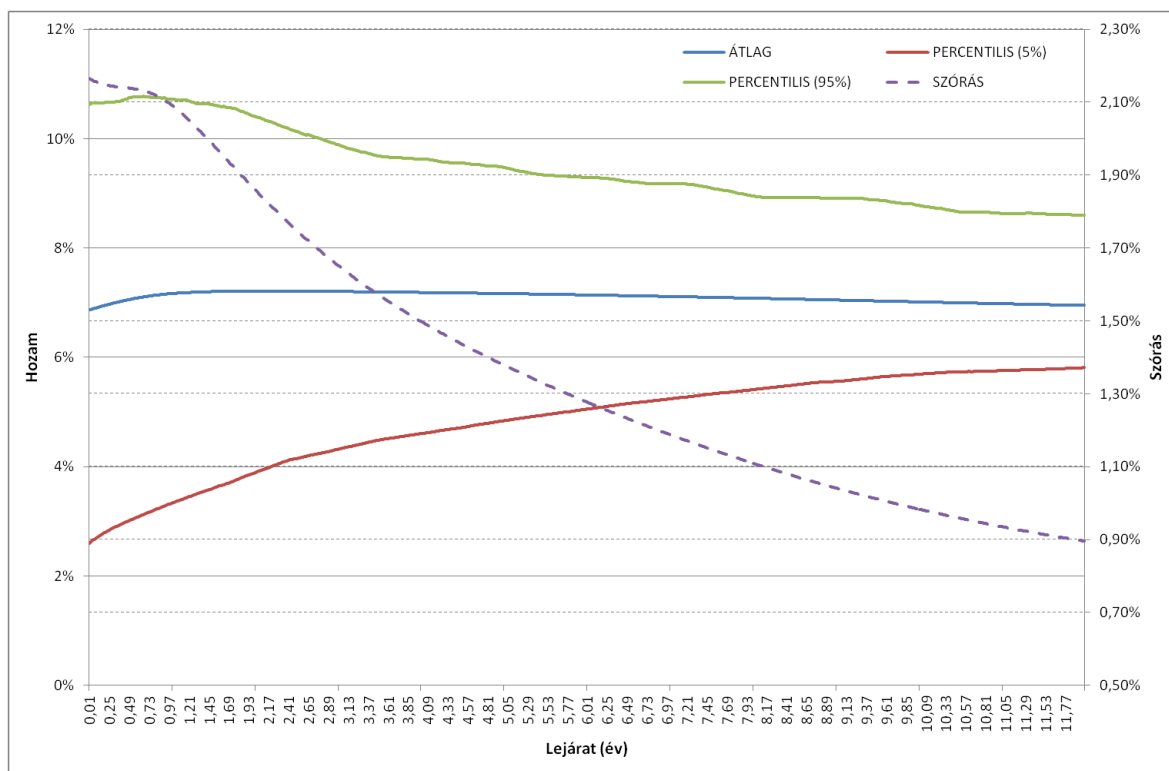
$$r(t, t_{i,j}) = \frac{-\ln d(t, t_{i,j}, \underline{\beta})}{t_{i,j}}$$

összefüggéssel számítható.



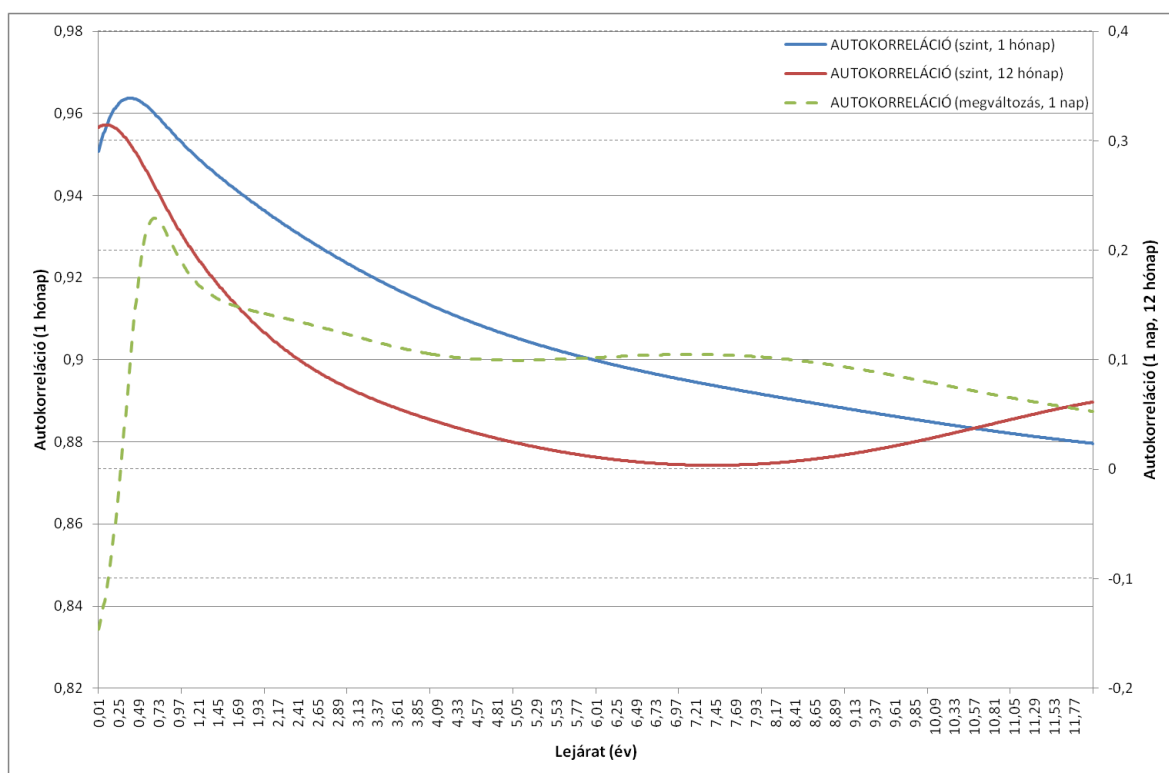
22. ábra A hozamgörbe alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között (harmadfokú spline)

Az így kapott hozamgörbe-felületet ábrázolja a 22. ábra. Ezen a korábbiakban említettek mellett látható az egyes időszakokban jellemző magyar hozamgörbe alakok sokfélesége. Ez azért lényeges, mert így a kiválasztandó modellnek a legkülönbözőbb alakokat (normál meredekségű, vízszintes, meredek, púpos, inverz) is elő kell tudnia állítani.



23. ábra A hozamgörbe statisztikai mutatói (harmadfokú spline)

A 23. ábra bemutatja a harmadfokú spline-nal kapott hozamgörbe stilizált tényeit. Eszerint az átlagos hozamgörbe enyhén púpos, szinte lapos. A hozamgörbe a rövid oldalon volatilisabb, a lejáráttal monoton csökken. Az 5%-os (alsó határ) és 95%-os (felső határ) percentilis pedig szűkülő sávot határoznak meg.



24. ábra Az 1 és 12 hónapos autokorreláció a különböző lejáratú hozamok esetén (harmadfokú spline)

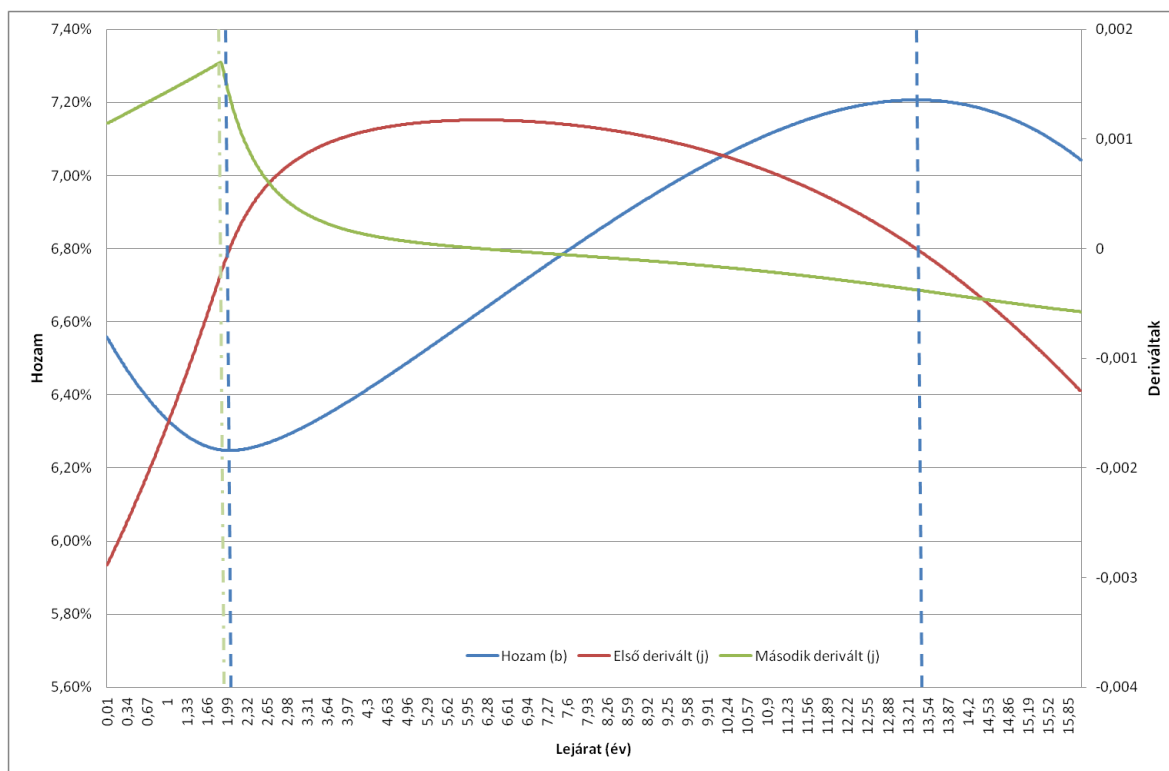
A hozamok autokorrelációjának vizsgálatát 1 és 12 hónapra végeztük el (24. ábra). Ez alapján magas korreláció tapasztalható az 1 hónappal korábbi és az aktuális hozamszintek között, és ez a kapcsolat kismértékben, de a lejáráttal csökken. Az egy évvel eltolt hozamszintek közötti szorosság kismértékű, és hosszútávon magasabb, mint középtávon. Az egymást követő hozamváltozások között rövidtávon alacsony, negatív kapcsolat van, ezután a lejáráttal emelkedik és pozitív lesz, majd körülbelül a fél éves lejáráttól csökken.

Ha megvizsgáljuk a benchmark lejáratok (3 és 6 hónap; 1,3,5 és 10 év; 15 év esetén nincs mindig adat) mellett a kapott hozamok megváltozásai közti korrelációkat, akkor látható (25. ábra), hogy az egymáshoz közeli lejáratok hozamváltozásai mozognak együtt. Legerősebb a kapcsolat a 3 és 5 éves hozamváltozások között tapasztalható (azaz középtávon a hozamgörbe kevésbé volatilis, mint rövidtávon), meglepő eredmény továbbá a 3 hónapos és 1 éves változások közti alacsony korreláció. Ez annak a következménye is lehet, hogy az 1 éves papírra már kevesebb hatása van az MNB alapkamatnak.

	0,25	0,5	1	3	5	10
0,25	1,0000					
0,5	0,8655	1,0000				
1	0,3595	0,7711	1,0000			
3	0,2927	0,5960	0,8236	1,0000		
5	0,3540	0,5633	0,6848	0,9551	1,0000	
10	0,1620	0,3917	0,5907	0,7896	0,8557	1,0000

25. ábra A hozamok változásai közti korreláció különböző lejáratok esetén

A szakaszhatárokon való illeszkedés a görbe folytonosságát, az első és második derivált folytonossága pedig a simaságát biztosítja (ezek a spline függvények jellemzői). A 26. ábra alapján, mely a 2012.09.27-ei hozamgörbét és az első két deriváltat ábrázolja, több következtetést lehet levonni. Egyrészt teljesülnek a feltételek, azaz a hozamgörbe illeszkedik a szakaszhatárokon (0; 1,90; 16,08 évnél), ehhez kellene a bázisfüggvényekben a csomópontok helyétől függő konstans tagok. Az első és második derivált is folytonos (a harmadik már nem lenne a második csomópontnál lévő törés miatt, ezt a zöld szaggatott vonal jelzi), ez adja a hozamgörbe simaságát. Másrészt, ahogy a kék szaggatott vonalak külön kiemelik, ahol a derivált nulla (és a második derivált nem nulla), ott lokális szélsőértékek vannak. Ezek adják a görbe púposágát, illetve U-alakját. A Nelson-Siegel modell esetén az úgynevezett exponenciális késleltetés paraméter meghatározásánál fontos szerepe lesz ezek helyének, így érdemes részletesen is megvizsgálni a szélsőértékeket.



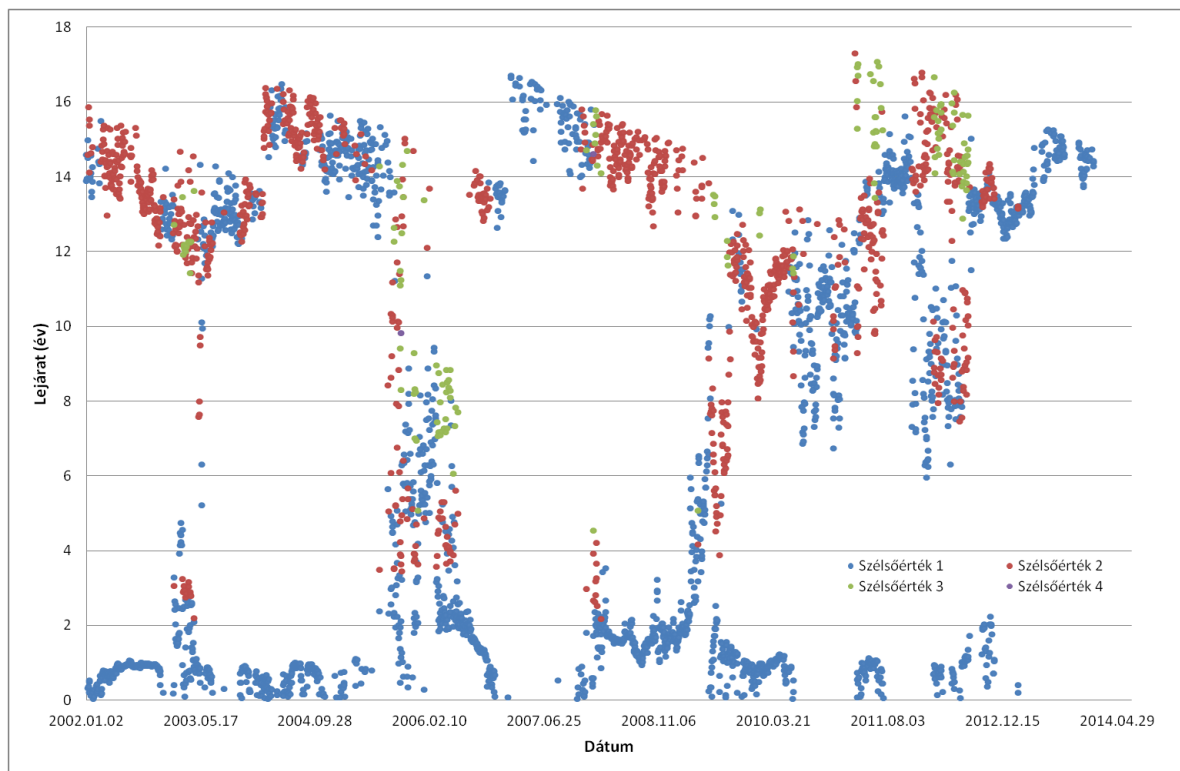
26. ábra A hozamgörbe és annak első, illetve második deriváltja 2012.09.27-én

A 27. ábra mutatja be, hogy a vizsgált időszakban az egyes napokon hány szélsőérték volt, ez alapján is lehet következtetni a görbe alakjára. Az, hogy a derivált sehol sem 0 azt jelenti, hogy a hozamgörbe szigorúan monoton növekvő (normál) vagy csökkenő (inverz), az egy vagy két szélsőérték esetén a monoton szakaszok váltakoznak (púpos, U alakú vagy S alakú). A három és négy szélsőérték tipikusan azt jelenti, hogy egyes szélsőértékek környezetében az első derivált 0 közeli (vízszintes).

Szélsőértékek száma	0	1	2	3	4
Darab	471	1460	1033	147	2

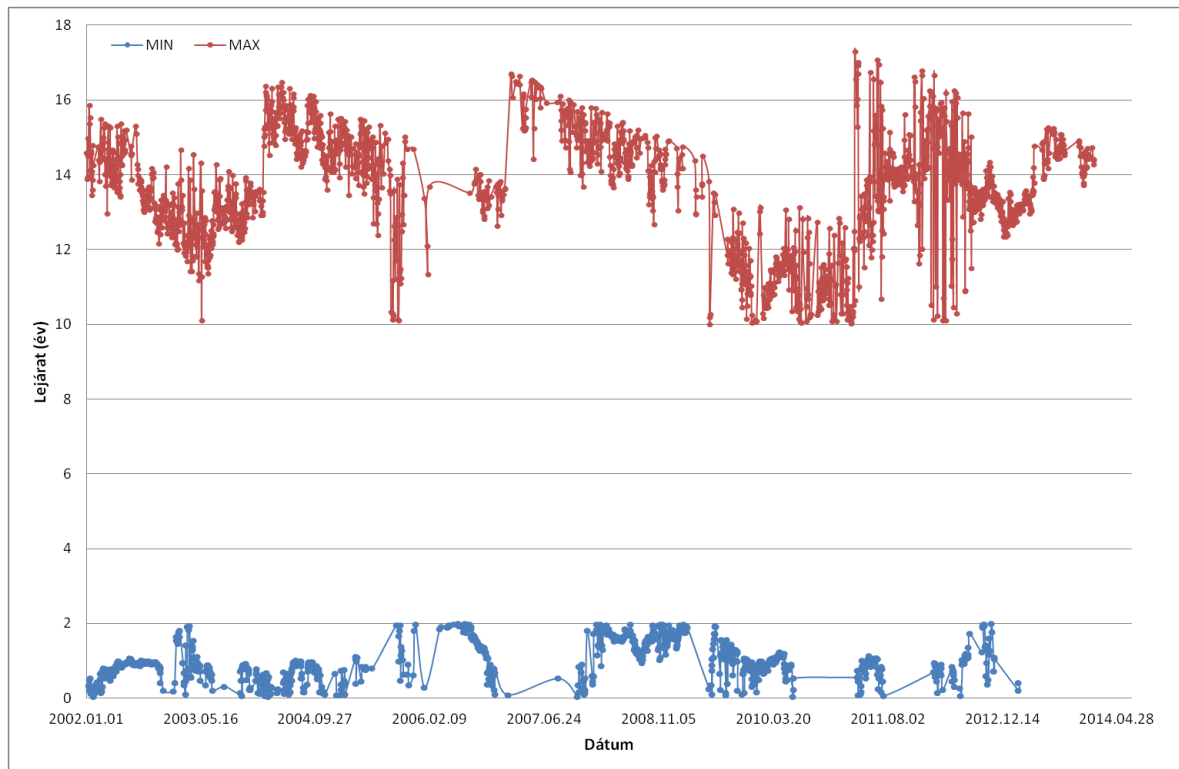
27. ábra A napi szélsőértékek száma 2002.01.01. és 2014.06.30. között

A szélsőértékek helye alapján megfigyelhető, hogy az adott napon legrövidebb lejáratú (ha van egyáltalán) szélsőérték rövid időtávon is ingadozik a 2 éven belüli és 10 éven túli lejárat között (ez például 2012 második felére igaz). Ezenkívül, a hosszú lejáratra eső szélsőértékek jellemzően a maximális csomópontnak megfelelően csökkennek. A 28. ábra alapján látható továbbá, hogy 2006-ban a három szélsőérték elég közel esett egymáshoz (2, 4 és 6 év), így akkor vízszintes volt a hozamgörbe (a 22. ábra is ezt erősíti meg).



28. ábra Lokális szélsőértékek az első derivált alapján 2002.01.01. és 2014.06.30. között

A 28. ábra alapján egyértelműen látszik, hogy a vizsgált időtáv alatt nem határozható meg olyan függvény, mely valamelyik szélsőértéknek megfelelően írná le a fejlődését. Azonban csak a rövid vagy hosszú távot tekintve, a szélsőértékek önkényes szűrésével, két folyamat is adódik (29. ábra), melyek becslésével egyes szélsőértékek a hiányzó pontokban meghatározhatók, illetve előrejelezhetők. Ezzel korlátokat adhatunk meg a Nelson-Siegel modell esetén az exponenciális késleltetés becslésére, azonban el kell döntenünk, hogy a rövid vagy a hosszú távot vesszük-e figyelembe (a Svensson modellnél egyszerre használható a kettő a két paraméter miatt). Továbbá vizsgálni kell azt is, hogy a túl rövid, vagy túl hosszú szélsőértékek a harmadfokú spline modell módszertani következményei-e.



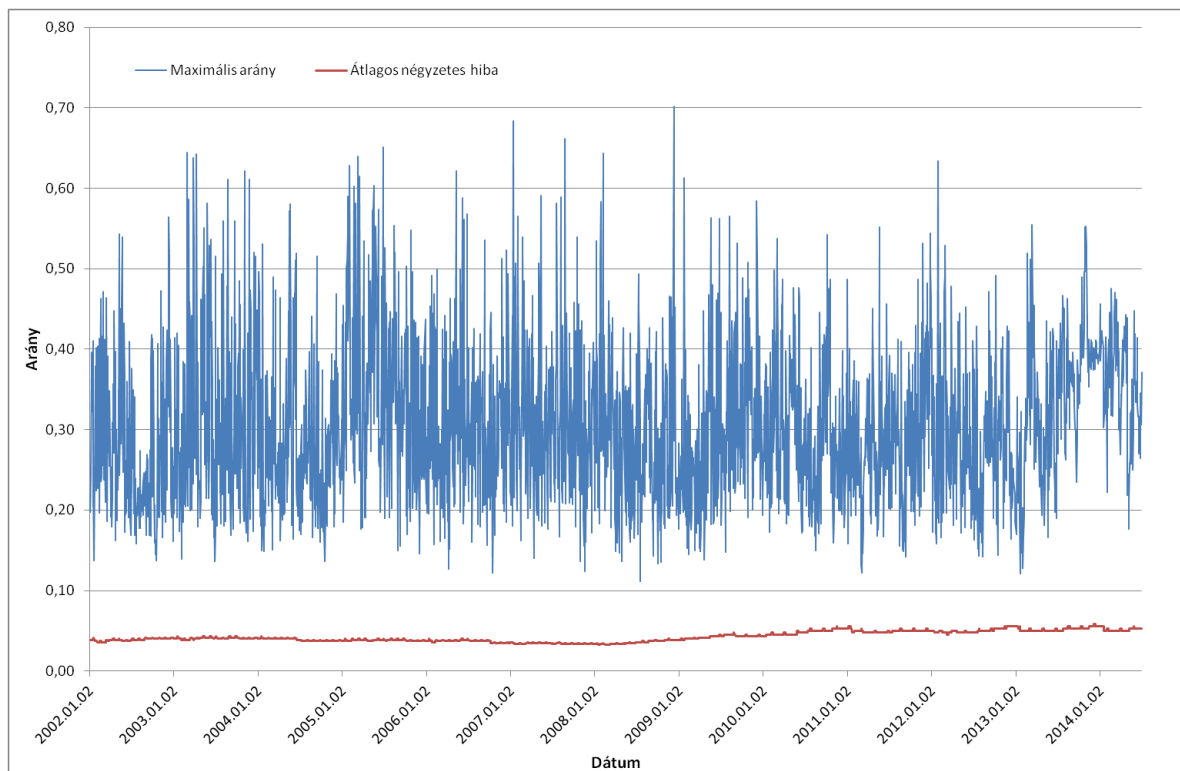
29. ábra Lokális szélsőértékek rövid és hosszú lejárat esetén 2002.01.01. és 2014.06.30. között

3.1.3 Az illesztés hibája

A modell eredményességét meghatározó egyik mutatószám az átlagos négyzetes eltérés gyöke (RMSE, Root-Mean-Square Error). Ez a megfigyelt és becsült árfolyamok közti eltérések négyzeteit átlagolja, majd veszi a gyökét, azaz

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2},$$

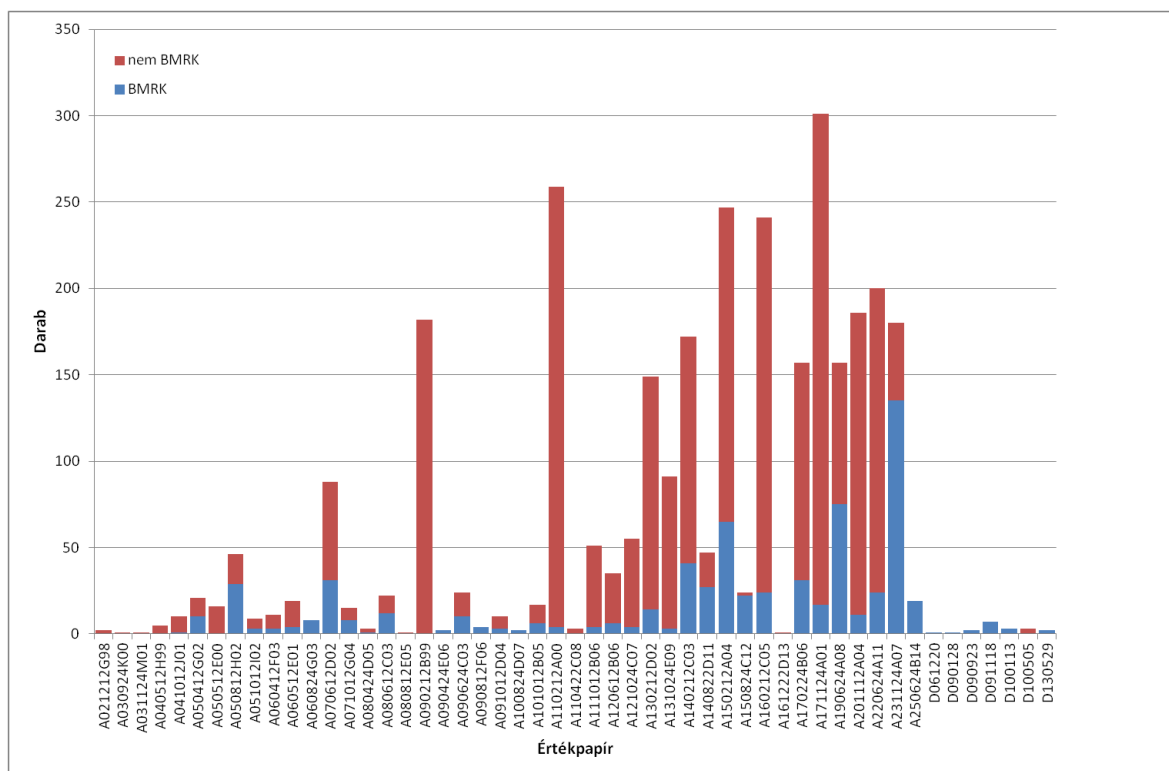
ahol N az adott napi megfigyelések száma, P_i pedig a megfigyelt árfolyam. A vizsgálat során ezt a mutatót használtuk az egyes modellek illeszkedésének összehasonlítására, ugyanis egyszerűen használható és a szakirodalomban a leginkább elterjedt. Adott napra a nagy eltéréseket okozó megfigyelések kiszűrésével javítható a hozamgörbe becslése is, a következőkben az ezzel kapcsolatos eredményeket tekintjük át röviden.



30. ábra A maximális négyzetes hiba aránya a teljes négyzetes hibához viszonyítva (harmadfokú spline)

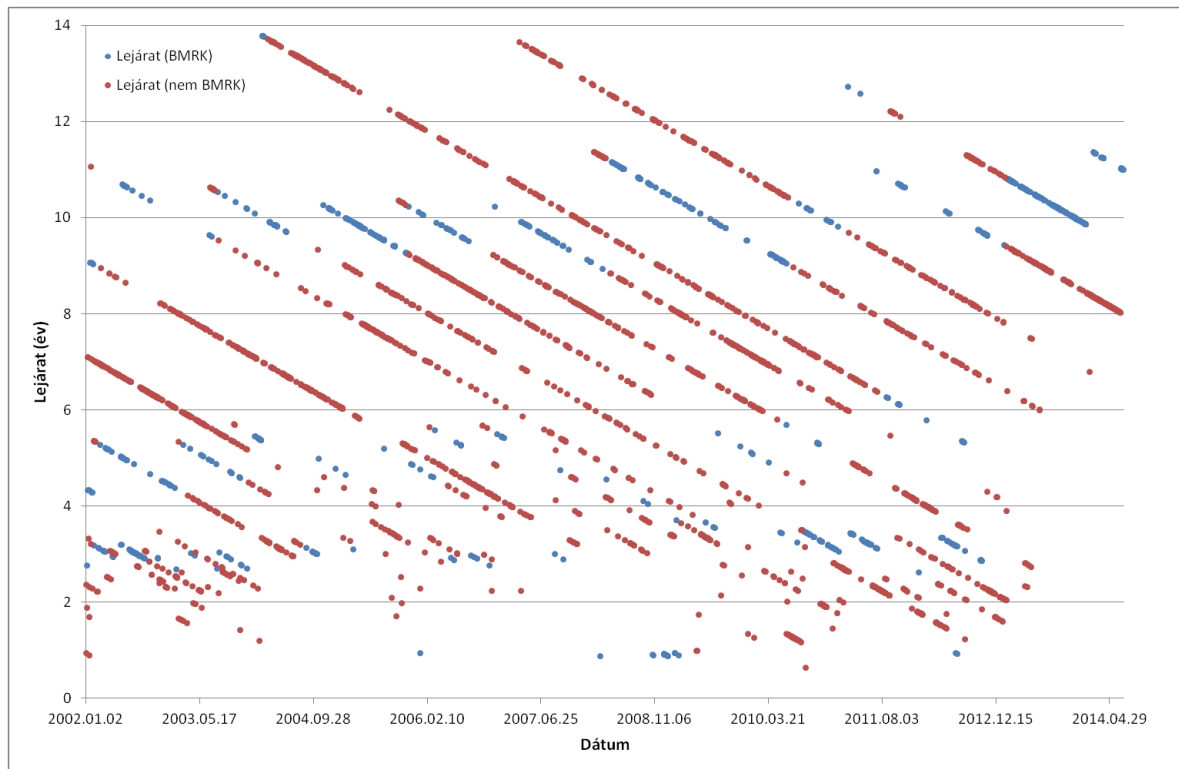
Először megvizsgáltuk, hogy mely napokon volt valamelyik papír négyzetes hibája kiugró a többi megfigyeléshez képest. Ezért ábrázoltuk a maximális négyzetes hiba arányát¹⁶, illetve az átlagos négyzetes hibát is (ez az RMSE mutató négyzete), ahogy a 30. ábra mutatja. Ezen látható, hogy a maximális négyzetes hiba aránya 20 és 50 százalék körül ingadozik, az előlotti érték esetén érdemes megfontolni a hibát eredményező papír kiszűrését a megfigyelések közül.

¹⁶ $\frac{\max_i (P_i - \hat{P}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2}$



31. ábra A maximális négyzetes hibák darabszáma különböző papírok esetén (harmadfokú spline)

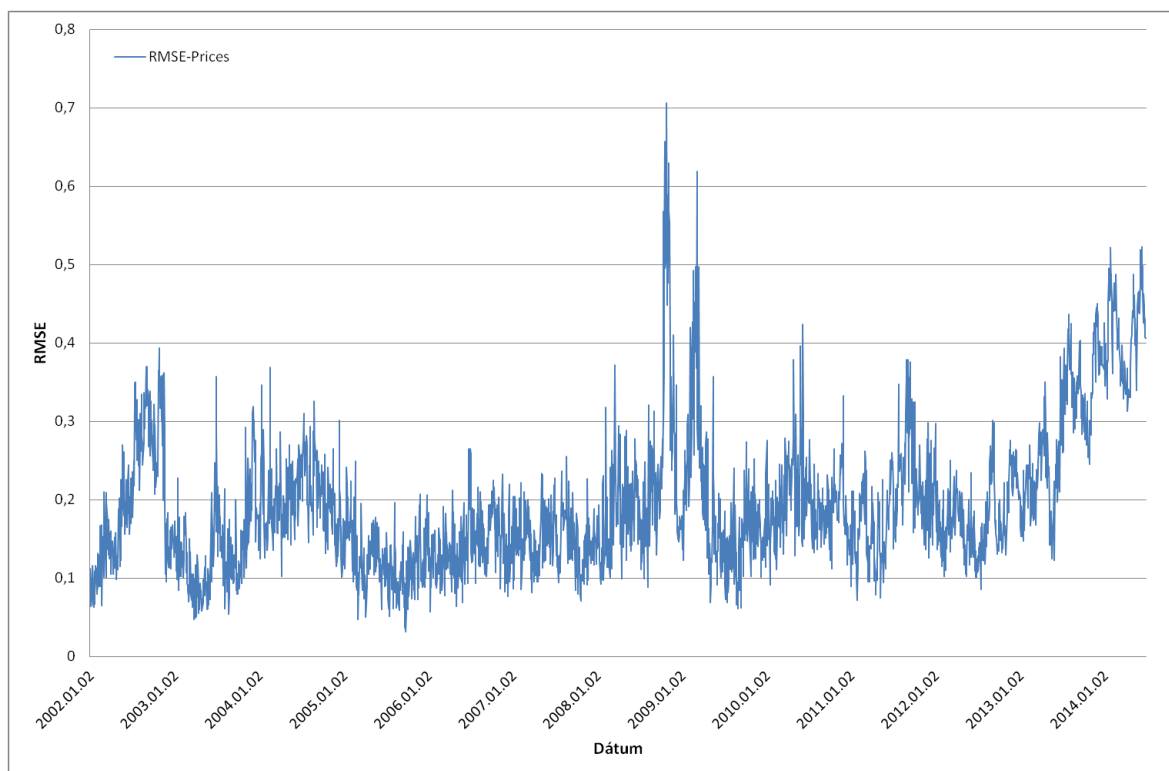
A 31. ábra bemutatja, hogy az egyes értékpapírok hányszor adták a legnagyobb négyzetes hibát a vizsgált időszak folyamán. Az egyes oszlopokat megbontottuk aszerint, hogy az adott napon a papír benchmark volt-e vagy sem. Ez alapján látható, hogyha nem naponta szeretnénk kiszűrni megfigyeléseket, hanem a teljes időszakra adott papírokat, akkor jó választás a 2009/B, 2011/A, 2017/A. Ezek mellett, hogy sokszor adják a legnagyobb hibát a legtöbb esetben nem benchmark papírok. A lejárat szerinti megoszlást egy későbbi, a 118. ábra tartalmazza.



32. ábra A maximális négyzetes hibákhoz tartozó állampapírok lejáratát (harmadfokú spline)

A 32. ábra a maximális négyzetes hibákhoz tartozó lejáratokat szemlélteti. Ezen megfigyelhetők az előző ábra kiugró értékű állampapírai a csökkenő lejáratukon keresztül. Látható, hogy nem jellemző egy hosszabb időszakon keresztül, hogy ugyanaz a papír adná a maximális hibát, általában több papír váltakozik.

Az RMSE mutatónak nem is a konkrét értéke a lényeges, hanem az időbeli alakulása és a többi modellhez viszonyított relatív értéke. Az időbeli alakulást tekintve többféle következtetést lehet levonni. Egyrészt, a kiugró értékek adathibára utalhatnak, ilyen nincs a vizsgált időszakban a 33. ábra alapján. Másrészt tartós kiugrások piaci anomáliákat jeleznek, melyek valamilyen gazdasági esemény következményei, ilyen volt például a 2008 végi (és 2009 elején újra felerősödő) válság. Harmadrészt, tartós trendszerű fejlődés a nem megfelelő modellt vagy a megfigyelésekben lévő mérési hibát jelzi, ilyen tapasztalható jelen esetben a vizsgált időszak végén.



33. ábra Az RMSE alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között

Ha a benchmark papírok alul- vagy felülbecslését vizsgáljuk a 34. ábra alapján, akkor elmondhatjuk, hogy rövidtávon tipikusan felülbecsüljük (ez az 1-es sor) az árfolyamokat. Ez modellbeli tulajdonságot jelezhet, vagy ha más modelleknél is hasonló eredményt kapunk, akkor azt, hogy a piac többnyire alulárzza a papírt. Ez alól kivétel az 1 éves kincstárjegy, ahol jellemzően alulbecsüljük a piacon megfigyelt középárfolyamot. Hosszabb lejáratokon a közel megegyező valószínűség a becslés hibájának véletlenszerűségére utal.

$\text{Prob}(X_t=x)$	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1	18,05%	18,08%	58,08%	32,30%	46,59%	49,10%	47,39%
1	81,95%	81,92%	41,92%	67,70%	53,41%	50,90%	52,61%

34. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (harmadfokú spline)

A vételi és eladási árfolyamokat figyelembe vevő elemzést később, a Nelson-Siegel modellnél szerepeltetjük a 83. ábra kapcsán. **Összességében elmondható, hogy habár a harmadfokú spline módszer jó illeszkedést ad, a kapott faktorok idősoros vizsgálata nem lehetséges, így ez a modell nem javasolt önmagában az optimális portfóliómodellben a hozamgörbe modellezésére.**

3.2 A Nelson-Siegel modellcsalád

A Nelson-Siegel modellcsaládból a Diebold-Li, Nelson-Siegel, Svensson és módosított Svensson modelleket vontuk be az elemzési körbe. Először bemutatjuk az optimalizálásnál alkalmazott módszertant, majd a kapott eredményeket. Mind az elméleti, mind a gyakorlati

megvalósítás esetén az R statisztikai program 'termstrc' csomagját és annak leírását¹⁷ használtuk.

A használt célfüggvény az egyes papírok súlyozott négyzetes (másik lehetőség az abszolút lenne) árazási hibáinak összege, ahol az egyes súlyokat a duration reciproka¹⁸ adja. Ez matematikailag a következő formulát jelenti (a $\underline{\beta}$ és a $\underline{\lambda}$ vektorok elemszámát a 9. ábra határozza meg):

$$F(\underline{\beta}, \underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^N w_i (P_i - \hat{P}_i)^2.$$

Elképzelhetőek más súlyozások is, például vagy a módosított duration, vagy a bid-ask spread vagy a hátralévő futamidő reciproka. A lejárat és duration alapú súlyozást az indokolja, hogy rövidtávon több megfigyelés áll rendelkezésre, illetve a hosszú futamidejű kötvények árfolyamában nagyobb volatilitás tapasztalható, így a közeli lejáratokra érdemes nagyobb súlyt helyezni. A bid-ask spread reciproka esetén a nagyobb likviditású papírokra kerül nagyobb súly, hazánkban azonban az elsődleges forgalmazók a vételi és eladási árjegyzései között rögzített a maximális bid-ask spread, így az nem csupán piaci információkat tartalmaz. A likviditást ragadja meg az is, ha a benchmark kötvényekre helyezünk nagyobb súlyt, ekkor azonban el kell döntenünk az alkalmazott súlyokat.

Az optimalizálási feladat a célfüggvény minimalizálása, formálisan

$$\min_{\underline{\beta}, \underline{\lambda}} F(\underline{\beta}, \underline{\lambda}),$$

azaz a becsülendő paraméterek (9. ábra) azon értékeinek megtalálása, amelyek mellett az $F(\underline{\beta}, \underline{\lambda})$ függvény minimális.

Ahogy korábban is írtuk, β_1 tekinthető a hosszú lejáratú hozamnak, így szükséges feltenni, hogy $\beta_1 > 0$. Hasonlóan, a rövid hozamtól is elvárjuk, hogy pozitív legyen, így $\beta_1 + \beta_2 > 0$ (manapság vannak példák rá, hogy ez nem igaz, például Németország). További szükséges korlát, hogy az exponenciális késleltetés is pozitív, így $\lambda_1 > 0$ (és ha van, $\lambda_2 > 0$). A modellező preferenciája alapján további korlátok állíthatók, például a $\underline{\beta}$ vagy $\underline{\lambda}$ paraméter vektorokra alsó és felső korlát (ez gyorsíthatja a becslést), illetve a Svensson modell esetén λ_1 és λ_2 eltérésére alsó korlát (ezzel biztosítva, hogy a harmadik és negyedik faktort meg tudjuk különböztetni, azaz ne legyen multikollinearitás). Az előbbieket alapján felírható egy nemkonvex optimalizálási feladat, általános alakban:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\beta}, \underline{\lambda}} F(\underline{\beta}, \underline{\lambda}) \\ \underline{A} \left(\frac{\underline{\beta}}{\underline{\lambda}} \right) &\leq \underline{b} \\ \underline{l} &< \left(\frac{\underline{\beta}}{\underline{\lambda}} \right) \leq \underline{u}. \end{aligned}$$

Itt $\underline{b}$, $\underline{l}$ és $\underline{u}$ vektorok, melyek a becsülendő paraméterekre, illetve azok kombinációjára határoznak meg lineáris korlátokat. Nemkonvex optimalizálási problémák esetén több lokális minimum is lehet, így a kapott optimum függhet a kezdőérték megválasztásától, azaz nem

¹⁷ R. Ferstl és J. Hayden: Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc. Journal of Statistical Software, 36(1), 2010.

¹⁸ Egészen pontosan $w_i = \frac{\frac{1}{d_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i}}$.

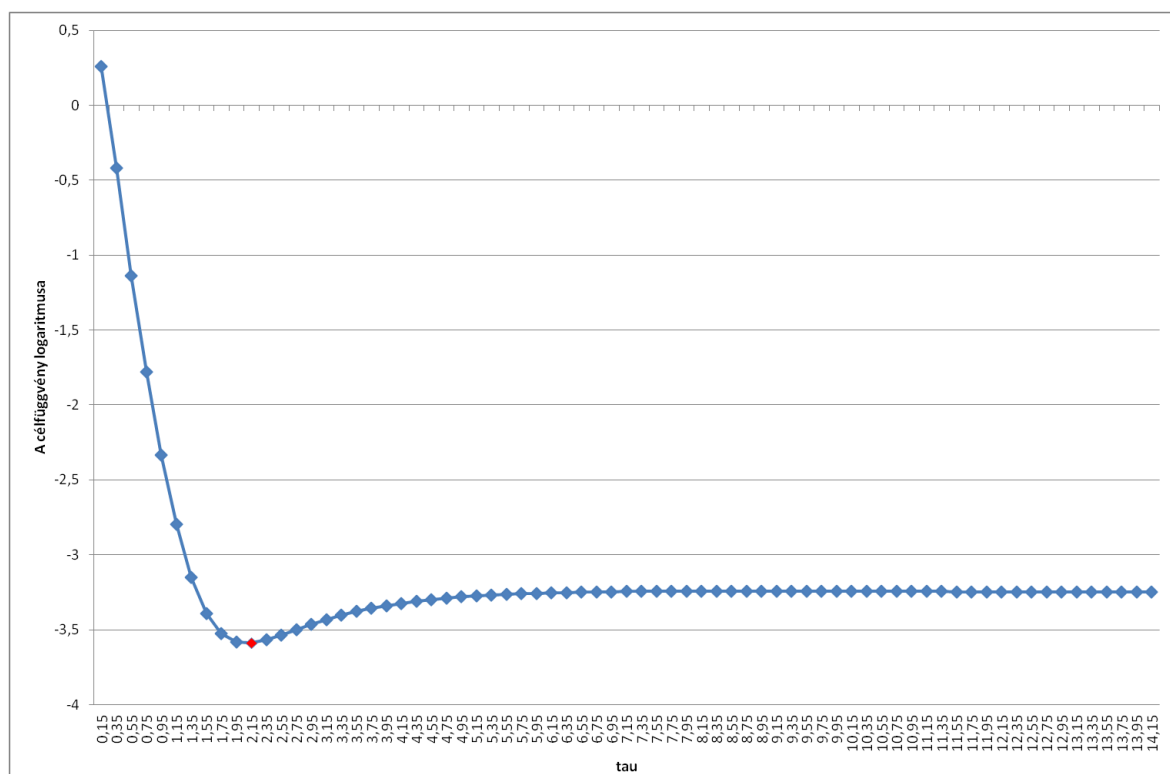
biztos, hogy a globális szélsőértéket kapjuk. Erre megoldást jelent, ha két részre bontjuk az optimalizálást, egy globális és egy lokális részre a változók szétválasztásával. Így a Nelson-Siegel modellcsalád esetén általánosan a következő alakban írható fel az optimalizálási probléma:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\lambda}} H(\underline{\lambda}) \\ \underline{A}_{\underline{\lambda}} \underline{\lambda} &\leq \underline{b}_{\underline{\lambda}} \\ \underline{l}_{\underline{\lambda}} < \underline{\lambda} &\leq \underline{u}_{\underline{\lambda}}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} H(\underline{\lambda}) &= \min_{\underline{\beta}} F(\underline{\beta}, \underline{\lambda}) \\ \underline{A}_{\underline{\beta}} \underline{\beta} &\leq \underline{b}_{\underline{\beta}} \\ \underline{l}_{\underline{\beta}} < \underline{\beta} &\leq \underline{u}_{\underline{\beta}}. \end{aligned}$$

A lokális probléma a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével megoldható, ami numerikusan egyszerű feladat. A Diebold-Li modell esetén csupán $\underline{\beta}$ szerint kell optimalizálni, így ott csak a lokális feladatot kell megoldani. A globális rész numerikus megoldása például rácsmódszerrel tehető meg. A Nelson-Siegel modell esetén ez azt jelenti, hogy a λ_1 -re vonatkozó korlátozó intervallumon (a Svensson-modell esetén téglalap) meghatározott λ_1^i -értékek (rács) mellett kiszámítjuk a lokális feladatok optimális megoldását $(\underline{\beta}_i^*, H(\lambda_1^i))$. Diszkrét sok pont közül pedig már könnyen kiválasztható a globális feladat optimális megoldása. A korábbi lokalitási problémát így úgy oldjuk meg, ha a rácsmódszerrel kapott megoldásból indítjuk az eredeti feladat optimalizálási algoritmusát.



35. ábra A kezdőparaméterek kiválasztása a Nelson-Siegel modell esetén 2014.06.30-án

Az előzőek alapján az optimalizálás a Nelson-Siegel és Svensson-modellek esetén a következőképpen történik (ennek során $\underline{\tau}$ reciprokát használjuk, amit $\underline{\tau}$ -val jelölünk):

1. meghatározzuk a $\underline{\tau}$ -ra vonatkozó korlátot, ami a $(l_\tau, u_\tau, \Delta\tau_{\text{grid}}, \Delta\tau)$ négyelemű vektor
 - az első elem az alsó korlát (ha nincs megadva semmi, akkor a legközelebbi kifizetés ideje)
 - a második elem a felső korlát (ha nincs megadva semmi, akkor a legtávolabbi kifizetés ideje)
 - a harmadik elem a rács egyes pontjai közti távolságok (ha nincs megadva semmi, akkor $\Delta\tau_{\text{grid}} = 0,2$)
 - a negyedik elem a τ_1 és τ_2 közti minimális távolság (a Nelson-Siegel modell esetén nincs ilyen, a módosított Svensson-modell esetén pedig multikollinearitás nincs, ezért $\Delta\tau = 0$)
 - a Svensson-modellek esetén a τ_1 és a τ_2 paraméterekre ugyanazok a korlátok vonatkoznak
2. felosztjuk a lehetséges $\underline{\tau}$ -kra vonatkozó intervallumot (Nelson-Siegel) vagy négyzetet (Svensson-modellek)
 - τ_1 és τ_2 felosztása egyaránt a következő: $l_\tau + \varepsilon_\tau, l_\tau + \varepsilon_\tau + \Delta\tau_{\text{grid}}, l_\tau + \varepsilon_\tau + 2 * \Delta\tau_{\text{grid}}, \dots, l_\tau + \varepsilon_\tau + n * \Delta\tau_{\text{grid}} \leq u_\tau - \varepsilon_\tau$, ahol $\varepsilon_\tau = 0,0001$
 - a Svensson-modellek esetén τ_1 és τ_2 felosztásának megfelelően egy téglalaprács adódik
3. az így kapott fix $\underline{\tau}$ -kkal elvégezzük a $\underline{\beta}$ paraméterek optimalizálását a Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) algoritmust alapul véve
 - szükséges, hogy a kezdőértékek a megvalósítható tartományba essenek, azaz kielégítsék a korlátozó feltételeket
 - a Nelson-Siegel modell esetén a kezdőérték a csupa egyes vektor
 - a Svensson-modellek esetén a kezdőérték a 0,01-ekből álló vektor
4. a kapott optimális célfüggvény értékek közül kiválasztjuk a minimálisat, az ahhoz tartozó $\underline{\tau}$ és optimális $\underline{\beta}$ paraméterek lesznek a kezdőértékek
5. ezen kezdőértékekkel elvégezzük a $\underline{\tau}$ és $\underline{\beta}$ paraméterek egyidejű optimalizálását
6. így megkapjuk az optimális paramétereket, ami meghatározza a becsült hozamgörbét.

Az érthetőség kedvéért bemutatjuk az optimalizálás folyamatát a Nelson-Siegel modell esetén 2014.06.30-ára. Az 1. lépés alapján, mivel előzetesen nem adtunk meg semmit, a korlátokra $(l_\tau, u_\tau, \Delta\tau_{\text{grid}}) = (0,1507; 14,3233; 0,2)$ adódott. A 2-4. lépéseket szemlélteti a 35. ábra, látható, hogy erre a napra a τ_1 felosztása a 0,1508; 0,3508; $\dots$; 14,1508 rácst adta (x tengely, 2. lépés). Az y tengely az ebben a pontokban elvégzett optimalizálással kapott célfüggvény értékek logaritmusát szemlélteti (3. lépés), a piros pont pedig ezek minimumát (4. lépés). Ezt a $\tau_1 = 2,15$ -höz tartozó lokális feladatnál kapjuk, ahol az optimális paraméterekre $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (6,1458; -3,9721; -4,5888)$ adódik. Ha ezekkel a kezdőparaméterekkel végezzük el a nemkonvex optimalizálást (5. lépés), akkor a kapott

$$(\tau_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2,0818; 6,1040; -3,9028; -4,6913)$$

lokális minimum (a rács megfelelő finomsága esetén) globális minimum is (6. lépés).

A Diebold-Li modellnél a $\underline{\beta}$ kezdőértéke a csupa egyes vektor, és emellett történik az optimalizálás (azaz itt csak az 5-6. lépés van). Az optimalizálás iteráltan, a vizsgált időszak minden napjára külön-külön került elvégzésre. Az optimalizálás kezdőértékeire két lehetőség közül választhatunk:

- allglobal módszer: minden napra meghatározza az optimalizálás kezdőparamétereit
- firstglobal módszer: az adott napi becsléshez felhasználja az előző napi eredményeket, azaz az optimalizálás kezdőparamétereit az előző napi optimum (így kihagyható az előző felsorolás első négy pontja)

A következőkben a Diebold-Li és Nelson-Siegel modellel kapott eredményeket mutatjuk be.

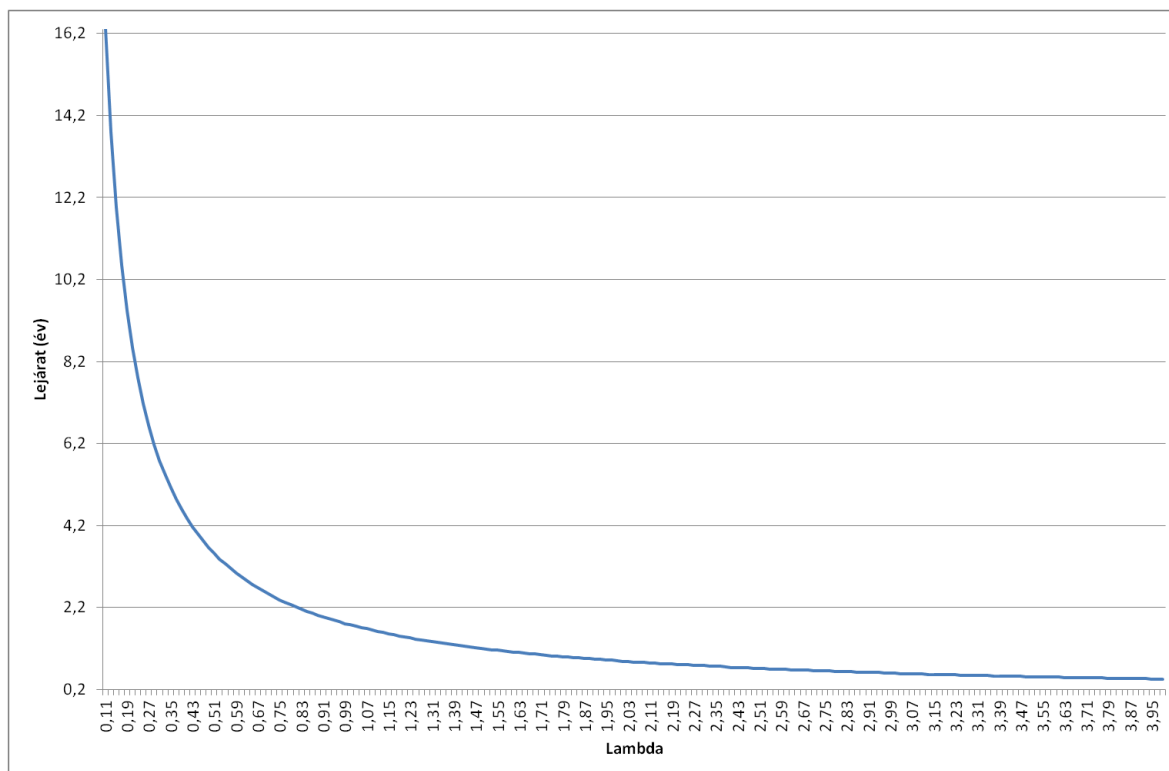
3.2.1 Diebold-Li

Az elemzés során elsődlegesen a következőkre szerettünk volna választ kapni:

- a firstglobal és allglobal kezdőértékek előnyei, hátrányai és használhatóságuk
- az eredmények függése az exponenciális késleltetéstől
- a faktorok azonosíthatósága szintként, meredekségként és görbületként
- az állandó exponenciális késleltetés hatása a faktorok dinamikájára
- a hozamgörbe alakja a különböző exponenciális késleltetések mellett
- a becslés hibájának különféle számítási módjai közti kapcsolat
- az exponenciális késleltetés hatása a vételi és eladási árfolyam által meghatározott sávba esésre
- a különböző exponenciális késleltetéssel kapott faktorok és a piacon megfigyelhető rövid kamatok közti kapcsolat

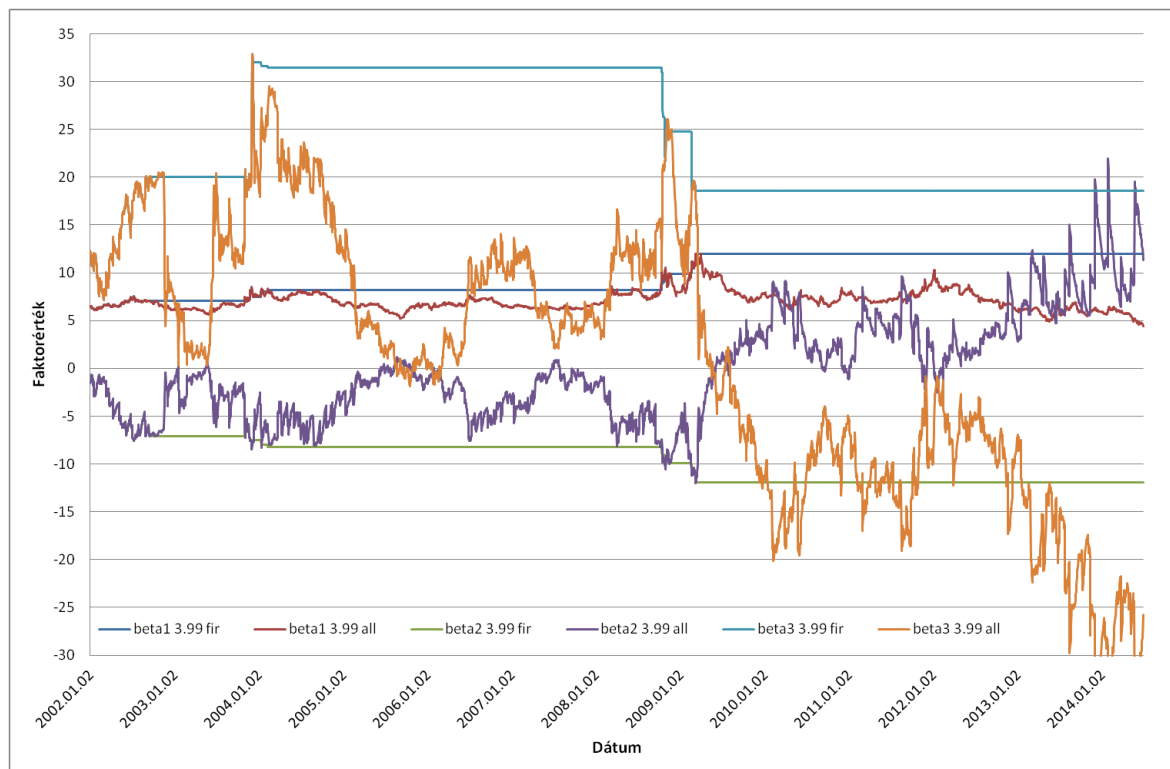
3.2.1.1 A KEZDŐÉRTÉK MEGVÁLASZTÁSA

A Diebold-Li modellt először 188 (0,25 és 3,99 között egyenletesen, 0,02 lépésközzel) különböző lambda mellett vizsgáltuk. Azért ezt az intervallumot választottuk, mert kisebb lambdák mellett egyes napokon nem teljesül az optimalizálás valamelyik feltétele (például, hogy lehetséges megoldás legyen a kezdőérték) a firstglobal módszer esetén, ezért szükséges lenne további előkészület (a problémás napok kiszűrése).



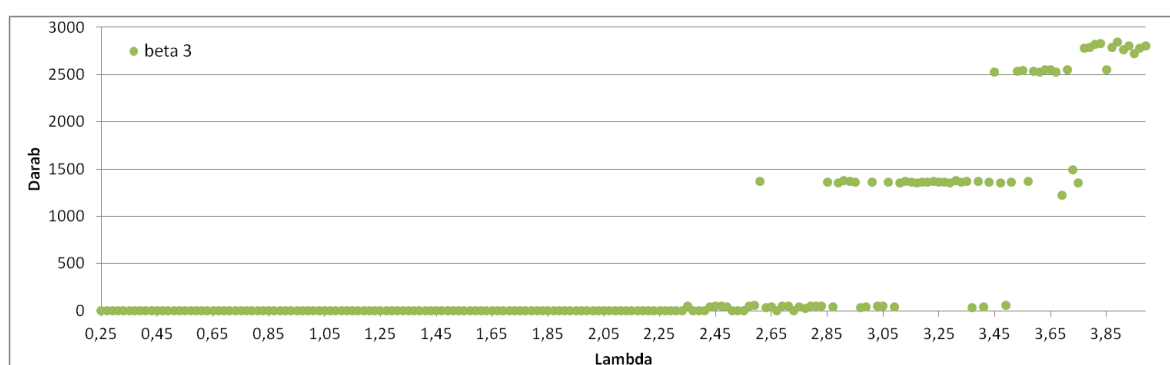
36. ábra A lambdák és a maximális görbületi faktorsúlyhoz tartozó lejáratok kapcsolata

A jelenlegi vizsgálat céljának azonban az előbbi intervallum is megfelel, a 36. ábra alapján a választott lambdák esetén a harmadik faktor súlya a (0,45; 7,17 év) intervallumon belül lesz maximális. Normális piaci körülményeket feltételezve, ez azt jelenti, hogy vagy rövidtávon, vagy hosszú távon a hozamgörbe meredekebb. A vizsgálattal ennek a feltételezésnek a helyességét is eldönthetjük (persze a harmadfokú spline-nal kapott hozamgörbék alapján egyértelmű, hogy a magyar görbék alakja jóval változatosabb ennél). Látható továbbá, hogy 0,11-nél kisebb lambdát nem érdemes választani, mivel azzal a púposág/U alak a leghosszabb lejáratú megfigyelés után lenne (így a modellből és nem az adatokból származna).



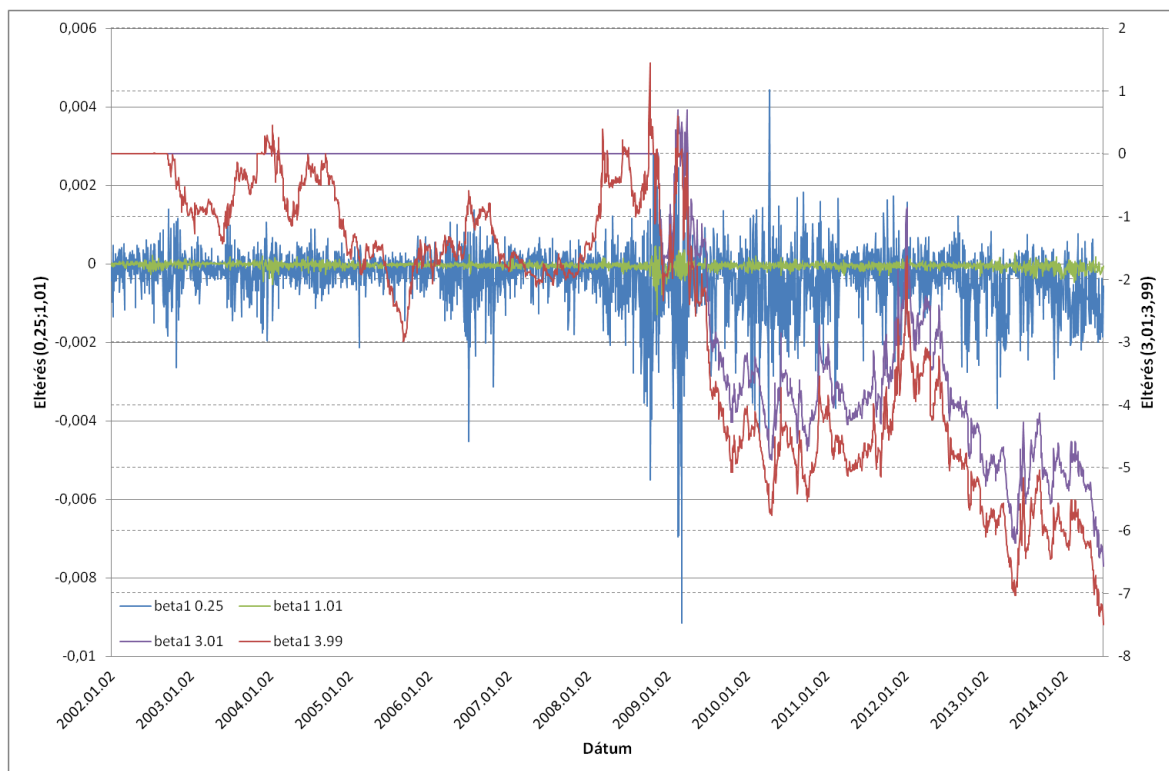
37. ábra Az egyes faktorok a firstglobal és az allglobal optimalizálás esetén (Diebold-Li, 3,99)

A kezdőparaméterek firstglobal megválasztásának előnye, hogy ezáltal csökken a becslés ideje, ugyanis kevesebb optimalizálást kell elvégeznünk. A 37. ábra alapján (itt és később is a jelmagyarázatban szereplő szám a lambdára, a 'fir' vagy 'all' a firstglobal vagy allglobal választásra utal) azonban megfigyelhető a módszer hátránya, miszerint bizonyos lambdákra a becslés beragadhat lokális optimumokhoz, ahonnan nem tud elmozdulni. Ez a probléma elsősorban az exponenciális késleltetés háromnál nagyobb értékeinél jelentkezik, és a hozamgörbe változatlanságát eredményezi, ami értelemszerűen rendkívül pontatlan becslést eredményez (ezt mutatja a 42. ábra is).



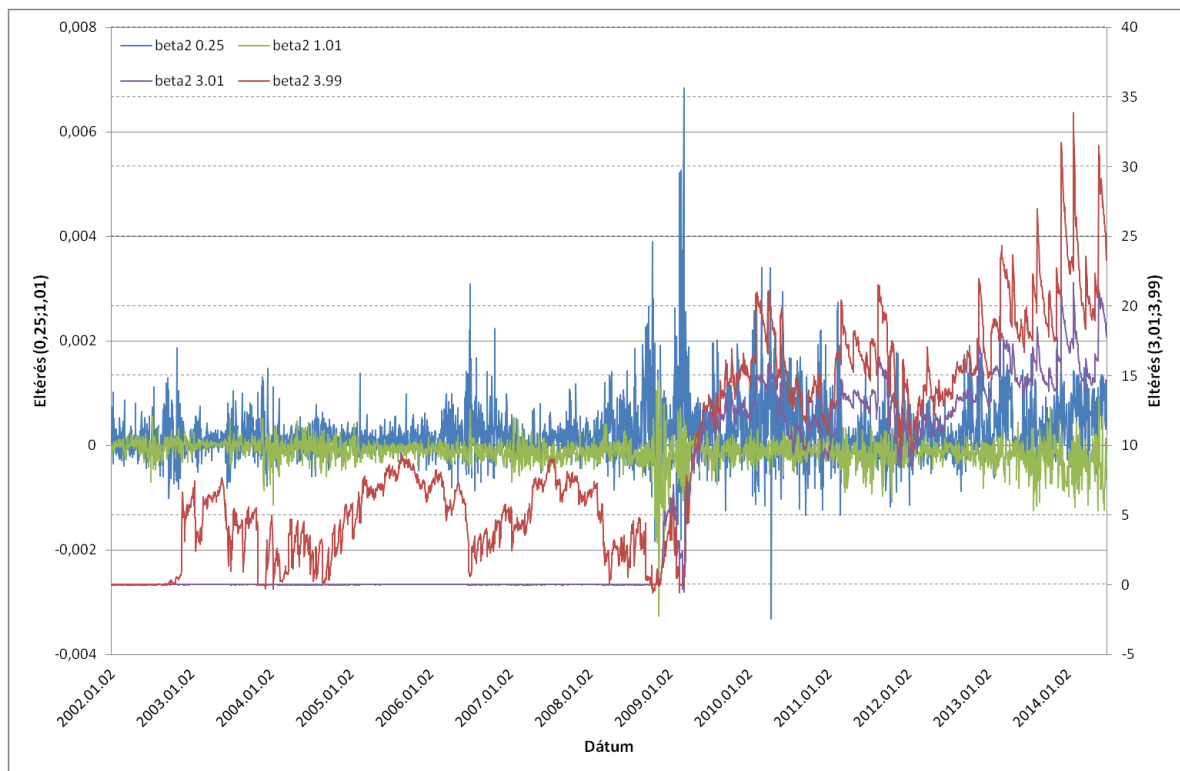
38. ábra Az egymást követő megegyező optimális β_3 értékek száma a firstglobal módszer esetén

Ha megvizsgáljuk, hogy a teljes időtáv alatt, hány nap nem változott a faktorok optimális értéke, akkor a 38. ábra alapján elmondható, hogy körülbelül 2,3-as lambda-ig a firstglobal módszer is megfelelő eredményeket ad. Ezután körülbelül 50 (az összes adat 1,6%-a), 1350 (43,4%), 2500 (80,3%) majd 2800 (89,9%) nap kapunk csak lokális és nem globális minimumot. Két szint közötti ingadozás azt jelenti, hogy a váltásoknál numerikusan instabil az optimalizálási algoritmus.



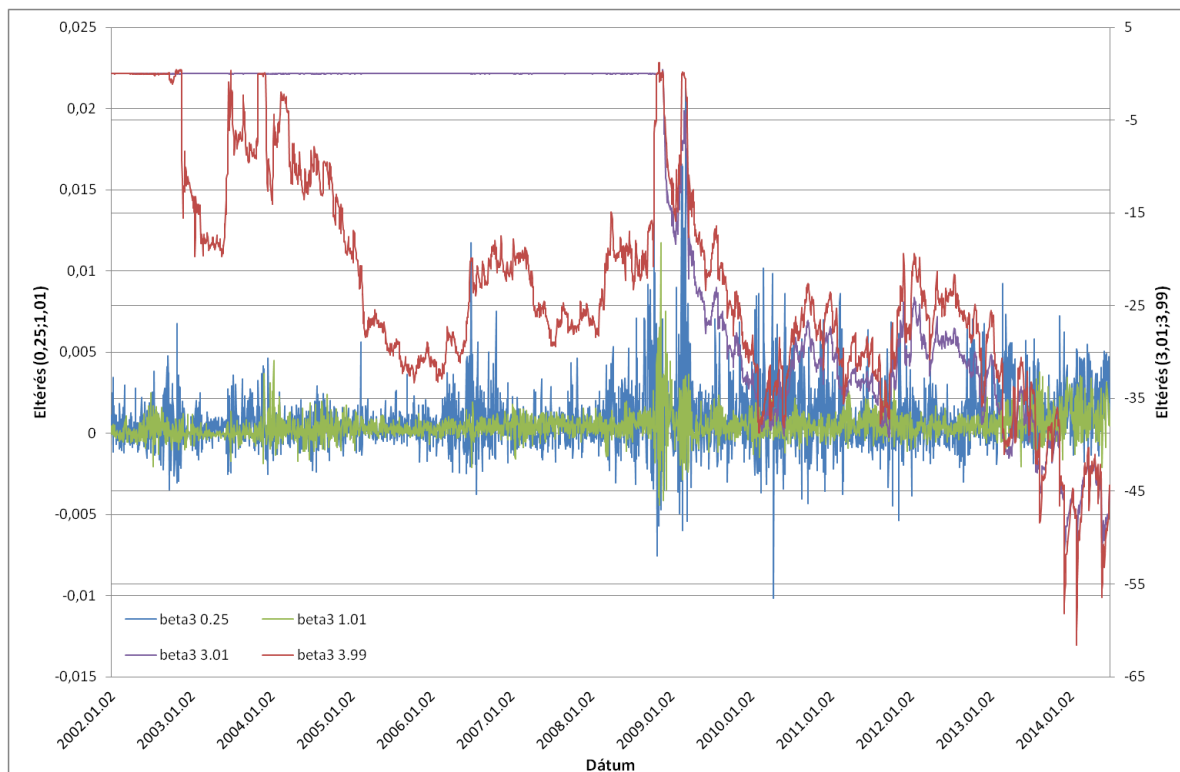
39. ábra Az első faktor eltérése a firstglobal és az allglobal optimalizálás esetén (Diebold-Li, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})

A 39. ábra bemutatja az első faktor eltérését a firstglobal és az allglobal módszerek esetén négy különböző (0,25;1,01;3,01;3,99) lambda mellett. Ezen látható, hogy ha egyszer egy lokális optimumban ragad a szint, akkor utána nem tud egy hosszabb időtávon a globális optimum közelében maradni. Továbbá a válság után egyszer sem egyeznek meg a firstglobal módszerrel kapott paraméterek az allgloballal kapott globális optimumokkal. Megfigyelhető az is, hogy kis lambda-k esetén (0,25 és 1,01) a két módszerrel kapott optimális első faktorok együtt mozognak, érdekes azonban, hogy a nagyobb lambda (1,01) esetén kisebb az eltérés. A legnagyobb differencia a 2008-as válság során tapasztalható, de még ott is elhanyagolható.



40. ábra A második faktor eltérése a firstglobal és az allglobal optimalizálás esetén (Diebold-Li, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})

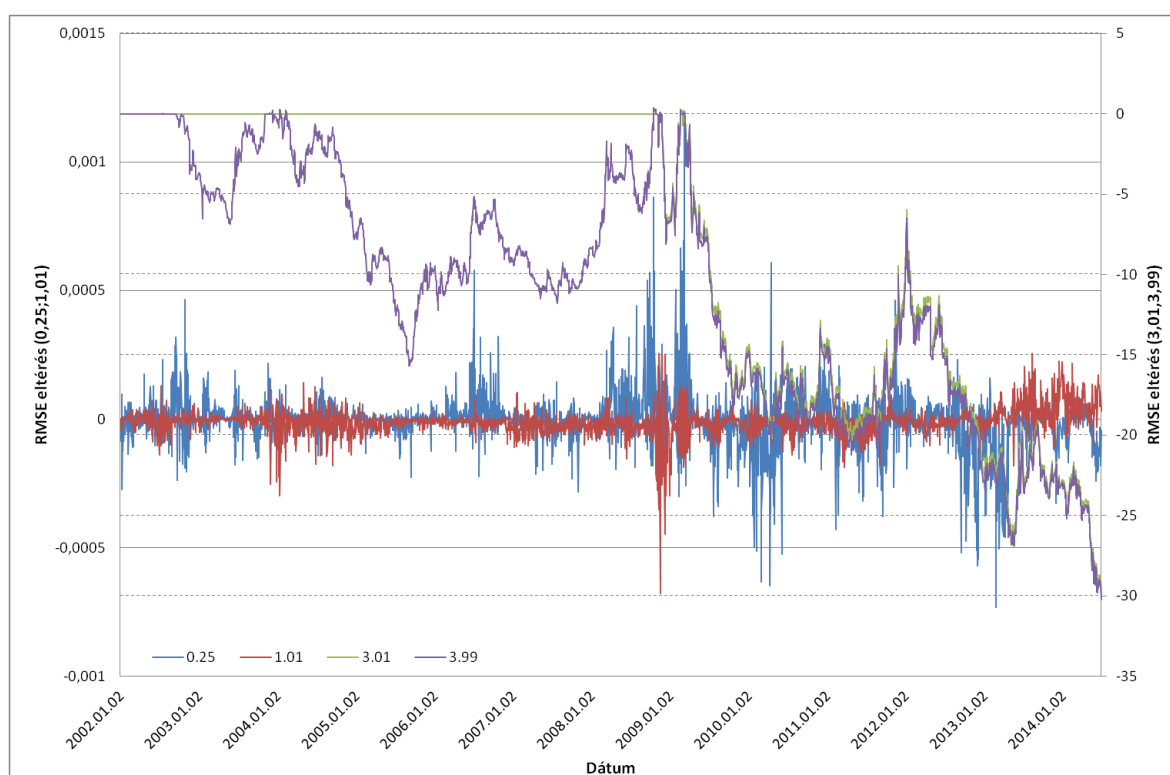
Hasonló eredmények adódnak a második faktor esetén is a 40. ábra alapján. Ezen az eddigieken kívül megfigyelhetjük, hogy az utóbbi időszakban (2012 közepétől kezdődően) kis lambdák esetén trendszerűen pozitív ($\lambda = 0,25$) vagy negatív ($\lambda = 1,01$) az eltérés, tehát az módszerbeli (allglobal vagy firstglobal) különbözőségekből adódik. Látható, hogy a firstglobal esetben a faktor értelmezhetetlenné válik, a 25%-os meredekségbeli különbség miatt.



41. ábra A harmadik faktor eltérése a firstglobal és az allglobal optimalizálás esetén (Diebold-Li, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})

A harmadik faktor eltéréseit szemlélteti a 41. ábra, erre is igazak az eddig tett megállapítások, itt különösen megfigyelhető a firstglobal optimalizálás lassabb reagálása a válságra, ami a nagyobb differenciát adja.

Ha megfigyeljük az RMSE eltérését a firstglobal és allglobal módszerek esetén különböző exponenciális késleltetések mellett (42. ábra), akkor ez alapján kis lambdák esetén tetszőlegesen használható a két módszer, habár a vizsgált időszak végén itt is megjelenik szabályszerűség a hibák eltéréseiben. Az eltérések véletlenszerűségét és természetét idősoros módszerekkel lehet vizsgálni, így eldönthető, hogy azok a használt módszertanból vagy az adatokból (időben volatilis hozamgörbe) származnak-e. A válság utáni nagyobb eltérés az alacsony exponenciális késleltetések esetén az előző ábrákon szereplő nagyobb faktoreltérések következménye.



42. ábra Az RMSE értékek eltérése a firstglobal és az allglobal optimalizálás esetén (Diebold-Li, {0,25, 1,01, 3,01, 3,99})

A nagy lambdák esetén megjelenő lokális optimumban ragadás és az ebből következő értelmezhetetlen faktorok, illetve magas hibák miatt ekkor az allglobal optimalizálás javasolt. Kis lambdák esetén a kezdőérték megválasztásának módja tetszőleges. A kis és nagy lambdák közti határ eldöntéséhez azonban további vizsgálatok lennének szükségesek (ahogy a kapott faktorok idősoros tulajdonságaihoz is), így **az eddigi eredmények alapján az allglobal optimalizálás javasolt a Diebold-Li modell esetén.**

3.2.1.2 A FAKTOROK ÉRTELMEZHETŐSÉGE ÉS ALAKULÁSA

Ebben a részben az allglobal optimalizálással kapott faktorok értelmezhetőségét vizsgáljuk. Az empirikus faktorokat a korábbiakat részben megismételve a következő mennyiségekkel azonosítottuk $\lambda = 0,51$ esetén:

- szint: $R(t, 12 \text{ év})$,
- meredekség: $R(t, 12 \text{ év}) - R(t, 3 \text{ hónap})$,

- görbület: $2R(t, 3,51 \text{ év}) - R(t, 3 \text{ hónap}) - R(t, 12 \text{ év})$.

Azért választottunk a hosszú hozamhoz 12 évet, mert ez a leghosszabb olyan egész évű lejárat, melyre az egész időszak során volt adat. 10 év is logikus választás lett volna, ugyanis a 10 éves papír likvid piaca miatt az árfolyama kevés mérési hibát tartalmaz, azonban a 10 éves hozamra kisebb hatása van a leghosszabb lejáratú kötvénynek. A görbületnél pedig azért választottunk 3,51 évet, mert ekkor lesz a harmadik faktor súlya maximális.

Az empirikus faktorokat a harmadfokú spline módszernél kapott hozamokkal számítottuk ki. A 43. ábra alapján a következő megállapításokat tehetjük (itt jobban látszik az empirikus faktorok dinamikája, mint ahogy a 22. ábra kapcsán következtethettünk volna). A 2003-as (külföldiek állampapír eladása), 2008-as (likviditás kiapadása) és 2011-es (hitelminősítők általi befektetési kategóriából kikerülés) állampapírpiazi zavarok esetén történtek sokkhatások. 2003-ban a meredekség csökkenésével és a görbület 0 körüli értéke miatt inverzzé vált a görbe, ennek piaci korrekciója 2006 elejére ért véget. 2008 végén megemelkedtek a hosszú hozamok, illetve csökkent a görbe meredeksége, ami a rövid hozamok még nagyobb emelkedését jelentette. 2011-ben is a hosszú hozamok emelkedése figyelhető meg, azonban ekkor az empirikus meredekséget és görbületet nem érte sokkhatás. Az utóbbi időszak (2013-2014. év) trendjei is látszódnak az ábrán, úgymint a kismértékben csökkenő hosszú hozamok, jelentősen csökkenő rövid hozamok és így emelkedő meredekség. A magyar hozamgörbe alakok sokféleségére az empirikus faktorok változékonysága alapján következtethetünk.



43. ábra A harmadfokú spline-nal kapott empirikus faktorok

Az empirikus szintre, meredekségre és görbületre regressziós modellt illesztettünk különböző exponenciális késleltetés feltételezésével becsült faktorokkal. Először a $\lambda = 0,51$ mellett kapott eredményeket mutatjuk be a 44. ábra alapján. A regressziós modellekben nem szerepeltettünk konstans tagot¹⁹, ugyanis célunk a három faktor értelmezhetőségének

¹⁹ Konstans mellett is lefuttattuk a regressziókat, és azt kaptuk, hogy mindhárom esetben (szint, meredekség, görbület) szignifikáns, nullától különböző értéket kaptunk. Ez azt mutatja, hogy a

vizsgálata. A modell és minden kapott együttható szignifikáns, azok abszolút nagyságából meghatározhatjuk, hogy az empirikus mutatókra melyik faktor van a legnagyobb hatással. Ez alapján az empirikus szintet közel teljesen meghatározza az első faktor (ugyanis a hozzá tartozó együttható 1,0013), az R^2 értéke alapján is a teljes varianciát szinte teljes egészében megmagyarázza a modell. Hasonlóan, az empirikus meredekség esetén a legnagyobb abszolút értékű együttható a második faktorhoz tartozik, és a kapcsolat negatív köztük. A harmadik faktor az empirikus görbületre van legnagyobb hatással, habár ekkor a második faktor is meghatározó (az R^2 értéke is csökken a másik kettőhöz képest). Ezek alapján elmondható, hogy $\lambda = 0,51$ mellett a faktorok értelmezhetők szintként, meredekségként és görbületként.

	SZINT		MEREDÉKSÉG		GÖRBÜLET	
	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték
BETA 1 DL 0.51	0,998592261	0,0000	0,011069845	0,0000	0,014158297	0,0000
BETA 2 DL 0.51	0,154847351	0,0000	-0,779399255	0,0000	-0,172278381	0,0000
BETA 3 DL 0.51	0,153963081	0,0000	0,109611445	0,0000	0,380854676	0,0000
F szignifikanciája	0		0		0	
r-négyzet	0,999955		0,967510		0,911283	

44. ábra A faktorok regressziós vizsgálata (Diebold-Li, 0,51)

$\lambda = 3,99$ mellett vizsgálva a regressziós modell eredményeit (45. ábra) látható, hogy ekkor az empirikus szint esetén az első faktor együtthatója már távolabb van egytől (0,9832), tengelymetszet mellett 1-hez távolabbi érték (0,9832) adódna. Az empirikus meredekség és görbület esetén azonban sokkal kevésbé egyértelmű a megfeleltethetőség, mint 0,51-es lambda mellett (a tengelymetszet melletti regresszió ugyanilyen eredményre vezetne). Ezek és a következő ábrák alapján elmondható, hogy a faktorok minél jobb azonosíthatóságához kisebb exponenciális késleltetés szükséges.

	SZINT		MEREDÉKSÉG		GÖRBÜLET	
	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték
BETA 1 DL 3.99	0,983231612	0,0000	0,022488603	0,0000	0,001495474	0,0000
BETA 2 DL 3.99	0,05041832	0,0000	-0,413544258	0,0000	0,284482242	0,0000
BETA 3 DL 3.99	0,007736906	0,0000	-0,285671507	0,0000	0,23917385	0,0000
F szignifikanciája	0		0		0	
r-négyzet	0,999513		0,970373		0,995492	

45. ábra A faktorok regressziós vizsgálata (Diebold-Li, 3,99)

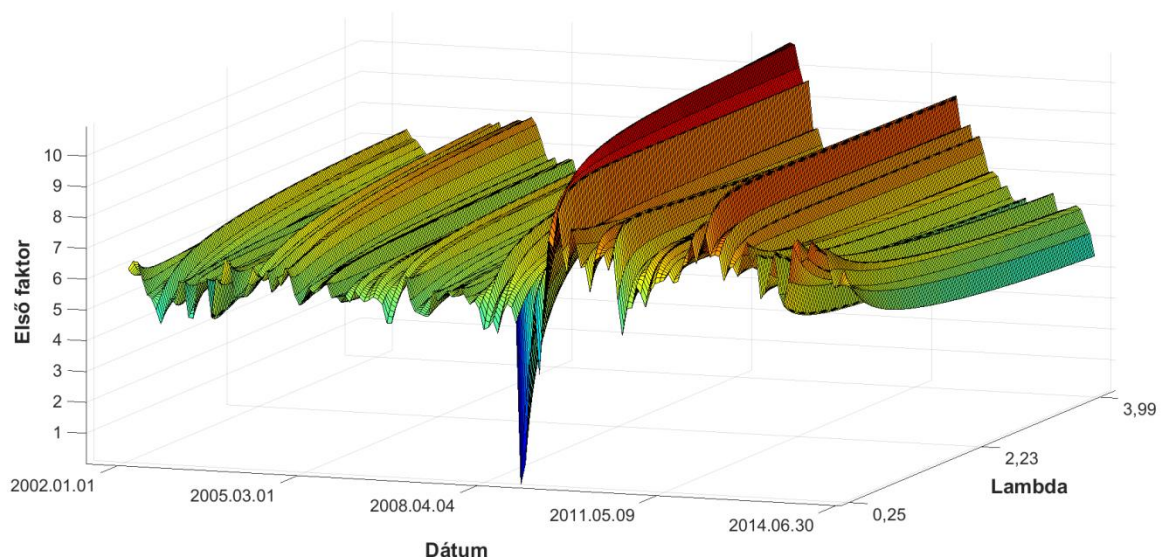
Az egyes faktorok alakulását az exponenciális késleltetés különböző értékei mellett (kicsi: 0,25; közepes: 2,01; nagy: 3,99) vizsgáltuk. A 46. ábra mutatja a szint alakulását. Ezen látható, hogy a $\lambda = 0,25$ esetben az első faktor fejlődése eltér a másik két esettől, amelyek dinamikája közel megegyezik. Érdemes megfigyelni, hogy a nagyobb változással járó sokkok esetén a változás iránya ellentétes, ami a kicsi lambda érték mellett közgazdaságilag helytelen következtetésekre vezetne. Ez különösen igaz a 2008-as válság időszakára, ahol ez alapján a hozamszint 0 közelébe esett. Ez is mutatja, hogy a magyar adatok esetén meglehetősen nehéz a teljes időszakra megfelelő lambda kiválasztása, ugyanis a rezsiváltások ekkor szélsőséges becslésekhez vezethetnek. Tehát nem megfelelő a túl kicsi exponenciális paraméter használata sem a Diebold-Li modell esetén.

hozamgörbét leíró empirikus mutatókra további (esetleg makrogazdasági, lejárat, likviditási) faktorok is hatással lehetnek.



46. ábra Az első faktor alakulása az allglobal módszer esetén (Diebold-Li, {0,25, 2,01, 3,99})

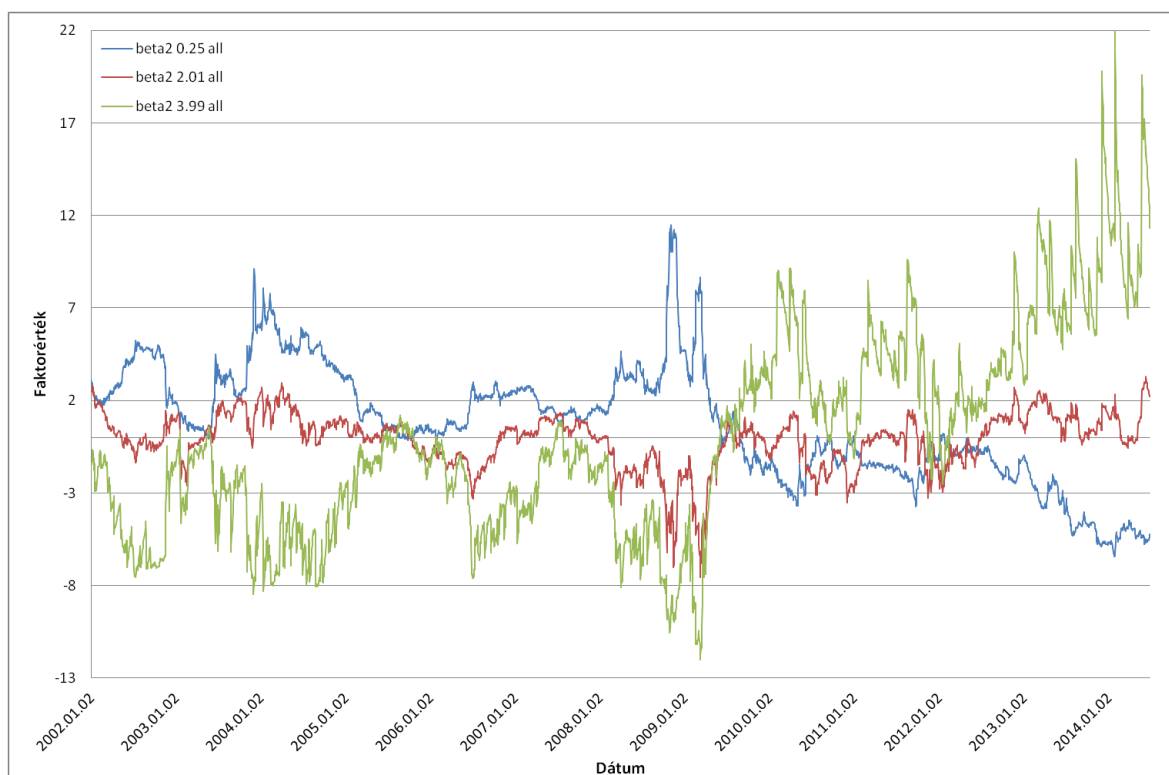
Ha az összes vizsgált lambda mellett ábrázoljuk az első faktor alakulását (47. ábra), akkor azt tapasztaljuk egy adott napra vonatkozóan, hogy nagyobb exponenciális késleltetés esetén jellemzően az első faktor becslése is nagyobb és a növekedés üteme lassul. Látható, hogy alacsonyabb lambda-k esetén az első faktor időbeli volatilitása is nagyobb, mint hosszabbakra (a 46. ábra is ezt mutatja). A magasabb első faktorok (és így hosszú távú hozamok) különösen sokkhatások esetén igazak.



47. ábra Az első faktor alakulása a vizsgált lambda-k mellett az allglobal módszer esetén

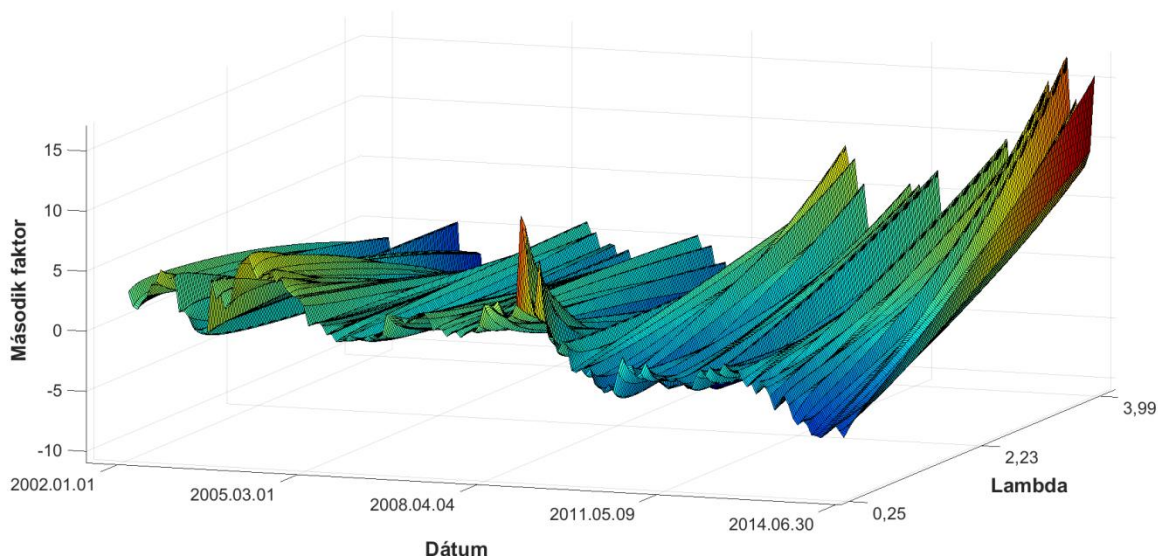
A második faktor esetén is megfigyelhető, hogy kicsi lambda esetén a faktor dinamikája általában ellentétesen mozog, mint közepes és nagy exponenciális késleltetés mellett. A szinttel ellentétben azonban itt már nem mozog együtt a faktor $\lambda = 2,01$ és $\lambda = 3,99$ esetén, sőt utóbbinál az időszak végén szélsőséges értékeket kapunk (láttuk a regresszió vizsgálatnál,

hogy ekkora lambda mellett ez már kevésbé határozza meg az empirikus meredekséget). A harmadfokú spline módszerrel kapott eredmények (22. ábra) alapján az időszak végén emelkedő a hozamgörbe, így ekkor negatív második faktort várunk, ez egyedül a kicsi lambda mellett teljesül.



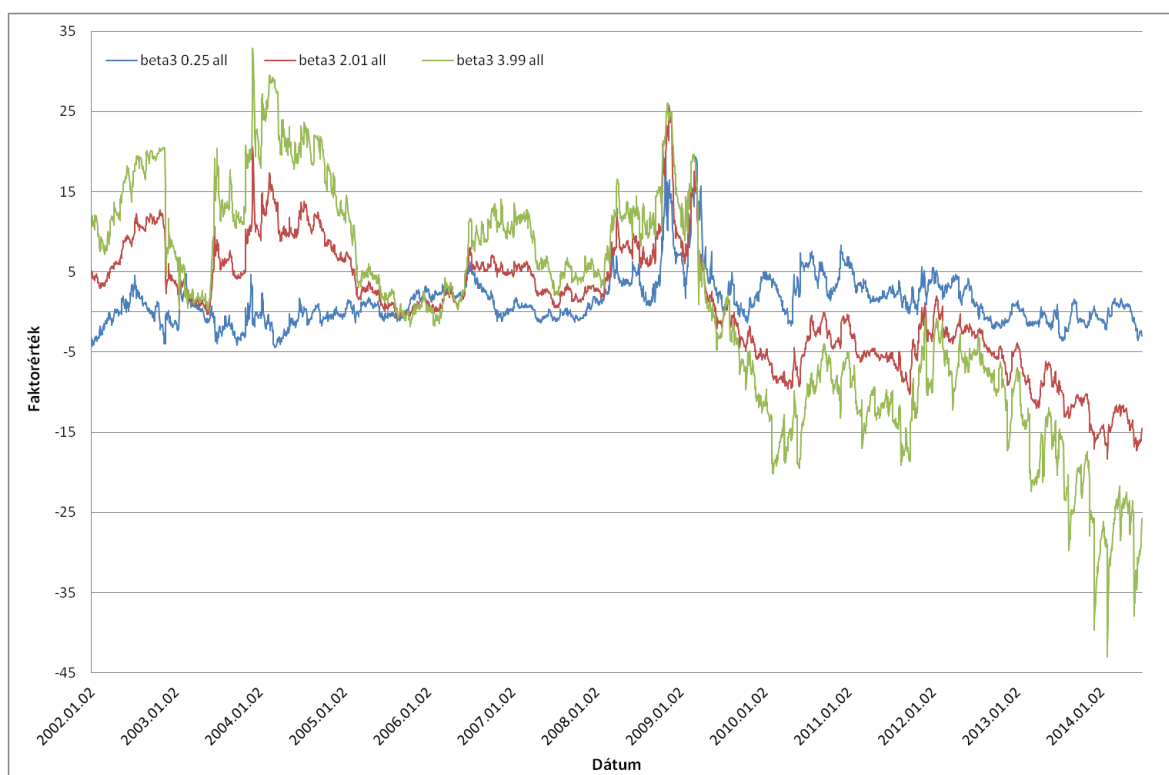
48. ábra A második faktor alakulása az allglobal módszer esetén (Diebold-Li, {0,25, 2,01, 3,99})

A 49. ábra a második faktor alakulását mutatja a vizsgált lambdák mellett. Látható, hogy ennek dinamikája sokkal jobban függ az exponenciális késleltetéstől, főleg a válságot követően kapunk eltérő eredményeket. Az időszak végi nagy lambda értékek mellett a kapott második faktorok előjelei és nagyságai közgazdaságilag önmagukban azt vonnák maguk után, hogy a hozamgörbe meredeken csökkenő (de ez persze nem igaz, 22. ábra) Ez is azt támasztja alá, hogy a lambda megválasztása kiemelt jelentőségű a hozamgörbe alakja szempontjából, illetve hogy a 2008-as válság valóban strukturális törést jelentett. Az eddigiek alapján azonban nem jelenthető ki egyértelműen, hogy az exponenciális késleltetés kis értéke jobb volna, ugyanis ahogy láttuk is (44. ábra és 45. ábra), a meredekségre a második faktoron kívül a harmadik is hatással van (a lambdától függő mértékben).



49. ábra A második faktor alakulása a vizsgált lambdák mellett az allglobal módszer esetén

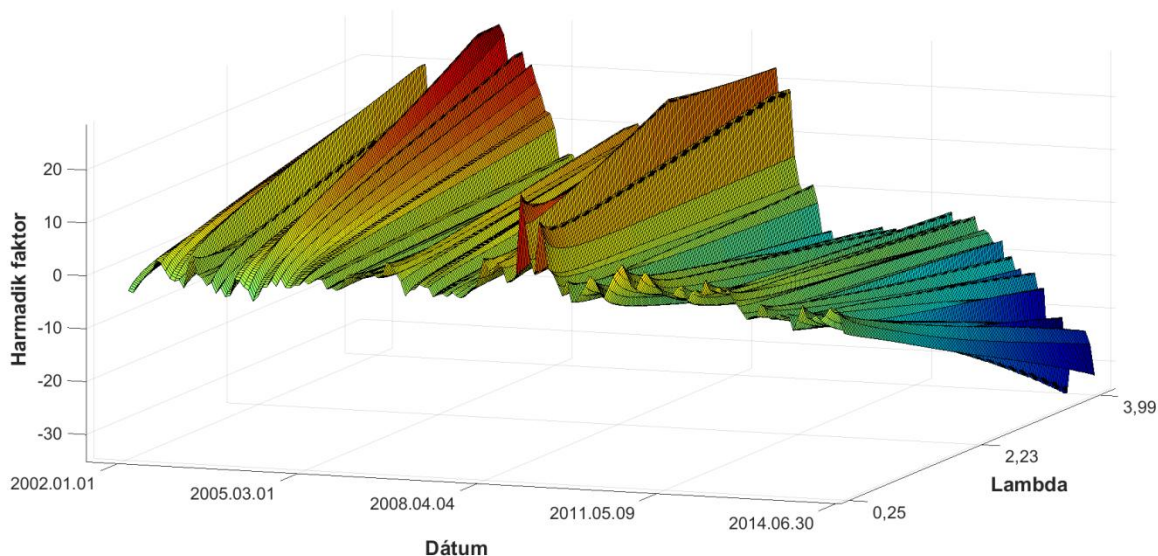
Nagy lambda esetén a magas és pozitív második faktorokat korrigálják a harmadik faktorok, hogy az időszak végén a valóságnak megfelelő hozamgörbéket kapjuk (végeredményben $\lambda = 3,99$ mellett is emelkedő görbéket kapunk, 55. ábra). Ezt a korrigálást figyelhetjük meg a 50. ábra alapján is, ugyanis a vizsgált időszak végén a nagy exponenciális késleltetésnél értelmetlenül alacsony harmadik faktorok adódnak. Megfigyelhető továbbá (ami a második faktor esetében nem volt igaz), hogy mindhárom görbe azonos irányba változik, csak eltérő nagysággal.



50. ábra A harmadik faktor alakulása az allglobal módszer esetén (Diebold-Li, $\{0,25, 2,01, 3,99\}$)

Ha megvizsgáljuk a harmadik faktor adott napra vonatkozó függőségét az exponenciális késleltetésről, akkor azt láthatjuk a 51. ábra alapján, hogy a monotonitás pont ellentétes, mint a második faktor esetében (50. ábra). A lambda emelkedésével egyre szélsőségesebb

becslések adódnak, ugyanis a regressziós vizsgálat alapján kevésbé függenek az egyes faktoroktól az empirikus mutatói az előállítandó hozamgörbének (főleg a meredekség és a görbület), ez az ábrán is megfigyelhető.

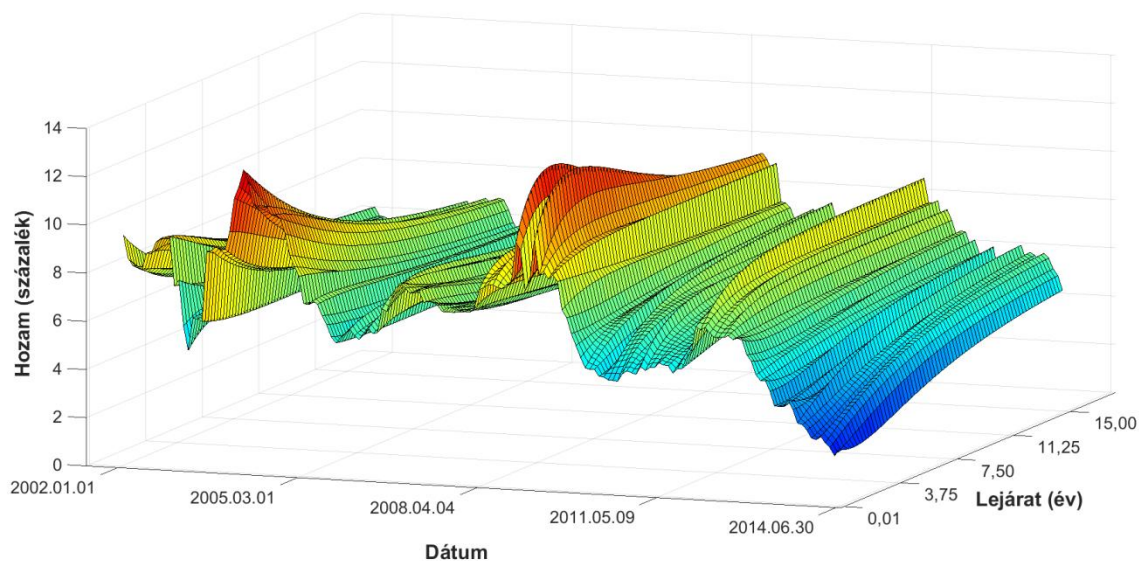


51. ábra A harmadik faktor alakulása a vizsgált lambdák mellett az allglobal módszer esetén

A faktorok vizsgálata alapján elfogadható, hogy azok értelmezhetőek szintként, meredekségként és görbületként. Az időbeli fejlődésük alapján pedig elmondható, hogy az exponenciális késleltetésre se túl alacsony, se túl magas érték nem használható (ezt a 2008-as válság alatti viselkedésükből határozhatjuk meg).

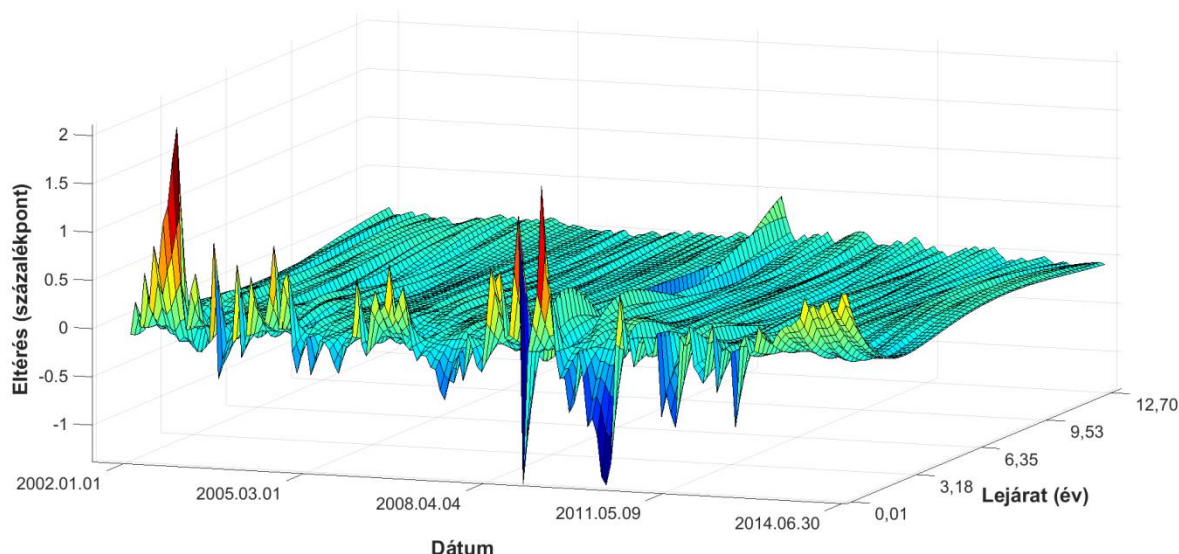
3.2.1.3 A KAPOTT HOZAMGÖRBÉK

A következőkben a kapott hozamgörbéket tekintjük át különböző exponenciális késleltetések mellett. A lambda értékére 0,51-es és 3,99-es értékeket választottunk a vizsgált intervallum két széléről, az optimalizálás kezdőértékeit allglobal módszerrel választottuk.



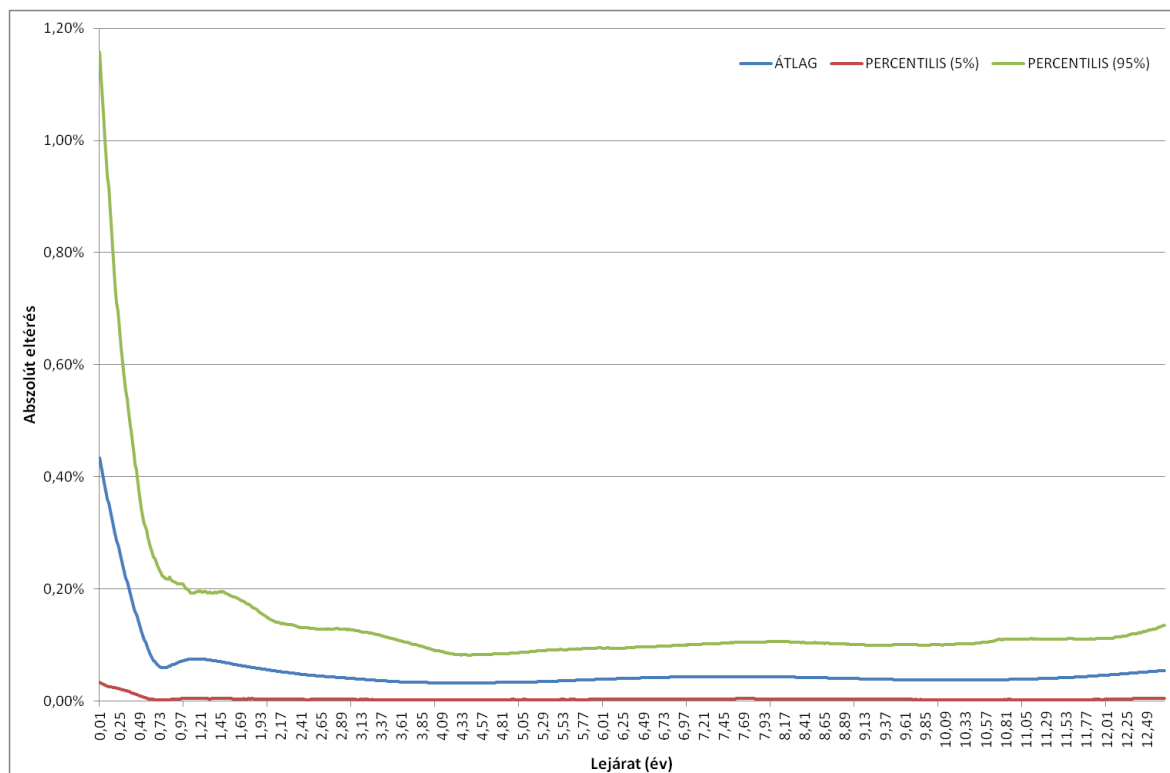
52. ábra A hozamgörbe alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között (Diebold-Li, 0,51)

Alacsony lambda mellett látható (52. ábra), hogy hasonló felületet kapunk, mint a harmadfokú spline esetén (22. ábra). Fontos megfigyelni, hogy nincsenek kiugró értékek, az egyes lejáratok esetén a hozamok időben folytonosan változnak.



53. ábra A hozamgörbe eltérése a Diebold-Li (0.51) és a harmadfokú spline modellek között

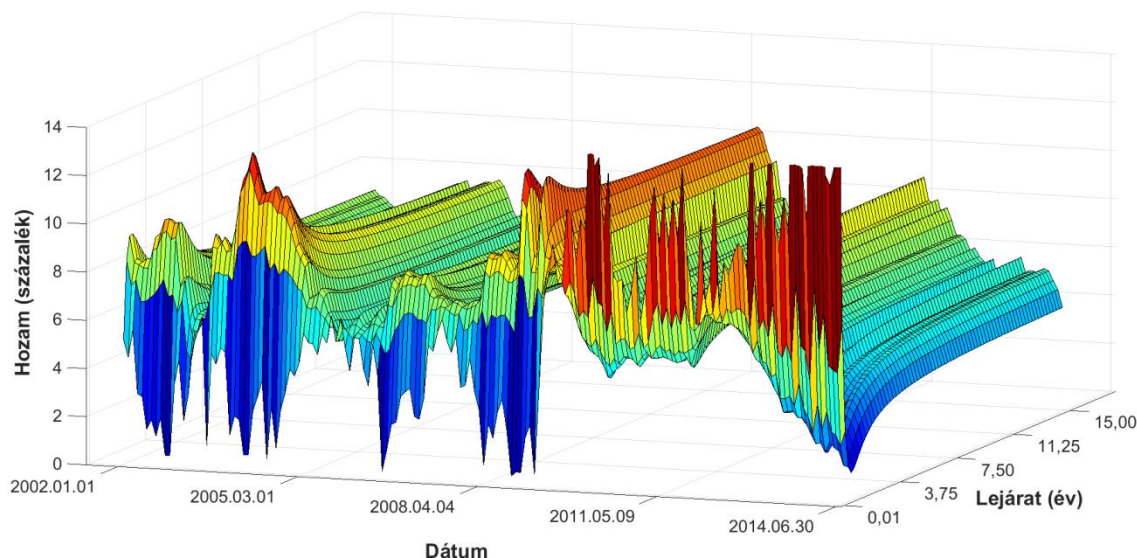
A harmadfokú spline módszerrel kapott hozamgörbével való eltéréseket szemlélítetve a legjelentősebb eltérés rövid távon figyelhető meg. Az időszak elején és a 2008-as válság következményeként tapasztalható nagyobb eltérés, a teljes időszakra pedig jellemző, hogy az eltérések trendszerűek, így a modellek különbözőségéből fakadnak.



54. ábra A hozamgörbe abszolút eltérése a Diebold-Li (0.51) és a harmadfokú spline modellek között 2.

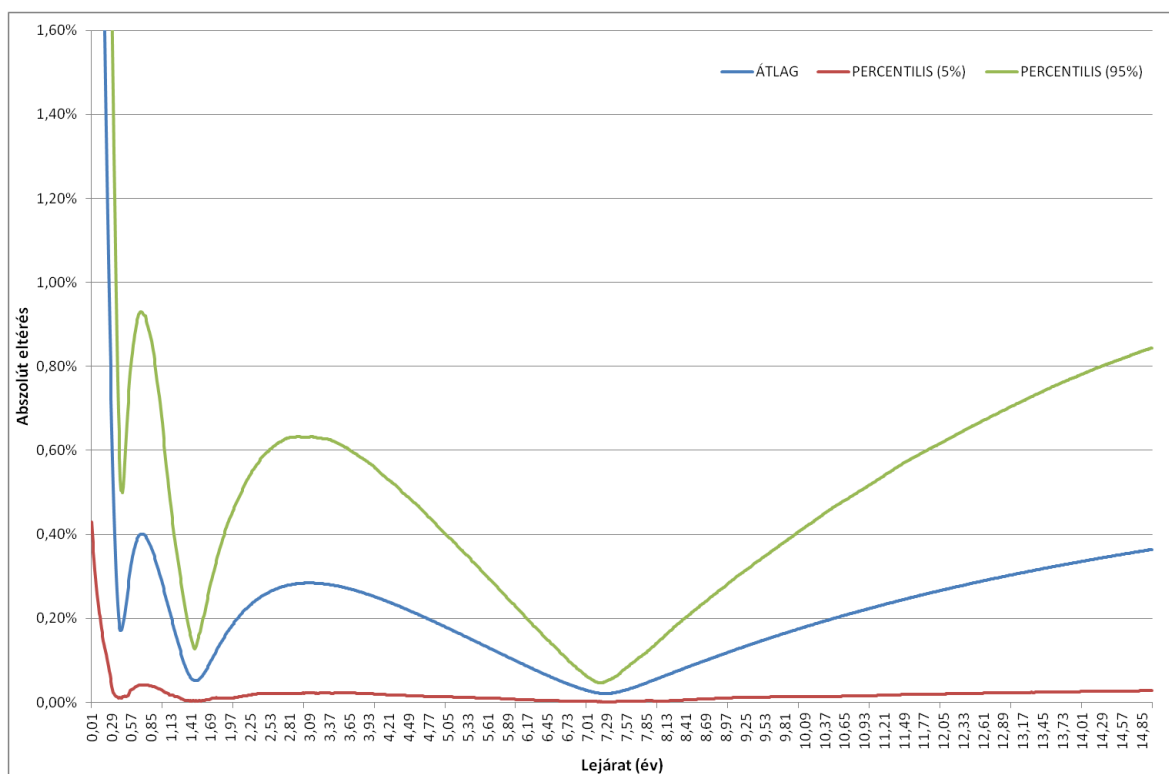
Ha lejárat szerint tekintjük az abszolút eltérések átlagát, 5%-os és 95%-ös percentiliseit a teljes időszakra vonatkozóan, akkor az 54. ábra görbéit kapjuk. Itt látható, hogy az eltérések

átlag csökken, majd beáll egy közel 100 bázispontos szintre, hosszú távon pedig újból emelkedik. A percentilisek görbéi jellemzően a lejárat növekedésével egyre szűkebb sávot határoznak meg, azonban főleg a féléves lejáratig elég nagy eltérések lehetnek a vizsgált időszak folyamán.



55. ábra A hozamgörbe alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között (Diebold-Li, 3,99)

Nagy lambda (3,99) esetén láthatjuk a 55. ábra alapján, hogy a kapott hozamgörbe is kedvezőtlen tulajdonságú. Rövid távon szélsőséges, a valóságtól eltérő eredményeket tapasztalunk. Látható, hogy ilyen exponenciális késleltetés mellett a 2008-as válság előtt alul- (0% körüli), majd felülbecsli (14% körüli) a modell a rövid kamatokat.



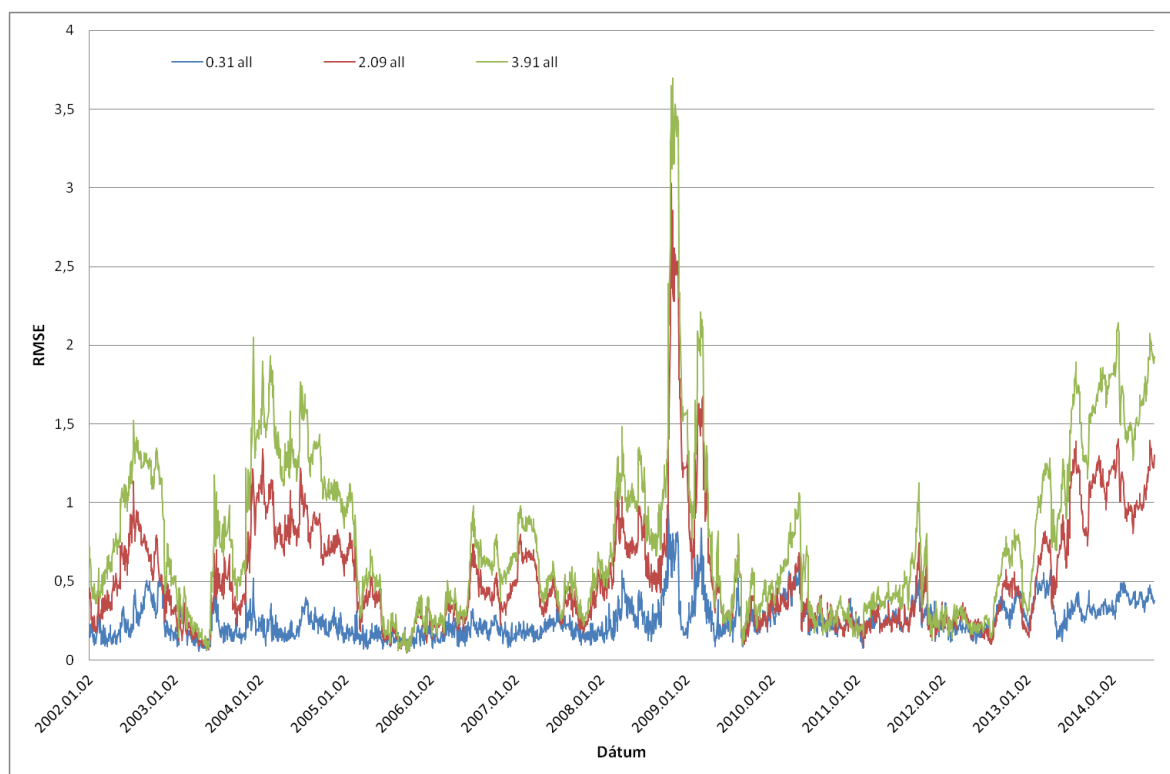
56. ábra A hozamgörbe abszolút eltérése Diebold-Li modellek között 0,51-es és 3,99-es lambda esetén

Az abszolút eltérések ábrázolásánál (56. ábra) látható, hogy rövid távon jelentős az eltérés, kezdetben több, mint 5% a két modell között (azonban csak 1,60%-os eltérésig ábrázoltuk az y tengelyt). Látható, hogy az abszolút eltérések átlaga ezután jellemzően csökken, azonban három lejáratnál (0,42; 1,48 és 7,27 év) lokális minimum tapasztalható, ahol a percentilisek sávja is csökken. Ezen lejáratok azonban nem azok, amelyeknél az lambda mellett maximális a görbület súlya (azonban érdemes lehet a lambda-tól való függését vizsgálni).

A kapott hozamgörbéket szemlélítve elmondható, hogy az exponenciális késleltetésekre vonatkozó vizsgált intervallum elején lévő értékek lehetnek megfelelő választások a magyar megfigyelések alapján.

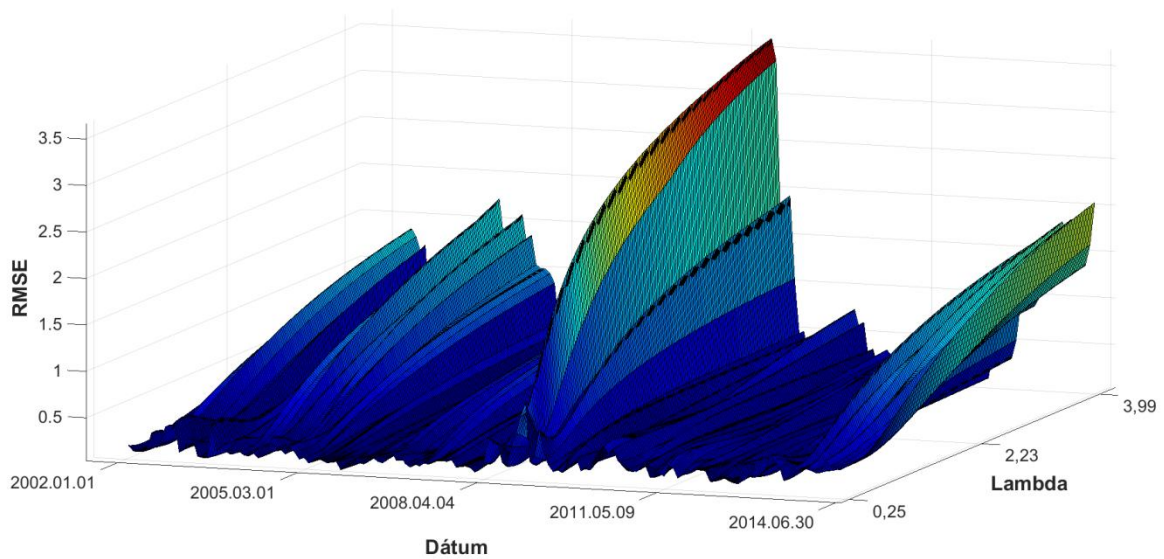
3.2.1.4 AZ ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉSEK VIZSGÁLATA

A modellek közti választás legfontosabb eleme, hogy a becslés mekkora hibát eredményez. Habár az optimalizálásnál súlyozott eltérés négyzeteket használunk, az összehasonlításnál az árfolyamok átlagos négyzetes eltérésnek gyökét (RMSE) vettük alapul. Azért döntöttünk emellett, mert így a különböző modellek (spline, Nelson-Siegel és affin típusúak) egységes keretben, az optimalizálás módszertanától függetlenül hasonlíthatók össze.



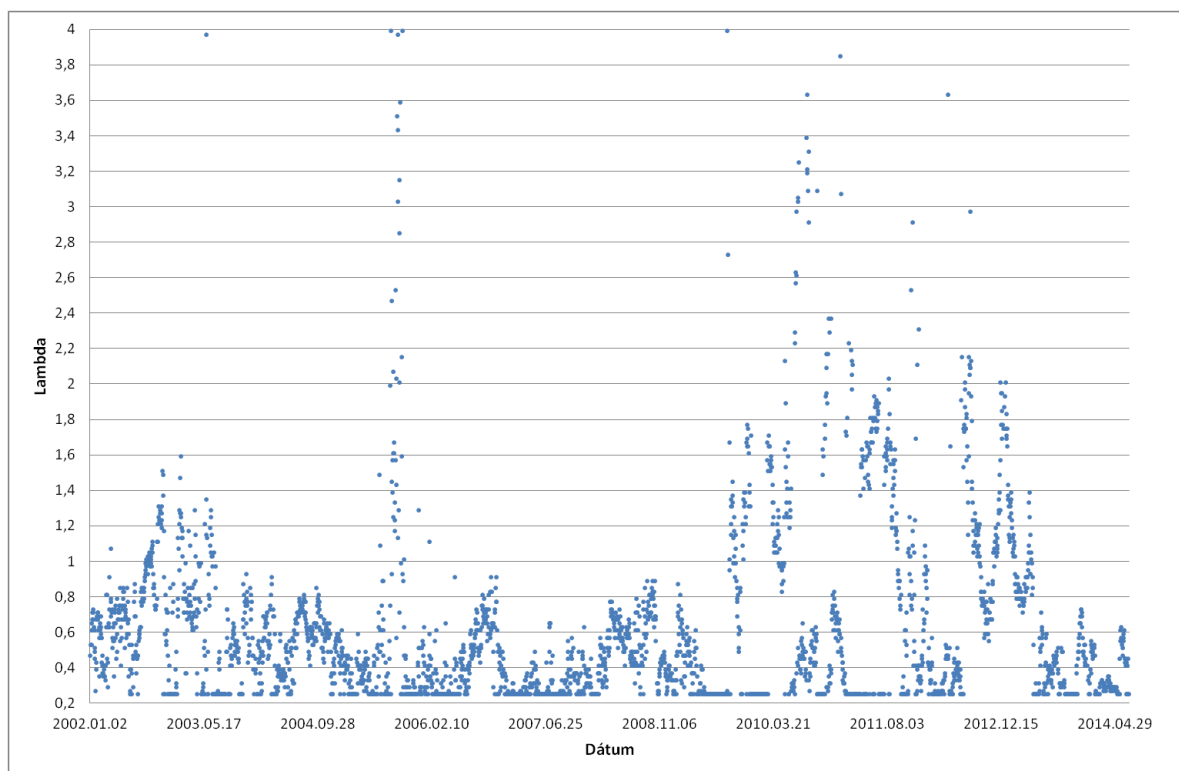
57. ábra Az RMSE alakulása az allglobal módszer esetén (Diebold-Li, {0,31, 2,09, 3,91})

Először három, a vizsgált intervallumot lefedő lambda mellett ábrázoltuk a napi RMSE értékeket a vizsgált időszak folyamán. Ahogy az 57. ábra is mutatja a lambda növekedésével az RMSE érték is növekszik. Ez azt sugallja, hogy a magyar adatok alapján a hozamgörbe púposága/U-alakja jellemzően hosszabb lejáratokon van. Megfigyelhető továbbá, hogy a becslés hibája a megfigyelésekben lévő zajtól is függ az exponenciális késleltetésen kívül, ugyanis a három görbében hasonló trendek figyelhetők meg.



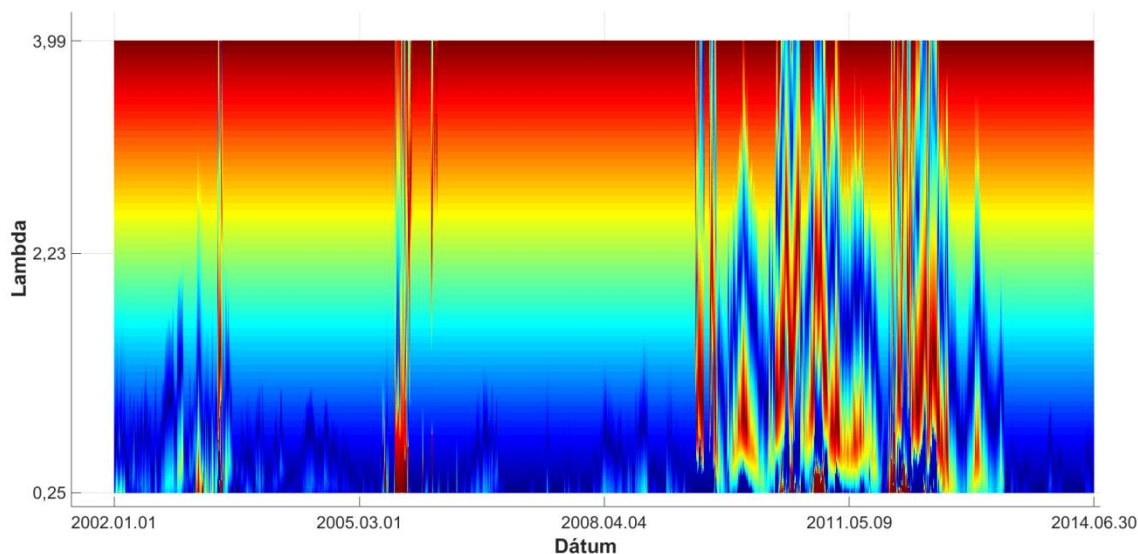
58. ábra Az RMSE alakulása az allglobal módszer esetén

Az előző ábrán látható trendek figyelhetők meg az 58. ábra alapján is, azaz például alacsony lambdák esetén jellemzően kisebb RMSE értékeket kapunk. Látható továbbá, hogy meredekebb emelkedés a volatilisabb időszakokban tapasztalható, ami a fix exponenciális késleltetéssel rendelkező modell időbeli rugalmatlanságát jelzi.



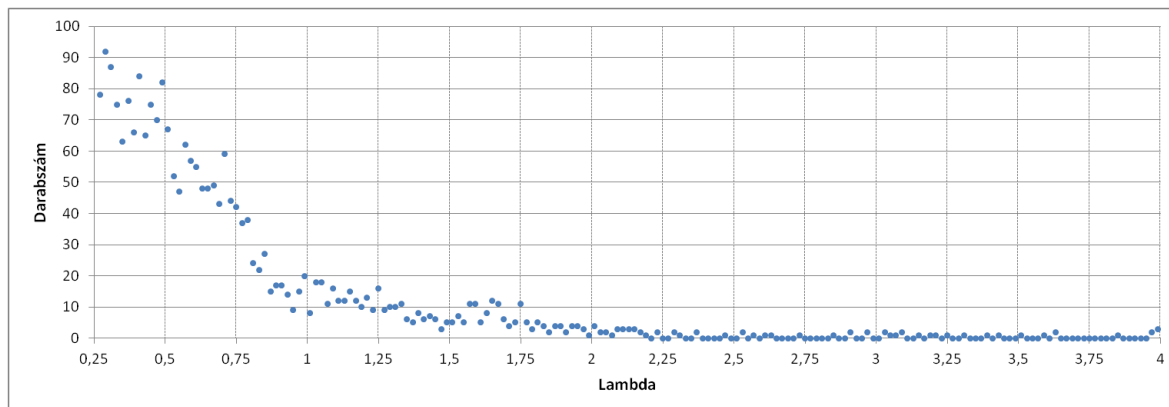
59. ábra A legjobb napi RMSE értékhez tartozó lambda

Az 59. ábra bemutatja, hogy az adott napon milyen lambda mellett kapjuk a legkisebb RMSE értékeket. Látható, hogy sokszor a 0,25 alsó határ adja a legpontosabb becslést, még kisebb lambdák esetén jobb illeszkedést kapnánk (azonban ekkor az első faktor alakulása romlik el az 46. ábra alapján). Megfigyelhetők továbbá szabályszerű emelkedések, illetve csökkenések is, ezek a gazdasági környezet változásának (mini rezsimváltások) következményei elsősorban.



60. ábra A napi sorrend az RMSE értékek alapján

A lambdák RMSE szerinti napi sorrendjét a 60. ábra mutatja be. A kékből pirosba való átmenet jelzi az egyre növekvő helyezést, azaz a sötétkék a legjobb, a vörös a legrosszabb illeszkedést jelenti. Ezen is láthatók (ahogy az 59. ábra is mutatta) a legjobb illeszkedést adó exponenciális késleltetések, melyek 2010-től kezdődően vesznek fel magasabb értéket, ebben az időszakban azonban jóval kevésbé függ az RMSE a lambda megválasztásától az 58. ábra alapján. Az optimalizáció stabilitását jelzi, hogy a legjobb helyezések valóban lokális minimumot jelentenek, ugyanis közelükben folytonosan emelkedik az illeszkedési hiba. Így ha egy adott napon az optimális paraméternek a legkisebb RMSE-t eredményező lambdát és a hozzátartozó faktorokat választjuk, akkor lényegében a Nelson-Siegel modell optimalizációjának első négy lépését végezzük el, ha a lambdára vonatkozó korlátozó intervallum a $[0,25; 3,99]$ és a lépésköz 0,02.



61. ábra Az egyes lambdákhöz tartozó legjobb napi RMSE-k száma

Ha az időszak során összesítjük az adott lambdához tartozó legjobb napi RMSE-k számát, akkor az 61. ábra adódik (a 0,25-höz tartozó 808-as értéket nem ábrázoltuk). Itt is megfigyelhetők a korábban említettek, azaz az exponenciális késleltetés növekedésével egyre csökkenő mértékben, de kevesebb napon lesz legkisebb az RMSE (azaz a lambdával emelkedik az RMSE). Továbbá az alsó határhoz tartozó érték alapján, ha kisebb lambdákat is vizsgálunk, akkor azok esetén csökken az átlagos négyzetes eltérés. A túl kicsi exponenciális késleltetések azonban a faktorok miatt nem alkalmazhatók.

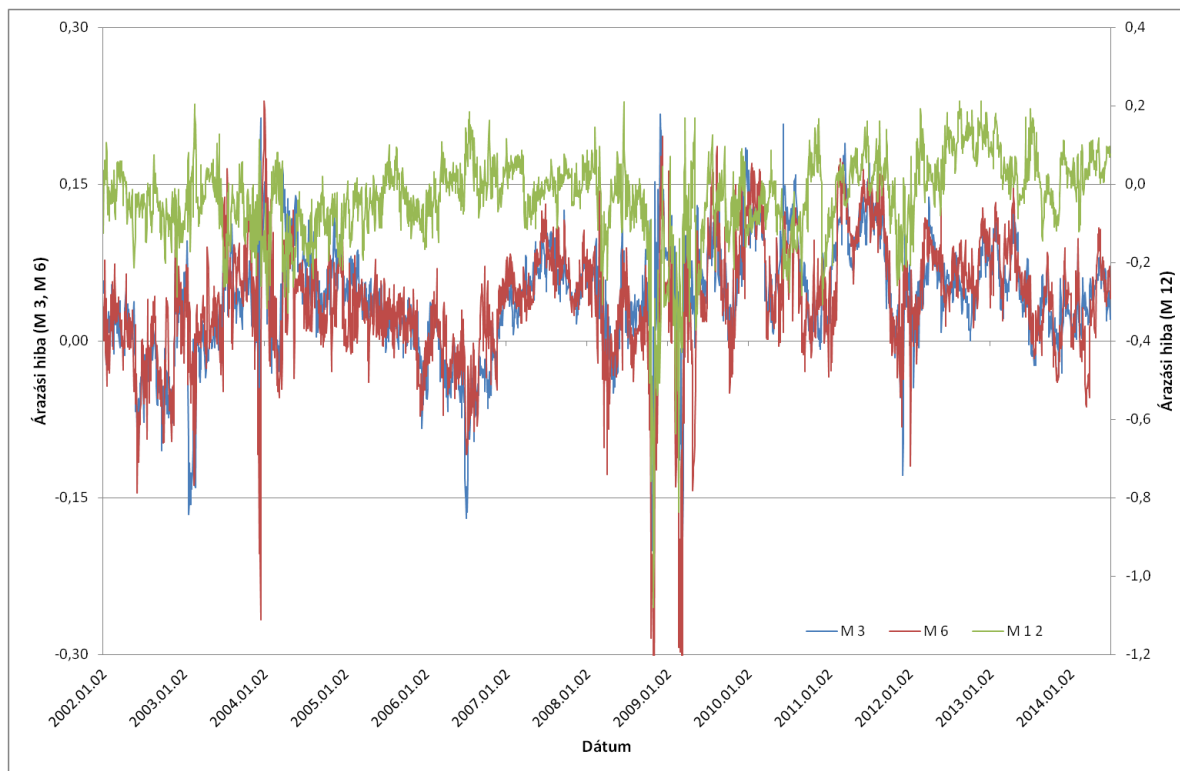
3.2.1.5 A BENCHMARK KÖTVÉNYEK VIZSGÁLATA KÜLÖNBÖZŐ HIBAFÜGGVÉNYEK MELLETT

A hibák elemzésénél többféle lehetőség adódik. Egyrészt tekinthetünk az árfolyamok vagy a lejáratig számított hozamok eltéréséből számított mutatókat. A számítási módszer alapján lehetnek az eltérések abszolútak, vagy négyzetesek, illetve súlyozottak vagy súlyozatlanok. Ez alapján a következő mutatókat számíthatjuk a becslt és megfigyelt árfolyamok eltéréséből (a súlyozott hibák esetén a képletek megegyeznek az árfolyammal súlyozottával):

	Abszolút	Négyzetes
Súlyozatlan	$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{P}_i - P_i $	$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{P}_i - P_i)^2}$
Árfolyammal súlyozott	$sMAE = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{P_i} \hat{P}_i - P_i }{\sum_{i=1}^N \frac{1}{P_i}}$	$sRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{P_i} (\hat{P}_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{P_i}}}$
Hátralévő futamidővel súlyozott	$wMAE(t)$	$wRMSE(t)$
Bid-ask spreaddel súlyozott	$wMAE(bid - ask)$	$wRMSE(bid - ask)$
Durationnel súlyozott	$wMAE(D)$	$wRMSE(D)$
Módosított durationnel súlyozott	$wMAE(D^*)$	$wRMSE(D^*)$

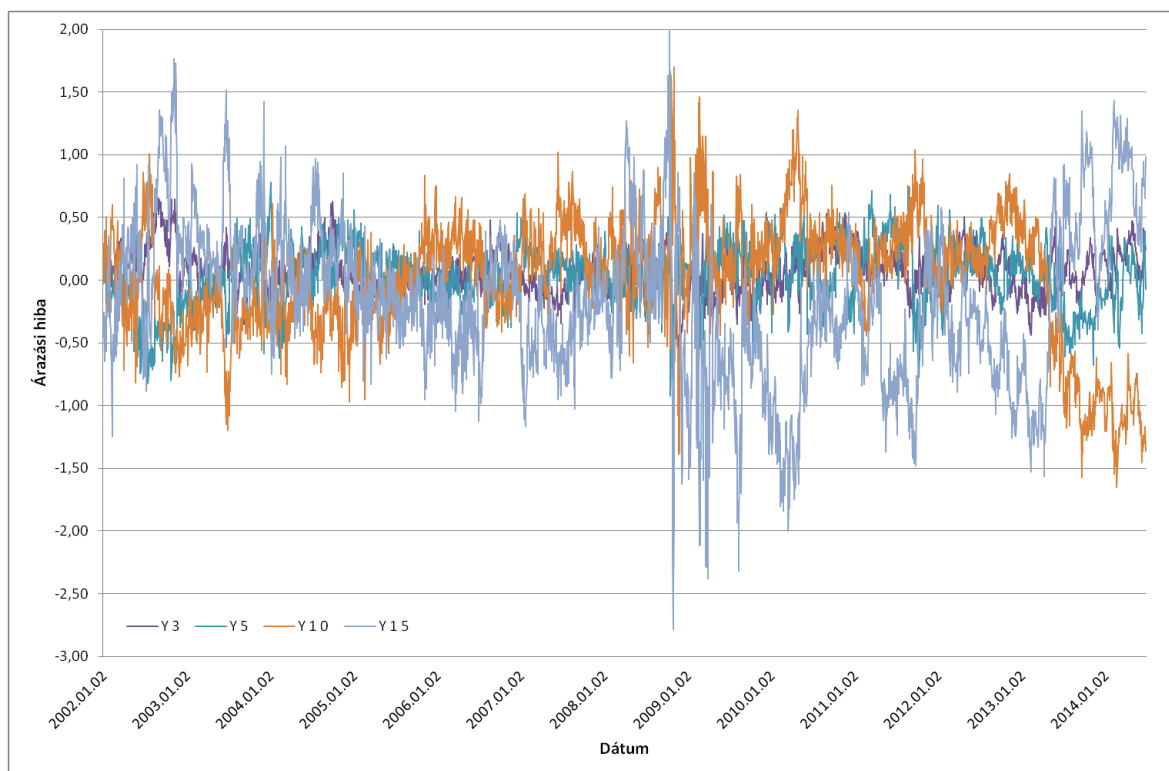
62. ábra Az árazás hibájának lehetséges számítási módjai

A benchmark papírokra végeztük el az árazási hibák elemzését, ugyanis ezek kellően likvid papírok ahhoz, hogy a megfigyelt árfolyamuk kicsi mérési hibát tartalmazzon. Habár a benchmark papírok folyamatosan változnak és a lejárataik sem állandók, azonban a modellek pontosságának főbb jellemvonásait megfigyelhetjük. Az elemzést az exponenciális késleltetésre vonatkozó 0,51-es feltételezés mellett végeztük el.



63. ábra Árazási hibák ($wRMSE(D^*)$) a benchmark diszkontkincstárjegyek esetén (Diebold-Li, 0,51)

A benchmark diszkontkincstárjegyek négyzetes, módosított durationnel súlyozott árazási hibáit tartalmazza az 63. ábra. Ezen megfigyelhető, hogy a két legrövidebb lejárat (3 és 6 hónap) esetén a hibák mozgása hasonló. Az 1 éves papír fejlődése látványosan eltérő, ezt támasztja alá a 25. ábra alacsonyabb korrelációja is. Mindhárom görbe esetén megfigyelhetőek trendszerű változások, azaz az árazási hibák nem véletlenek (ugyanis akkor nem lennének olyan időszakok, ahol végig alul-, vagy felülbecsüljük az árfolyamokat). Nagyságukat illetően látható, hogy az 1 éves papírok esetén nagyobbak az árazási hibák, mint a rövidebb lejáratúak esetén.



64. ábra Árazási hibák (wRMSE(D*)) a benchmark államkötvények esetén (Diebold-Li, 0,51)

Ugyanez figyelhető meg a benchmark kötvények esetén is, azaz a lejáráttal együtt nő az árazási hiba is. Ezen görbék esetén is láthatóak trendszerű változások, ezek az árazási formula (a diszkontált pénzáramlások összege) hiányosságait jelenthetik (azaz nem vesz figyelembe egyes faktorokat, mint például a lejáratú prémium). A korábbi vizsgálatokhoz hasonlóan itt is kiugró értékeket tapasztalunk a 2008-as válság időszakában.

	Prob($X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
$\lambda=0,25$	-1	29,67%	34,36%	59,46%	34,36%	49,58%	51,58%	44,18%
	1	70,33%	65,64%	40,54%	65,64%	50,42%	48,42%	55,82%
$\lambda=0,51$	-1	18,56%	20,98%	60,84%	36,52%	41,54%	42,15%	62,19%
	1	81,44%	79,02%	39,16%	63,48%	58,46%	57,85%	37,81%
$\lambda=1,01$	-1	23,39%	21,94%	67,15%	33,24%	26,16%	46,94%	83,37%
	1	76,61%	78,06%	32,85%	66,76%	73,84%	53,06%	16,63%

65. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (Diebold-Li, {0,25; 0,51; 1,01})

Az 65. ábra bemutatja, hogy a vizsgált időszak során mekkora valószínűséggel becsli alul- (-1-es sor), illetve felül (1-es sor) a Diebold-Li modell különböző lambda-k mellett a megfigyelt benchmark árfolyamokat. Az 50%-tól való túl nagy eltérés a modell hibáját vagy a helytelen árazási formulát is jelentheti. Ilyen szempontból a $\lambda = 0,25$ esetén kapjuk a legjobb eredményeket. Rövid távon a modell rugalmatlanságát jelzi, hogy az esetek több, mint kétharmadában felülbecsüljük az adatokat (látható továbbá, hogy nem lineáris a kapcsolat a lambda és a felülbecslés valószínűsége között). Érdekes eredmény továbbá, hogy a 12 hónapos benchmark papír esetében jellemző a megfigyelések alulbecslése a hozzá közeli lejáratoktól eltérően. Megfigyelhető továbbá, hogy a 15 éves kötvény esetén a kapott valószínűségek mennyire eltérőek az egyes exponenciális késleltetések esetén.

Prob($X_{t+1}=y \mid X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1-1	84,58%	74,08%	90,06%	75,77%	79,16%	83,28%	89,91%
-11	15,42%	25,92%	9,94%	24,23%	20,84%	16,72%	10,09%
1-1	3,52%	6,88%	15,37%	13,89%	14,86%	12,24%	16,51%
11	96,48%	93,12%	84,63%	86,11%	85,14%	87,76%	83,49%

66. ábra Az egymást követő hibák feltételes valószínűsége (Diebold-Li, 0,51)

A modell vagy az árazási formula hiányosságát jelezheti az egymást követő hibák vizsgálata. Ha minden faktort figyelembe vettünk, akkor az illesztési hibák véletlen zajok, ehhez szükséges, hogy a feltételes valószínűsége az egymást követő hibák előjelének megegyezzen a feltétel nélküli valószínűségekkel. Például, ha X_t jelöli a t . napi hiba előjelét (1 a felülbecslés, míg -1 az alulbecslés), akkor $\mathbb{P}(X_{t+1} = 1 \mid X_t = -1) = \mathbb{P}(X_{t+1} = 1)$.

Az 66. ábra alapján látható (az egyes sorokban az (x, y) párok szerepelnek), hogy az egymást követő hibák nem függetlenek, ugyanis például a 6 hónapos benchmark papír esetén alulbecslést 74,08% eséllyel követ újra alulbecslés, holott az alulbecslés feltétel nélküli valószínűsége az 65. ábra alapján csak 20,98%. Ugyanez figyelhető meg a többi papír esetén is, azaz alulbecslést (felülbecslést) nagy valószínűséggel követ alulbecslés (felülbecslés). Habár a másik két lambda esetén nem szerepel külön ábra, de ott is hasonló eredményeket kapunk.

Lehetséges másik megközelítés, hogy ha a becsült árfolyam a vételi és az eladási árfolyam közti sávba esik, akkor azt hiba nélkülinek tekintjük, így a hiba definíciója²⁰

$$\begin{cases} \hat{P}_t - P_i^{\text{eladási}}, & \text{ha } \hat{P}_t > P_i^{\text{eladási}} \\ \hat{P}_t - P_i^{\text{vételi}}, & \text{ha } \hat{P}_t < P_i^{\text{vételi}} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

	Prob($X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
$\lambda=0,25$	-1	16,22%	11,68%	15,19%	29,83%	41,86%	37,29%	32,21%
	0	40,99%	56,50%	73,23%	6,08%	10,94%	19,92%	21,36%
	1	42,79%	31,82%	11,58%	64,09%	47,20%	42,79%	46,43%
$\lambda=0,51$	-1	5,24%	2,96%	13,19%	32,53%	34,91%	30,18%	42,15%
	0	49,61%	68,21%	77,73%	5,66%	10,17%	18,40%	26,48%
	1	45,14%	28,83%	9,07%	61,81%	54,92%	51,42%	31,37%
$\lambda=1,01$	-1	13,00%	6,44%	20,53%	29,44%	23,13%	33,82%	56,18%
	0	38,96%	67,66%	67,12%	5,60%	6,82%	19,08%	28,89%
	1	48,04%	25,90%	12,36%	64,96%	70,05%	47,10%	14,93%

67. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (bid-ask sáv, Diebold-Li, {0,25; 0,51; 1,01})

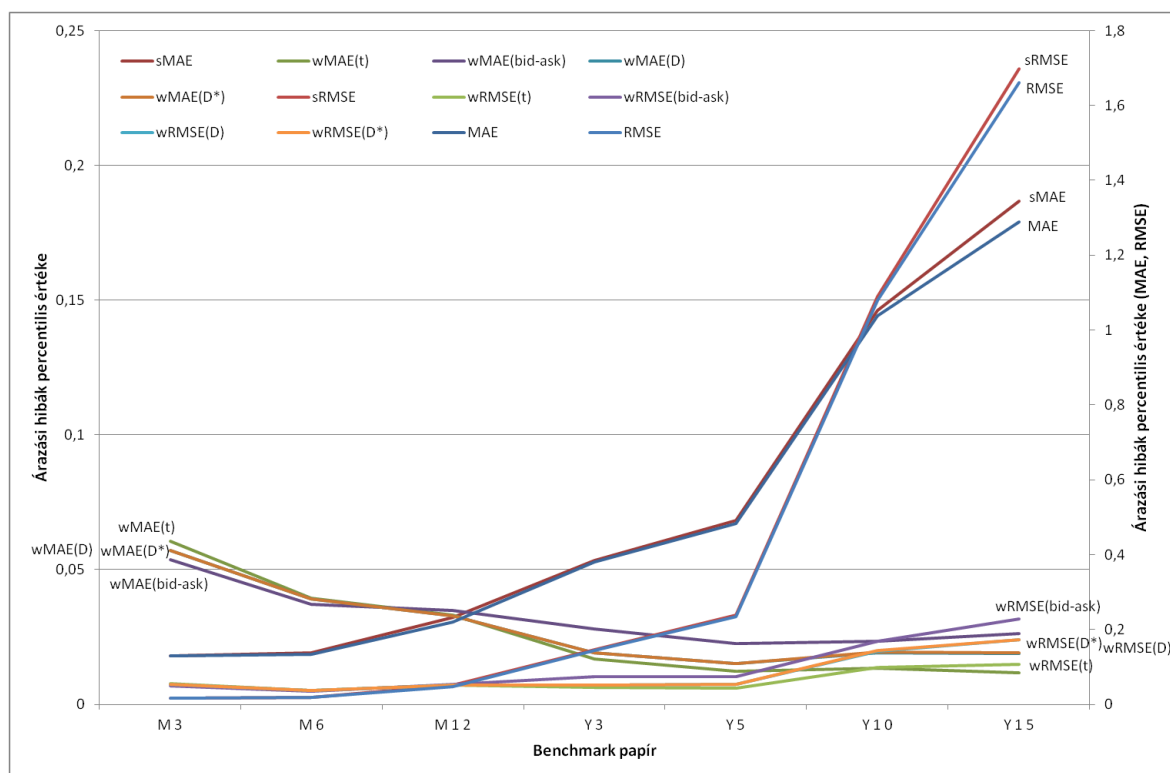
Azt vizsgálva, hogy a becslés beleesik-e a vételi- és eladási árfolyamok meghatározta sávba, azt tapasztaljuk, hogy rövid távon egyre növekvő mértékben illeszkedik jobban a modell, mint hosszú távon (például a 3 éves kötvény esetén csupán az esetek körülbelül 6%-ában kerülünk a sávba, 67. ábra). Továbbá érdemes megfigyelni, hogy jellemzően a becsült árfolyam felül esik ki a megfelelő sávból (kivéve a 12 hónapos és 15 éves papírt, ez összhangban van a korábbi eredménnyel).

²⁰ R. R. Bliss: Testing term structure estimation methods. Working Paper Series (Federal Reserve Bank of Atlanta), 96(12):1-42, 1996.

$\text{Prob}(X_{t+1}=y \mid X_t=x)$	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1-1	73,62%	65,22%	70,73%	72,70%	77,88%	78,25%	85,19%
-10	25,15%	33,70%	29,27%	2,08%	1,84%	3,94%	4,35%
-11	1,23%	1,09%	0,00%	25,22%	20,28%	17,80%	10,46%
0-1	2,66%	1,51%	4,97%	10,80%	5,70%	6,64%	7,29%
00	86,25%	90,42%	91,80%	75,57%	80,38%	84,97%	88,58%
01	11,09%	8,07%	3,23%	13,64%	13,92%	8,39%	4,13%
1-1	0,14%	0,00%	0,00%	13,33%	13,01%	10,45%	13,74%
10	12,19%	19,20%	27,66%	1,15%	2,52%	3,07%	3,69%
11	87,67%	80,80%	72,34%	85,53%	84,48%	86,48%	82,56%

68. ábra Az egymást követő hibák feltételes valószínűsége (bid-ask sáv, Diebold-Li, 0,51)

A továbbiakban csak 0,51-es exponenciális késleltetés mellett ábrázoltuk az eredményeket, azonban azok hasonlóak a másik két esetben is. Az 68. ábra feltételes valószínűségeit vizsgálva az eddigiekhez hasonlóan elmondható, hogy alul-/felül-/pontos becslést nagy valószínűséggel ugyanúgy alul-/felül-/pontos becslés követ. A váltásoknál eltérés tapasztalható a kincstárjegyek és kötvények között, ugyanis míg előbbiek esetén jellemzően pontatlan becslésből pontos lesz, míg utóbbiak esetén pontatlanból szintén pontatlan (azaz alulbecslésből felülbecslés, vagy fordítva). Ez azt mutatja, hogy a kötvények árfolyama jobban érzékeny a hozamgörbe változásaira.



69. ábra A benchmark állampapírok árazási hibájának percentilisei (Diebold-Li, 0,51)

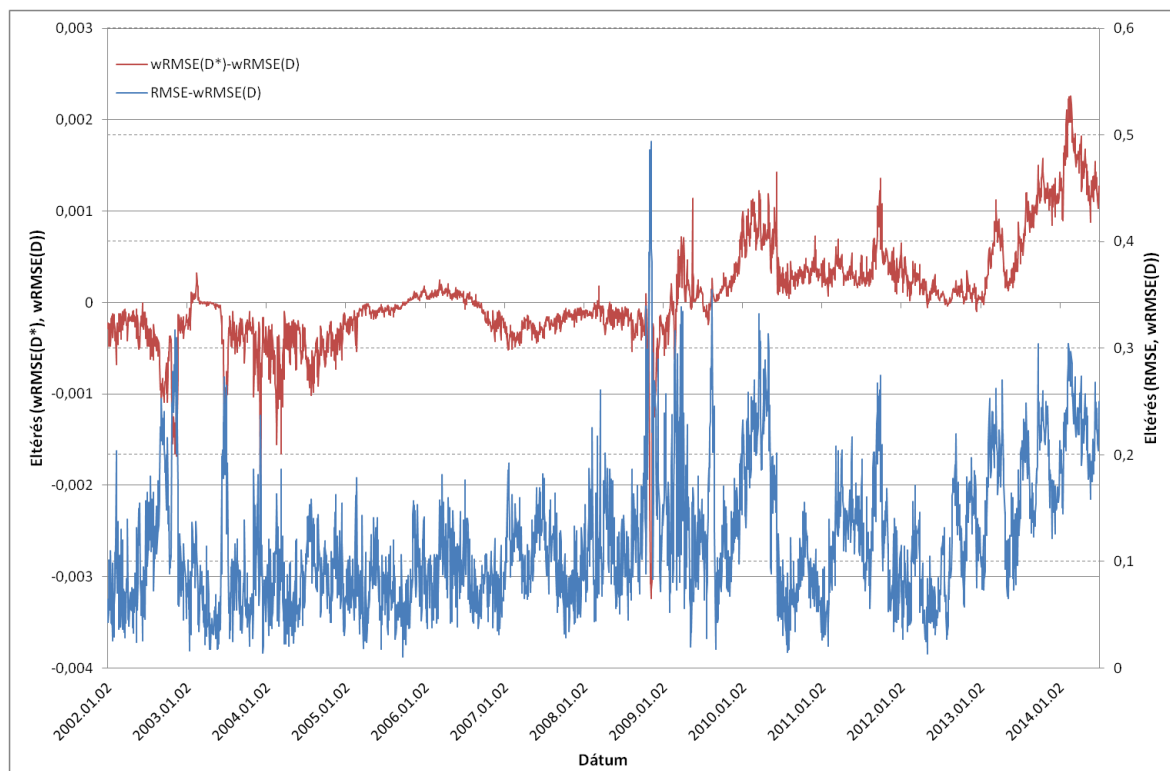
Ezután megvizsgáltuk, hogy milyen eredményeket kapunk, ha az 62. ábra különböző számítási módjai mellett határozzuk meg a hibákat. Fontos megemlíteni továbbá, hogy mivel az optimalizálás $wRMSE(D)$ mellett történik, így ez csupán utólagos számítás. Az 69. ábra a benchmark papírok napi árazási hibáinak 95%-os percentiliseit tartalmazza, azaz ennél az értéknél 95%-os valószínűséggel nem követünk el nagyobb hibát az adott papír napi árfolyamának becslése során. Így a szélsőséges napokat szűrjük ki, a korábbiak alapján

elsősorban a válság időszakának eredményeit. Látható, hogy a súlyozatlan és árfolyammal súlyozott átlagos abszolút és négyzetes eltérés azonos ütemben emelkedik a lejáráttal. Hasonlóan a lejáráttal nőnek az egyéb (lejárat, bid-ask spread, duration és módosított duration) súlyozású átlagos négyzetes eltérések is, míg az abszolút esetben csökkennek. Ezeknél a súlyozott hibáknál a súlyozás révén a különböző lejáratú papírok becslési hibája nagyságrendileg megegyezik. Megfigyelhető továbbá, hogy a percentilis értékek az abszolút és négyzetes esetben rövid távon jobban megegyeznek, mint hosszú lejáratú papírok esetében.

	MAE	sMAE	wMAE (t)	wMAE (bid-ask)	wMAE (D)	wMAE (D*)	RMSE	sRMSE	wRMSE(t)	wRMSE (bid-ask)	wRMSE (D)	wRMSE (D*)
MAE	1,0000											
sMAE	0,9960	1,0000										
wMAE(t)	0,5946	0,6108	1,0000									
wMAE(bid-ask)	0,6894	0,7081	0,9546	1,0000								
wMAE(D)	0,6628	0,6781	0,9914	0,9705	1,0000							
wMAE(D*)	0,6648	0,6800	0,9912	0,9705	1,0000	1,0000						
RMSE	0,9750	0,9727	0,4942	0,5945	0,5651	0,5675	1,0000					
sRMSE	0,9725	0,9756	0,5063	0,6083	0,5765	0,5789	0,9980	1,0000				
wRMSE(t)	0,9101	0,9151	0,8196	0,8685	0,8583	0,8598	0,8599	0,8638	1,0000			
wRMSE(bid-ask)	0,9224	0,9331	0,7198	0,8432	0,7760	0,7777	0,8951	0,9027	0,9539	1,0000		
wRMSE(D)	0,9478	0,9523	0,7597	0,8317	0,8147	0,8164	0,9141	0,9174	0,9878	0,9704	1,0000	
wRMSE(D*)	0,9483	0,9526	0,7575	0,8295	0,8126	0,8144	0,9153	0,9186	0,9874	0,9703	0,9999	1,0000

70. ábra Korreláció az benchmark állampapírok árazási hibái között (Diebold-Li, 0,51)

Az 70. ábra mutatja a különböző mutatószámok közti korrelációt a napi becslések esetén (az optimalizálás az összes papírra történt, azonban most csak a benchmark papírok hibáit összegeztük). Itt látható, hogy a súlyozatlan és árfolyammal súlyozott átlagos abszolút, illetve négyzetes eltérés között magas a korreláció. Megfigyelhető továbbá, hogy a különböző súlyozások között is nagyon erős, de az előzőnél gyengébb a kapcsolat a két esetben, illetve hogy közepesnél erősebb kapcsolat van a különböző súlyozású átlagos abszolút és négyzetes eltérések között. A MAE és RMSE közti magas korreláció alapján a két mutató közti választás tetszőleges.



71. ábra Eltérés a négyzetes hibafüggvények között az összes állampapírra 0,51-es lambda mellett

A duration és módosított duration közti súlyozás esetén az előző két ábra alapján tetszőlegesen választhatunk a közel megegyező eredmények miatt (itt már az összes papírt figyelembe vettük). Ezt támasztja alá az 71. ábra is, ahol látható, hogy a kettő között a maximális eltérés csupán 0,002, miközben értékük körülbelül 0,03 és 0,7 között mozog. A súlyozatlan és durationnel súlyozott átlagos négyzetes eltérés különbsége az időszak elején egy fix érték között ingadozott, a volatilitás a válság során emelkedett, majd az időszak végi hozamcsökkenéssel párhuzamosan trendszerűen emelkedett.

Az eddigiek során csak egy megfelelően választott exponenciális késleltetés ($\lambda=0,51$) mellett végeztük el a vizsgálatot. Az eredmények alapján az alkalmazott hibafüggvény számítási módja esetén elsődlegesen azt kell eldöntenünk, hogy abszolút vagy négyzetes eltéréseket használjunk-e. A kettő között nem tehető objektív különbség, így mivel a négyzetes jobban kiszűri az extrém hibákat eredményező megfigyeléseket célszerű azt használni. Láttuk, hogy a különböző súlyozások hasonló eredményeket adnak, illetve a portfólió modellben a durationnek kiemelt jelentősége van, így elfogadható az azzal való súlyozás.

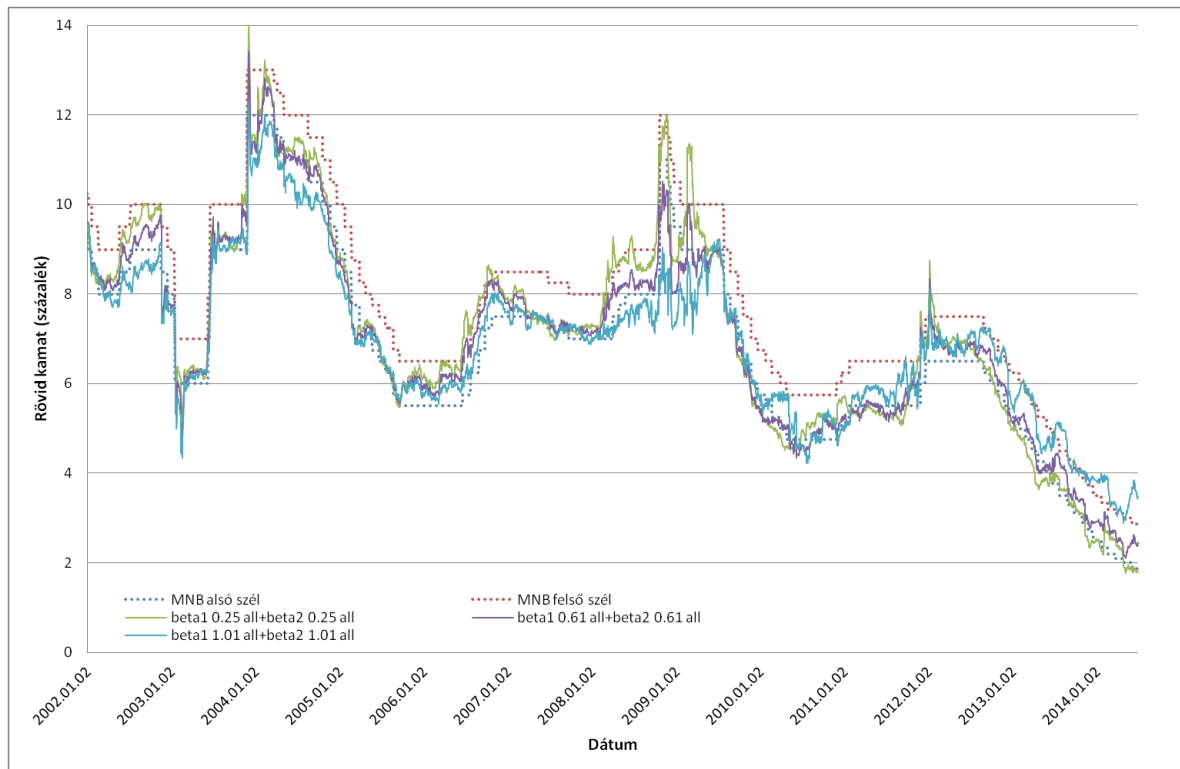
3.2.1.6 A RÖVID KAMAT ALAKULÁSA

A korábbiak alapján az első két faktor összege a nagyon rövid (pillanatnyi) kamattal egyezik meg. Ilyen nem figyelhető meg közvetlenül a piacon, ezért valamilyen e célnak nagyjából megfelelő kamatlábhoz kell viszonyítanunk. Erre három különböző lehetőséget vizsgáltunk meg,

- az MNB alapkamatot,
- az overnight BUBOR-t,
- és a 3 hónapos benchmark hozamot.

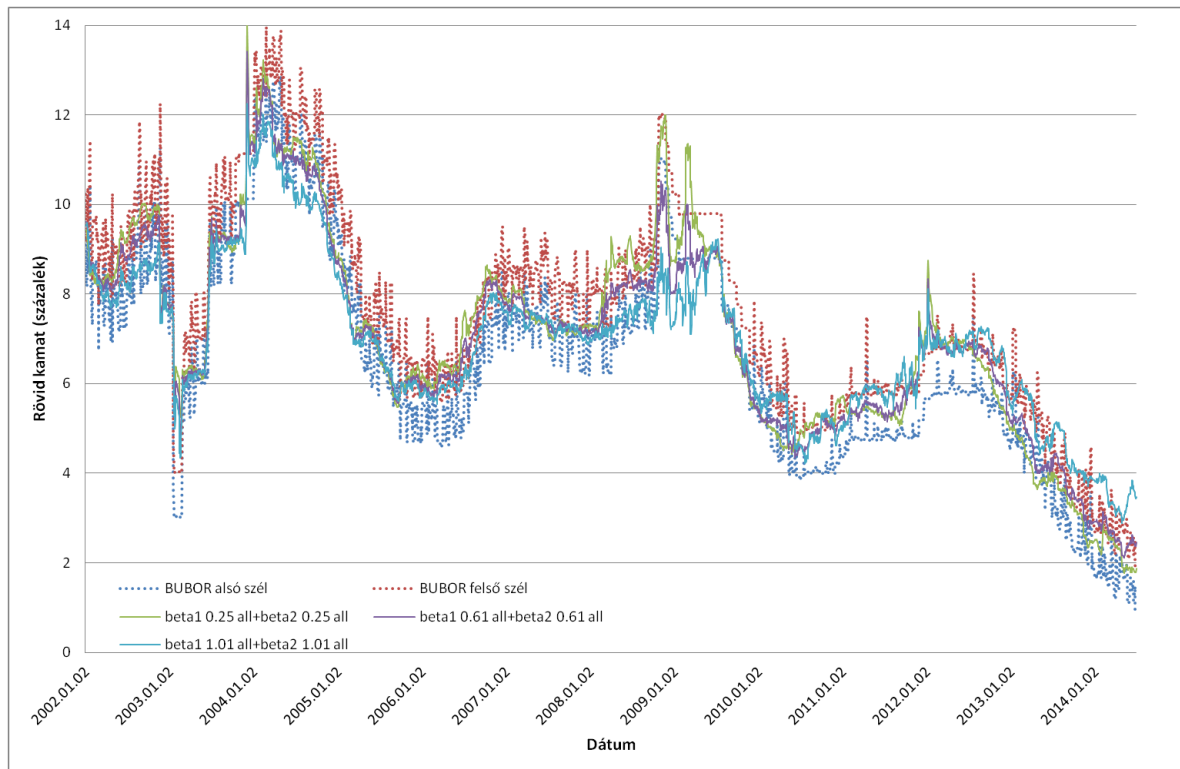
A jelenlegi vizsgálat keretében csupán azt elemeztük, hogy a kapott eredmények alapján $\beta_1 + \beta_2$ az előzőekben felsorolt hozamok közelébe esik-e (50 bázispontos sávhatárt választottunk). A későbbiek folyamán (a Nelson-Siegel modellnél is) megvizsgáljuk majd ezek beépítésének lehetőségét az optimalizálásba korlátként (azaz nem csak a pozitivitást követeljük majd meg).

A szemléltetéshez az eddigi tapasztalatok alapján 0,25-ös, 0,61-es és 1,01-es exponenciális késleltetéseket választottunk. A 72. ábra bemutatja a MNB alapkamathoz tartozó sávhatárokat, a három λ -hoz tartozó rövid kamatok (faktorösszegek) idősorával egyetemben. Ezen megfigyelhető, hogy $\beta_1 + \beta_2$ jellemzően együtt mozog az alapkamattal, illetve, hogy a legtöbb sávhatársértés a 2008-as válság időszakában történt, amikor a faktorok volatilisabbak voltak. További magyarázó tényező, hogy az állampapír-árfolyamokon keresztül a faktorok gyorsabban (naponta) reagálnak a piaci fejleményekre, mint az MNB alapkamat (havonta). Ahogy a nagyobb kamatemelések esetén látható, a faktorok alkalmazkodnak az alapkamat szintjéhez. Ebből következően érdemes lehet a későbbiekben megvizsgálni az alapkamat mint makrogazdasági faktor beemelését a hozammodellbe.



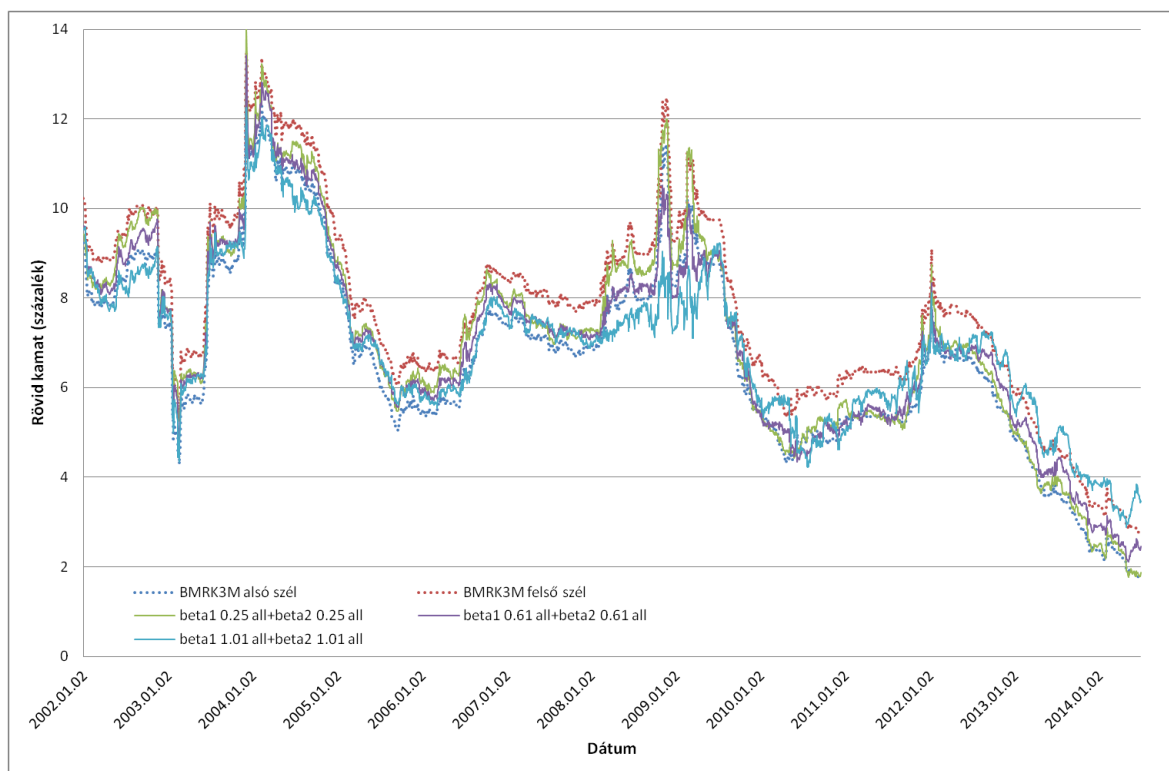
72. ábra A rövid kamat és az MNB alapkamathoz tartozó sáv alakulása (Diebold-Li, $\{0,25, 0,61, 1,01\}$)

A overnight BUBOR már azonnal reagál a piaci változásokra, azonban a napi változásai túlzottan volatilisek (így az ilyen korláttal becsült faktorok alapján készülő előrejelzés túlzottan volatilis lenne). A 73. ábra alapján a becslésből kapott rövid kamatok követik a sávhatárok általi trendeket. A sávnak való megfelelés optimalizálásba való beillesztése azonban a faktorok túlzott volatilitását eredményezheti, ami az idősoros előrejelzés minőségét ronthatja. Látható továbbá, hogy például $\lambda = 1,01$ esetén az időszak elején a sáv alsó, míg végén a felső határát sérti meg a rövid kamat, ami rezsimváltásra utal.



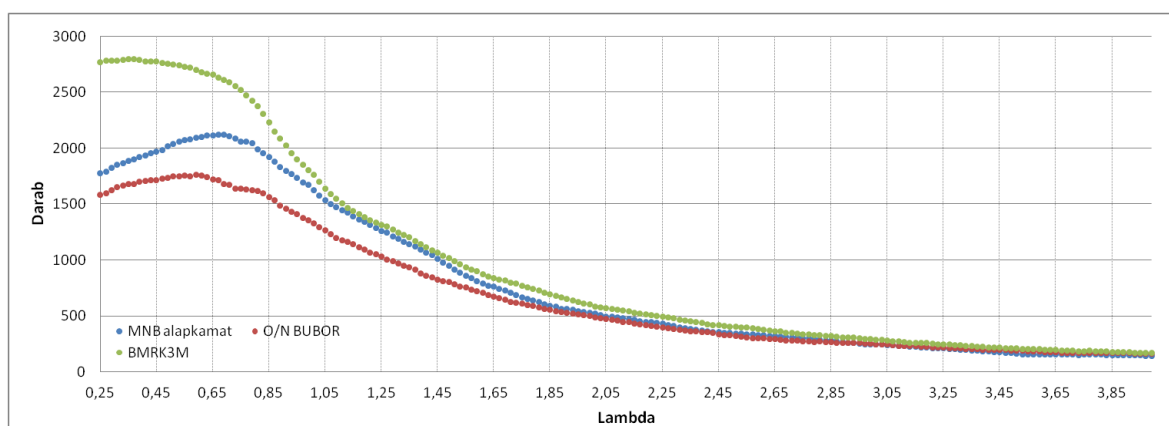
73. ábra A rövid kamat és az O/N BUBOR-hoz tartozó sáv alakulása (Diebold-Li, {0,25, 0,61, 1,01})

A legjobb választásnak a reakció és volatilitás szempontjából a 3 hónapos benchmark hozam tűnik. A 74. ábra alapján ekkor is igazak a sávhatár-sértésekre tett megállapítások, illetve megfigyelhető, hogy a két alacsonyabb lambda esetén a rövid kamat általában a sávhatár alsó határánál mozog. A 3 hónapos benchmark hozamhoz való viszonyítás viszonylagos hátránya azonban, hogy felhasználtuk már magához a faktorok becsléséhez is, így a fejlődéseik között a modelltől adódóan van összefüggés. Előnye azonban, hogy ezzel a hozamgörbe nagyon rövid oldalát, ahova már nem esik megfigyelés, korlátok közé szorítjuk a legrövidebb lejáratú adat alapján.



74. ábra A rövid kamat és a 3 hónapos benchmark hozamhoz tartozó sáv alakulása (Diebold-Li, {0,25, 0,61, 1,01})

Eddig csupán három lambda mellett tekintettük a megfelelést a rövid kamatok idősora alapján. A 75. ábra az összes vizsgált lambda esetén tartalmazza a megfelelő sávba esések számát. Ez alapján elmondható, hogy $\beta_1 + \beta_2$ legtöbbször a 3 hónapos benchmark esetén esik a megfelelő intervallumba, míg az overnight BUBOR esetén a legkevesebbszer. Az ábráról leolvasható továbbá, hogy alacsonyabb lambda-k mellett érik el a görbék maximumukat, ahol a legtöbbször esnek a megfelelő sávba a rövidkamatok. Ezek egészen pontosan az MNB alapkamat esetén 0,69-es, az overnight BUBOR esetén 0,59-es és a 3 hónapos benchmark hozam esetén pedig 0,37-es exponenciális késleltetést jelentenek.



75. ábra Az egyes lambda-kra a megfelelő sávba esések száma a vizsgált időtáv alatt

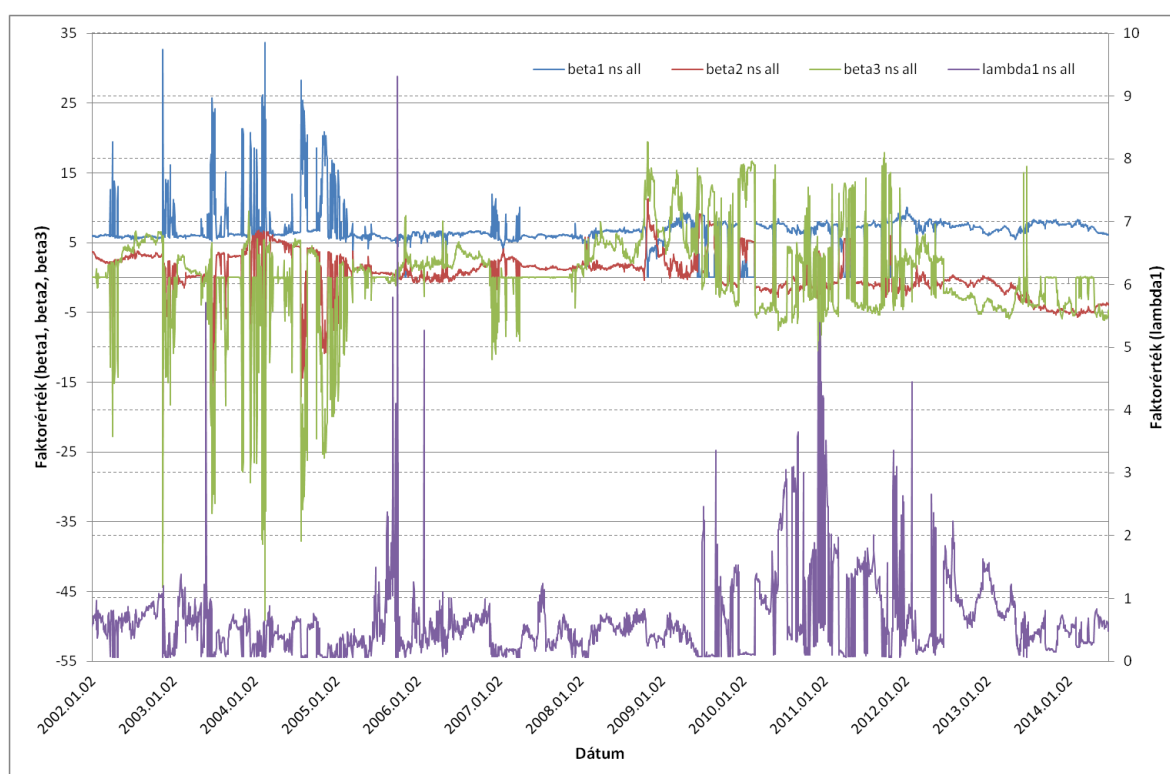
Az első két faktor összegeként adódó rövid kamatok vizsgálatához az elméleti megfontolások (reagálás ideje, volatilitás) alapján így a 3 hónapos benchmark hozam javasolt. Az erre vonatkozó korlátot az optimalizálásba is be lehet építeni a későbbiekben, az MNB alapkamat pedig további faktorként lehet használható. A sávba esések vizsgálata alapján az alacsony exponenciális késleltetések adnak megfelelő eredményeket.

3.2.2 Nelson-Siegel Modell

A Diebold-Li modell eredményei alapján tehát nem választható olyan állandó exponenciális késleltetés, amely a vizsgált szempontok mindegyike esetén a legjobb eredményeket adja. A választás nehézségén túl azt is bemutattuk, hogy a paraméter állandóságának feltevése sem helyes. Ezért a továbbiakban ennek elvetésével a lambda paramétert is becsültük. Az így kapott Nelson-Siegel modellek eredményeit mutatjuk be ebben a fejezetben.

3.2.2.1 ÁLTALÁNOS NELSON-SIEGEL MODELL

Először anélkül becsültük a Nelson-Siegel modellt, hogy az exponenciális késleltetés alakulására bármilyen feltételezést tettünk volna. Ahogy látható a továbbiakban, ennek következménye a faktorok és a lambda magas volatilitása.



76. ábra A faktorok alakulása (Nelson-Siegel)

A faktorok alakulása kapcsán megfigyelhetőek magas napi kilengések a lambda alakulásában (76. ábra). Ez egyrészt az idősoros előrejelzést teszi lehetetlenné, másrészt a faktorokban is kilengést okoz, ugyanis a megfelelő illeszkedés miatt kompenzálni kell a lambda kiugrását. Ezen extrém értékek további hátránya, hogy a faktorok kevésbé lesznek értelmezhetőek a vizsgált időtávon.

	beta1 ns all	beta2 ns all	beta3 ns all	lambda1 ns all
ÁTLAG	6,7386	0,4520	0,2788	0,6367
SZÓRÁS	2,8182	3,2029	6,6440	0,6216
5%-OS PERCENTILIS	2,8139	-4,8239	-7,8709	0,0716
95%-OS PERCENTILIS	9,1050	5,4854	11,4906	1,7088
KORRELÁCIÓ (1 hét)	0,4863	0,6117	0,5788	0,4283
KORRELÁCIÓ (1 hónap)	0,1606	0,3642	0,2697	0,2632
KORRELÁCIÓ (1 év)	-0,0315	0,0875	0,0906	0,0401

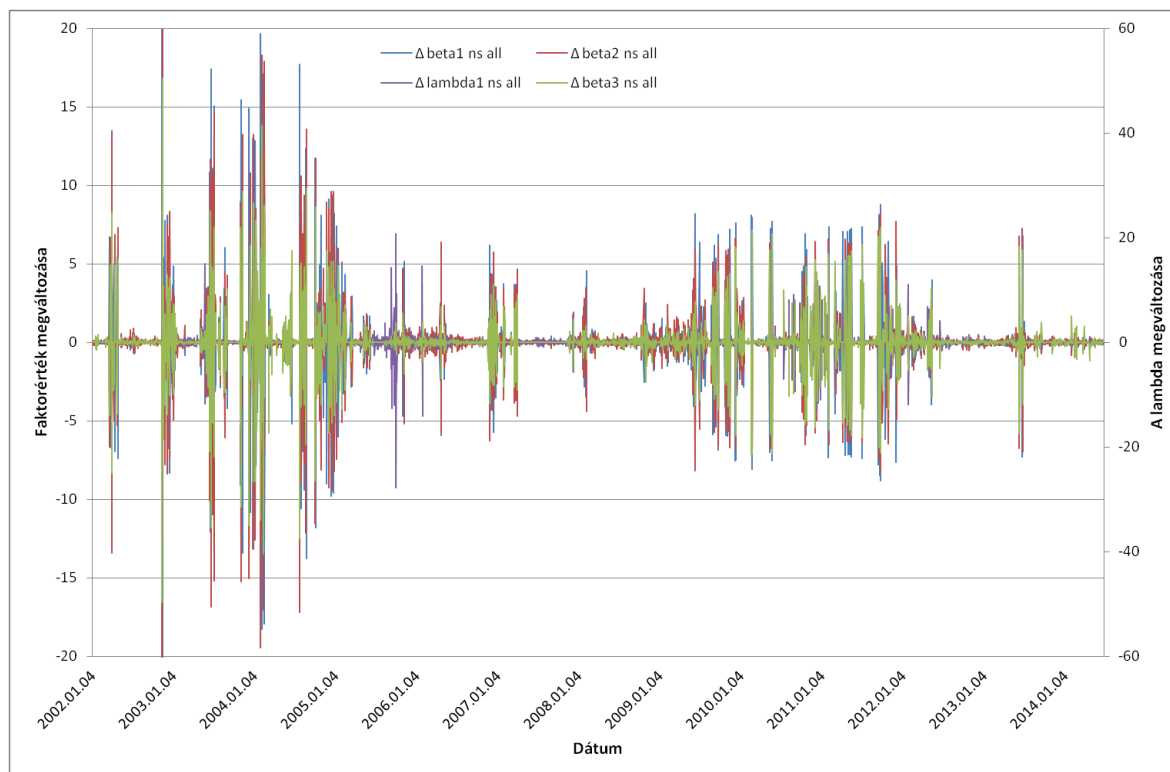
77. ábra A faktorok statisztikai mutatói (Nelson-Siegel)

Jellemzően a lambda értéke 1-nél kisebb, átlagos értéke a 77. ábra alapján 0,6367, ami tovább erősíti a Diebold-Li modellnél kapott eredményeket, miszerint kis lambdát érdemes választani. A β_2 alacsony értéke a faktor meredekségként való értelmezhetősége esetén jellemzően lapos hozamgörbére utal. A három faktor magas szórásából pedig a hozamgörbe alakjának változatosságára következtethetünk. Látható továbbá az ábrából, hogy egyik faktor esetén sincs erős kapcsolat a korábbi (1 hetes, hónapos vagy éves) értékkel, ami szintén az idősoros elemzés nehézségét jelzi.

	SZINT		MEREDÉKSÉG		GÖRBÜLET	
	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték
BETA1 NS	0,97587406	0,0000	0,003213389	0,3290	0,086365318	0,0000
BETA2 NS	0,294211619	0,0000	-0,66370155	0,0000	-0,001041266	0,8854
BETA3 NS	0,287479592	0,0000	0,25257901	0,0000	0,08567798	0,0000
F szignifikanciája	0		0		0	
r-négyzet	0,978643		0,565686		0,396899	

78. ábra A faktorok regressziós vizsgálata (Nelson-Siegel)

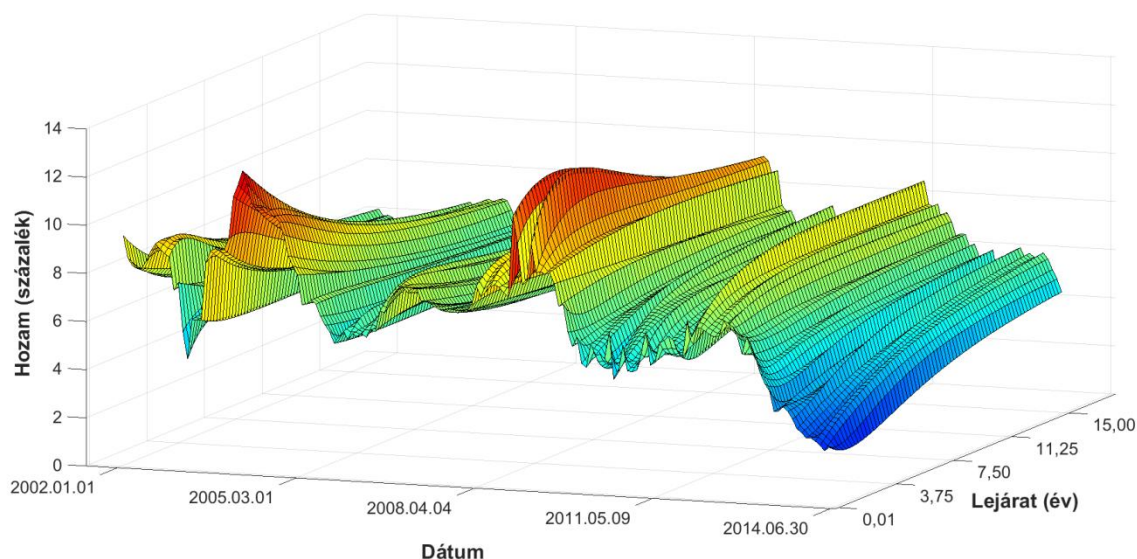
Az extrém értékek miatt a faktorok értelmezhetősége szintként, meredekségként és görbületként kevésbé lehetséges a 78. ábra eredményei alapján, mint a Diebold-Li modellnél lehetett (44. ábra). A Nelson-Siegel modellnél a konstans nélküli regressziók vezetnek jobb illeszkedésre, és a korábbi elméleti megfontolás miatt is ennek eredményét mutatjuk be. A szint esetén nagy a modell magyarázó ereje, így az első faktor értelmezhető szintként (közel 0,98 az együttható), habár a másik két faktor 0,29-es együtthatója miatt sem elhanyagolható. A meredekség esetén annak szórását közepes mértékben magyarázzák a faktorok (0,57-es R^2), illetve a második faktor együtthatója a legnagyobb abszolút értékű, így az azonosítható leginkább meredekségként. Az empirikus görbület regressziós vizsgálatának eredményeként elmondható, hogy egyik faktort (vagy azok lineáris kombinációját) sem azonosíthatjuk azzal.



79. ábra A faktorok megváltozásainak alakulása (Nelson-Siegel)

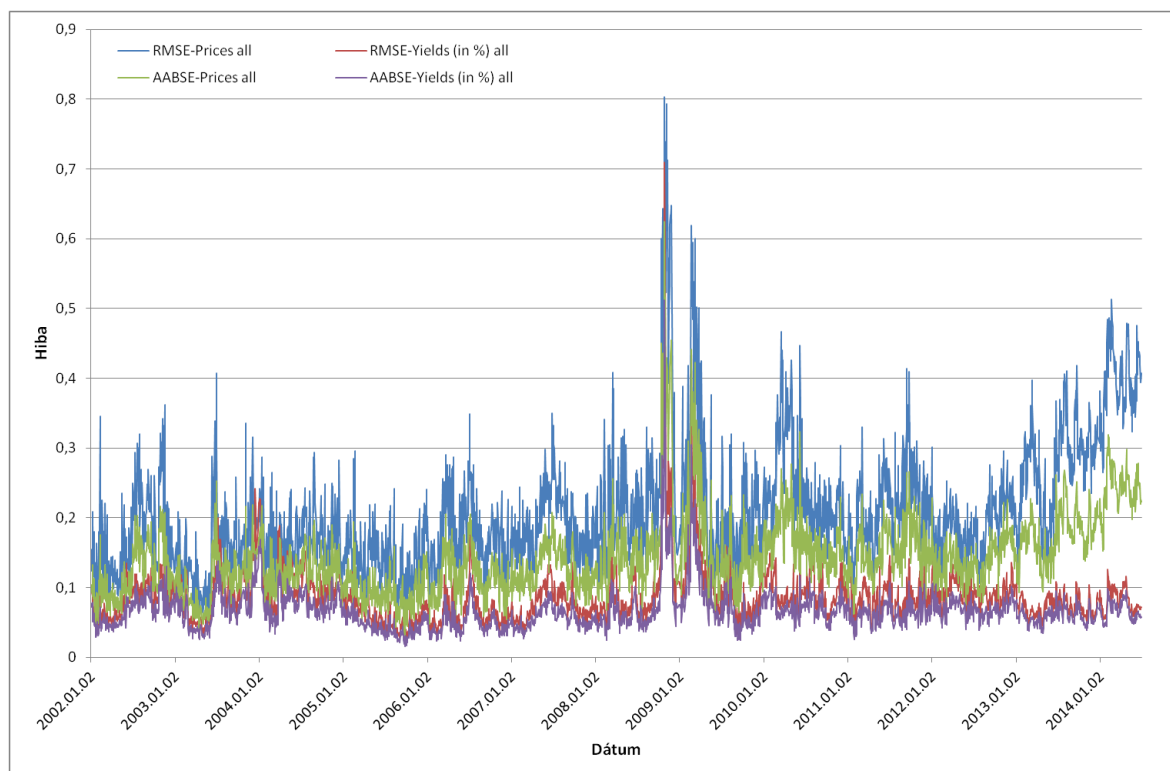
A faktorok megváltozásait ábrázolva (79. ábra) látható, hogy az exponenciális késleltetés jelentős megváltozása esetén a faktorok is szignifikánsan változnak. Ez annak köszönhető,

hogy a modell a faktor értékeken keresztül korrigálja az extrém lambdákat. Az extrém változásokat nem feltétlen magyarázzák a gazdasági környezet kilengései (pl 2008-as válság), így az elsősorban azok az optimalizációs eljárások köthetőek.



80. ábra A hozamgörbe alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között (Nelson-Siegel)

A 76. ábra extrém faktor-alakulása ellenére, ahogy a 80. ábra is mutatja, a hozamgörbék idősorában nem tapasztalhatóak kilengések, egyedül a rövid oldali hozamok ugranak meg egyes időszakokban (ami persze nemkívánatos tulajdonság).



81. ábra A becslés hibája a Nelson-Siegel modell esetén

A Nelson-Siegel modell becslése esetén az árfolyamok (-Prices) és a lejáratig számított hozamok (-Yields) átlagos négyzetes (RMSE-) és abszolút (AABSE-) hibájának alakulását ábrázoltuk (81. ábra). Látható a négy görbe alakulásában, hogy a 2008-as válság során maguk

a megfigyelések is tartalmaztak mérési hibát, ezáltal nem lehetett pontosan illeszteni a hozamgörbét. Megfigyelhető továbbá eltérések a négy görbe alakulásában. Ilyen például, hogy a vizsgált időszak végén az árfolyamok hibájánál trendszerű emelkedés figyelhető meg a harmadfokú spline módszerhez hasonlóan (33. ábra), míg a lejáratig számított hozamokénál nem.

Prob($X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1	31,08%	24,71%	59,30%	31,15%	47,10%	47,36%	54,02%
1	68,92%	75,29%	40,70%	68,85%	52,90%	52,64%	45,98%

82. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (Nelson-Siegel)

A benchmark kötvények alul- és felülbecslésének feltétel nélküli valószínűségeinél a korábbiak figyelhetők meg. Rövidtávon a 12 hónapos papírt kivéve felülbecslés jellemző, míg a hosszú lejáratokon (5, 10 és 15 év) körülbelül egyformán (ez véletlenszerű hibára utal) becsüljük alul és felül a megfigyeléseket. Hasonló ábrát kaptunk a harmadfokú spline modellnél is (34. ábra), míg a Diebold-Li modellek esetén alacsony exponenciális késleltetésnél (65. ábra). A 12 hónapos papír eltérő viselkedése alapján arra következtethetünk, hogy az nem az exponenciális késleltetés megválasztásától függ.

	Prob($X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
CS	-1	3,67%	2,12%	18,18%	27,16%	39,64%	36,36%	34,62%
	0	45,27%	60,20%	63,13%	7,05%	10,94%	19,05%	21,49%
	1	51,06%	37,68%	18,69%	65,80%	49,42%	44,59%	43,89%
NS	-1	8,24%	2,67%	12,19%	27,61%	39,99%	34,36%	40,54%
	0	62,00%	82,85%	77,06%	5,47%	10,68%	18,69%	23,65%
	1	29,76%	14,48%	10,75%	66,92%	49,32%	46,94%	35,81%

83. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (bid-ask sáv, harmadfokú spline és Nelson-Siegel)

A 83. ábra alapján látható, hogy a Nelson-Siegel modell szignifikánsan jobb eredményeket ad a rövid távú papírok esetén, ugyanis a becslés többször kerül a megfigyelt vételi és eladási árfolyam közé. 3 éves lejáratától kezdődően pedig a két modell hasonlóan viselkedik. Így elmondható, hogy ebből a szempontból rövidtávon a Nelson-Siegel modell jobban becsül, mint a harmadfokú spline módszer.

A faktorok közgazdasági értelmezhetősége, illetve kedvezőtlen idősoros tulajdonságaik miatt szükséges az exponenciális késleltetésre korlátokat megadnunk. Ez azzal az előnnyel is jár, hogy sokkal gyorsabbá válik a becslési eljárás. Ennek megadását vizsgáljuk a következő részben. **Tehát az eddigi vizsgálatok alapján elmondható, hogy az exponenciális késleltetésre vonatkozó korlátok nélküli Nelson-Siegel modell használata nem javasolt az optimális portfólió modellben.**

3.2.2.2 KORLÁTOZOTT NELSON-SIEGEL MODELL

Az exponenciális késleltetés korlátozására három lehetőséget tekintettünk át:

- a harmadfokú spline módszernél kapott lokális szélsőértékek alapján
- a Diebold-Li modelleknél kapott legkisebb négyzetes hibák alapján
- mozgóátlagolással.

A 29. ábra ábrázolta a rövid és hosszú lejáratú lokális szélsőértékeket, amik púpra vagy U-alakra utaltak. Egyrészt ezek lehetnek módszerbeli következmények, másrészt ezek annyira volatilisak, hogy a rájuk illesztett interpolált görbe már magában pontatlan volna. Így ha ezekből számítanánk a lambdákhoz korlátokat, akkor az torzítná a modellt. A köztes lejáratú

szélsőértékek utalhatnak valódi görbületre, azonban ezek kis számuk, illetve a kiválasztásuk problematikája miatt sem használhatók teljesen megalapozottan. Így ezt a lehetőséget nem vizsgáltuk részletesen.

A Diebold-Li modelleknel korábban már összehasonlítottuk a négyzetes hibákat az 61. ábra alapján. Ha minden napra korlátként a legkisebb RMSE-hez tartozó lambda egy szűk környezetét választanánk, akik némely esetben a kis exponenciális késleltetés miatt szélsőséges faktorokat kapnánk. Így ez a módszer sem kellően megalapozott.

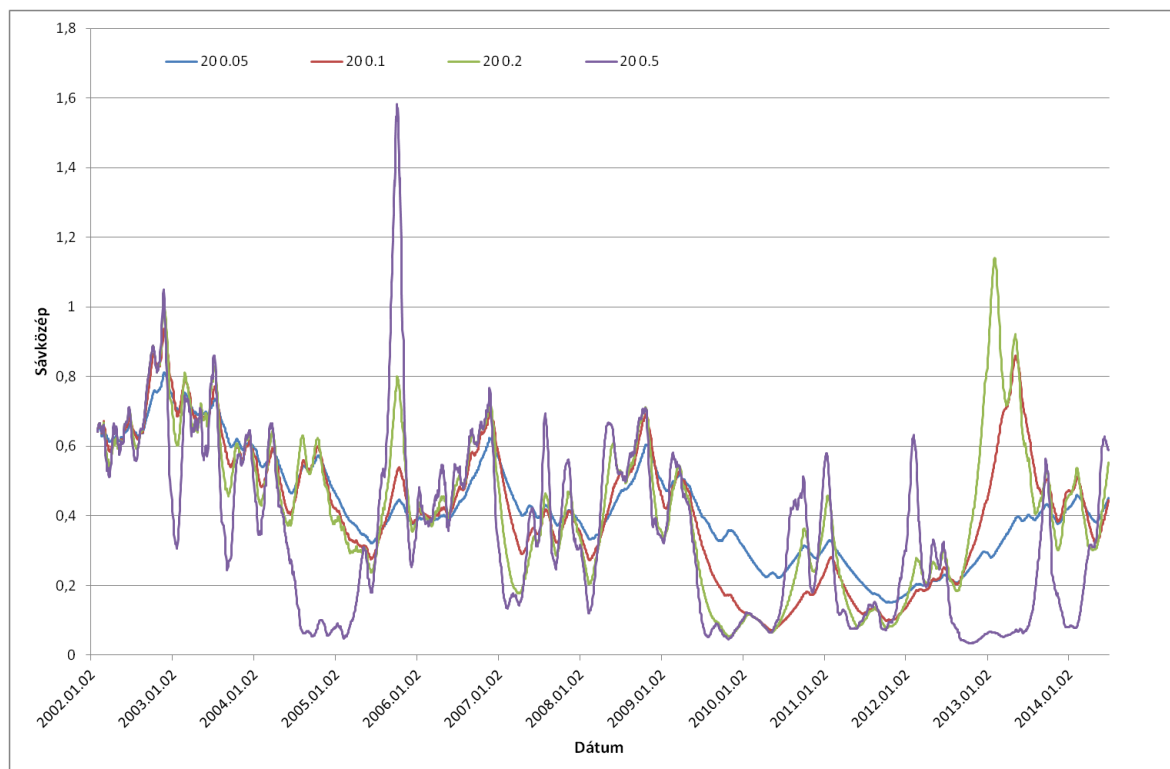
Részletesen a mozgóátlagolást vizsgáltuk. Ez azt jelentette, hogy különböző késleltetések (5, 10, 20, 60, 120 és 250 nap) mellett azoknak megfelelően az időszak elején minden napra allglobal becslést végeztünk korlátok nélkül. Majd ezután a t . napi becslésnél a lambda korlátja az előre választott T tűréshatár (5, 10, 20, 50 százalék) és K késleltetés mellett a következőképpen nézett ki:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^K \lambda_{t-i}}{K} (1 - T), \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_{t-i}}{K} (1 + T) \right).$$

A képletből az is látszik, hogy egyenlően súlyoztuk a korábbi időszakok exponenciális késleltetéseit (további vizsgálat lehet, ha az időben közelebbi becslült lambdák nagyobb súlyt kapnak). A vizsgált késleltetések és tűréshatárok száma alapján így újabb 24 becslést végeztünk, a továbbiakban az így kapott eredményeket tekintjük át, különös tekintettel a 20 napos késleltetésre és 5%-os tűréshatárra (ugyanis vizsgálatunk alapján ez adja a legjobb eredményeket).

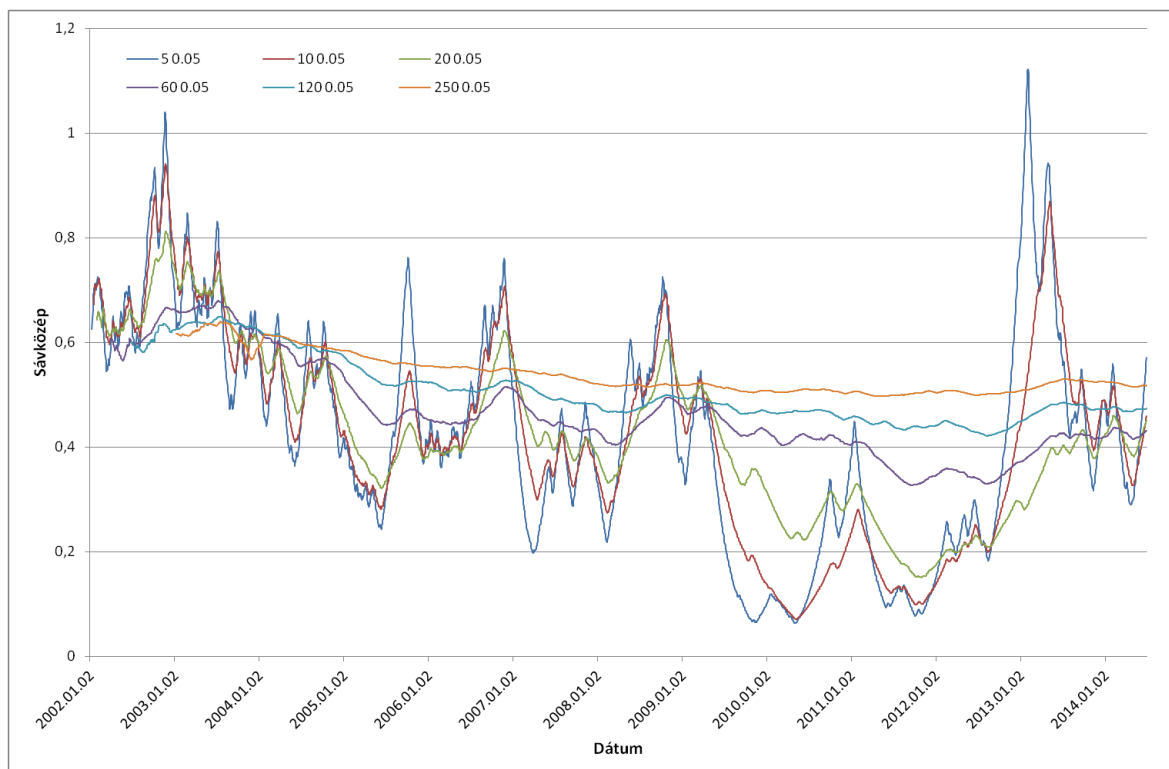
3.2.2.2.1 Az alkalmazott korlátok

Először az exponenciális késleltetést korlátozó sáv közepének (tehát a mozgóátlag) alakulását vizsgáltuk különböző tűréshatárok, majd késleltetések mellett.



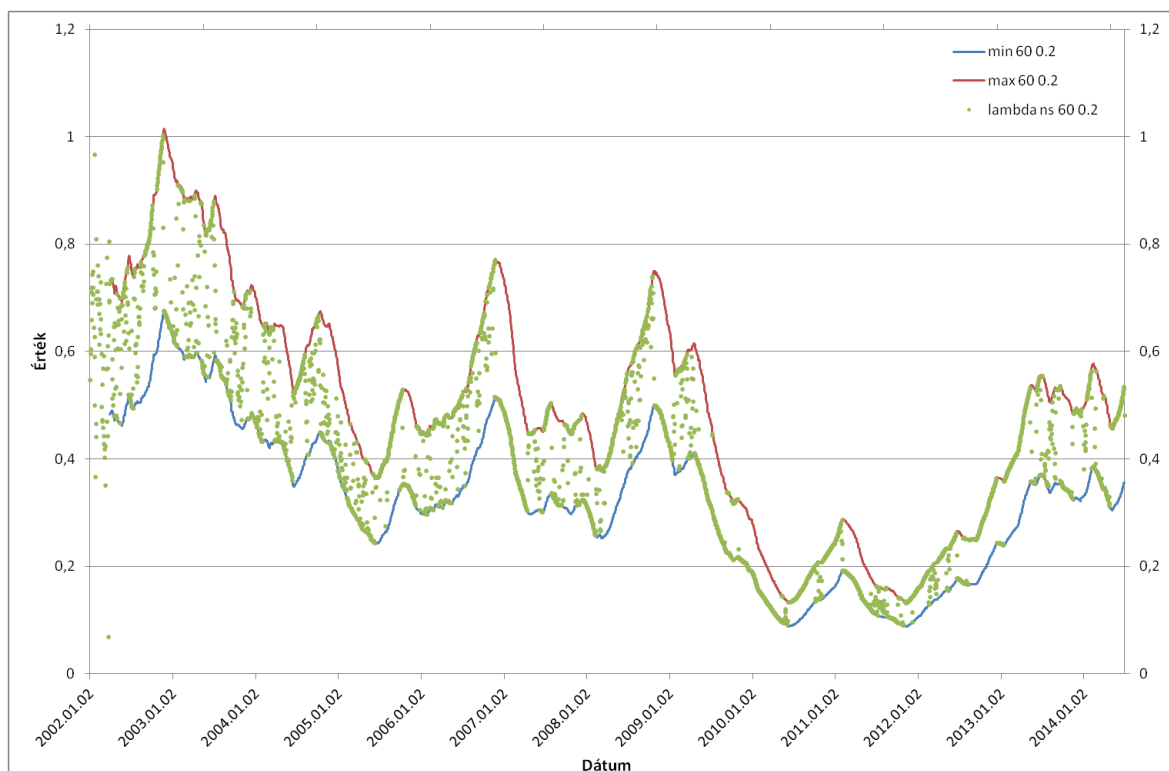
84. ábra A lambdára vonatkozó korlát sávközepe különböző tűréshatárok (5%, 10%, 20% és 50%) mellett

A 84. ábra alapján megfigyelhető (a jelmagyarázatban most és a továbbiakban először a késleltetés, majd a tűréshatár szerepel), ahogy várni lehetett, hogy minél kisebb a tűréshatár, annál kevésbé volatilis a sávközép. Látható továbbá, hogy az 50%-os tűréshatárt leszámítva a görbék trendjének iránya hasonló (a napok 62,29%-ban mozog ugyanarra a sávközép a 4 görbe esetén), míg nagyságuk a sáv szélességétől függ (tehát valószínűsíthetően a sávhatáron vannak az optimumok). 50%-os tűréshatár mellett lényegében a legszélsőségesebb becsléseket zárjuk ki csupán, így a túl nagy szabadság miatt szinte az a korlát nélküli esettel egyezik meg. Az egész időszakra vonatkozó konstans lambda elvetését erősíti az a tény is, hogy minimális rugalmasság mellett (5%-os tűréshatár mellett) is ingadozik 0,2 és 0,8 között a becsült lambdákban számított mozgóátlag. Ha a késleltetést növeljük, akkor annak a sávnak a szélessége csökken, amelyben a becsült lambdák ingadoznak a vizsgált időszak folyamán.



85. ábra A lambdára vonatkozó korlát sávközepe különböző késleltetések (5, 10, 20, 60, 120 és 250 nap) mellett

Az előző megállapítást a 85. ábra is mutatja, látható, hogy azonos tűréshatár (5%) és változó késleltetés mellett annál szélesebb sávban és volatilisebben ingadozik a korlátozó sáv közepe, minél kisebb a késleltetés. A változás iránya az összes görbe esetén csak az esetek 38,64%-ban egyezik meg (jellemzően csökkenés esetén), ami azt mutatja, hogy az optimális lambda függ a sávközép szintjétől.



86. ábra A sávhatárok és a becslült lambdák alakulása (tűréshatár: 20%, késleltetés: 60 nap)

Végül azt vizsgáltuk, hogy az egyes napokon a sávon belül hol helyezkedik el az optimális lambda. Ennek ábrázolásához 20%-os tűréshatárt és 60 napos késleltetést használtunk. Ahogy a 86. ábra is mutatja, jellemzően valamelyik sávhatárnál van a becslült optimum. Esetünkben a napok számának 61,15%-ban, melynek kétharmadában az alsó határnál. Látható, hogy ha egyszer valamelyik határnál van, akkor utána egy változó hosszúságú időszakon keresztül is mindig az a sávhatár lesz az optimális (például a 2008-as válság után az alsó határ). Ez annak köszönhető, hogy a rezsimváltásokra adott válaszreakció sebessége a tűréshatár és a késleltetés nagyságától együttesen függ. Így ha a változás jelentős, akkor a sebességnek megfelelő ideig történik korrekció. Ezzel a különböző gazdasági változások jelentősége is mérhető az exponenciális késleltetés korrekciójának hosszúságából.

A sávhatárok vizsgálata alapján elmondható, hogy túl rövid (<20) késleltetés, illetve nagy (>20%) tűréshatár esetén az exponenciális késleltetés még mindig túl volatilis marad, ami előnytelen előrejelzési szempontból. A túl hosszú késleltetés (>60) esetén pedig túl lassú a reakció a piaci sokkokra. A korábban említett 20 nap és 5% korlátozású Nelson-Siegel modell az eddigiek alapján megfelelőnek tűnik.

3.2.2.2.2 A faktorok és az exponenciális késleltetés alakulása

Ebben a részben a faktorok értelmezhetőségét és alakulását vizsgáljuk meg a korlátozott Nelson-Siegel modellek esetén.

	SZINT		MEREDKSÉG		GÖRBÜLET	
	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték	Koefficiensek	p-érték
BETA1 NS	0,987241942	0,0000	-0,002402702	0,0669	-0,015860539	0,0000
BETA2 NS	0,137558997	0,0000	-0,819779439	0,0000	0,016662442	0,0001
BETA3 NS	0,195322357	0,0000	0,171456917	0,0000	0,296454175	0,0000
F szignifikanciája	0,00		0,00		0,00	
r-négyzet	0,998885		0,958436		0,780796	

87. ábra A faktorok regressziós vizsgálata (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A 87. ábra szignifikancia-szintjei és p-értékei alapján látható, hogy mind a modellek, mind az egyes együttthatók szignifikánsak. A modellek magyarázó ereje is jó a kapott R^2 mutatók alapján. Az együttthatók alapján pedig elmondható, hogy a 20 nap és 5% korlátozású Nelson-Siegel modell esetén a faktorok értelmezhetőek szintként, meredekségként és görbületként.

	beta1 ns 20 0.05	beta2 ns 20 0.05	beta3 ns 20 0.05	lambda ns 20 0.05
ÁTLAG	6,5863	0,4257	1,9760	0,4241
SZÓRÁS	0,8203	2,5593	2,8904	0,1525
5%-OS PERCENTILIS	5,6665	-4,4529	-2,5270	0,1932
95%-OS PERCENTILIS	8,0380	4,7294	6,1242	0,7106
KORRELÁCIÓ (1 hét)	0,9383	0,9879	0,9454	0,9839
KORRELÁCIÓ (1 hónap)	0,8303	0,9573	0,7837	0,9703
KORRELÁCIÓ (1 év)	0,4170	0,6091	0,1264	0,6790

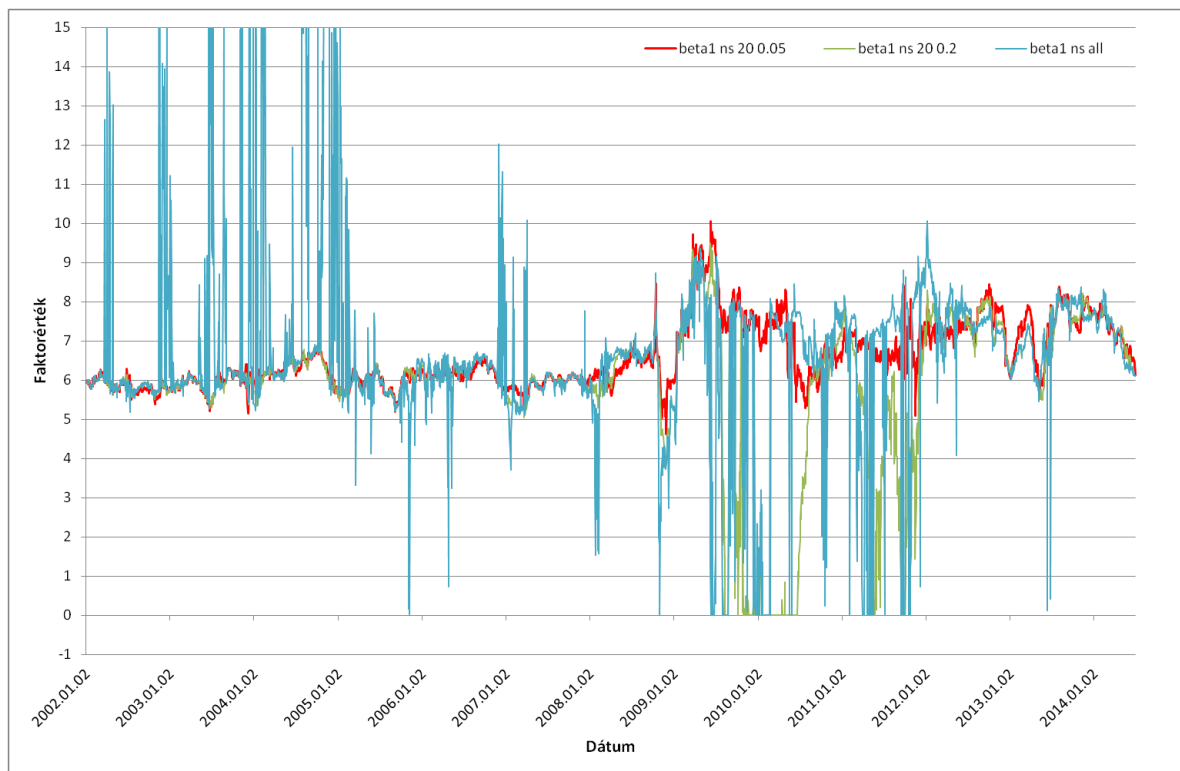
88. ábra A faktorok statisztikai mutatói (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A korlátozott modell (5%, 20 nap) statisztikai mutatói alapján (88. ábra) a modell értelmezhetősége jobb, mint az általános modell esetén volt (77. ábra). A faktorok azonosíthatósága alapján a következő megállapításokat tehetjük, az egyik, hogy az átlagos görbe enyhén csökkenő és púpos (a második faktor átlaga 0,4257, míg a harmadiké 1,9760). Az alakok sokféleségére utal, hogy a meredekség percentilisei szimmetrikusak az origóra, illetve, hogy átlaga nulla közeli, így jellemzőek az eltérő meredekségű időszakok. A görbület alapján jellemzően púpos a görbe, de U-alakúak is előfordulnak az időszak folyamán (a negatív 5%-os percentilis miatt). A faktorok szórása és terjedelme kisebb a korlátozás miatt (főleg a görbületé), mint az általános esetben. Az idősoros vizsgálhatóságot mutatja a magas 1 hetes és hónapos korrelációk, ami főleg a meredekség esetén arra utal, hogy hosszabb, azonos meredekségű időszakok követik egymást.

	beta1 ns 20 0.05	beta2 ns 20 0.05	beta3 ns 20 0.05	lambda ns 20 0.05
beta1 ns 20 0.05	1,0000			
beta2 ns 20 0.05	-0,7900	1,0000		
beta3 ns 20 0.05	-0,4887	0,3816	1,0000	
lambda ns 20 0.05	0,0744	-0,0511	0,0423	1,0000

89. ábra A faktorok megváltozásának korrelációs vizsgálata (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A faktorok fejlődése között a 89. ábra alapján közepes a kapcsolat, egyedül az első és második faktor között van erősebb, negatív kapcsolat, ami azt jelenti, hogy a szint és meredekség ellentétesen mozognak. Látható, hogy a faktorok és az exponenciális késleltetés lényegében korrelálatlanok. A továbbiakban az egyes faktorok alakulását tekintjük át, az ábrákon szerepelnek az általános modell eredményei is (azonban az y tengelyt korlátok köré szorítottuk a jobb ábrázolhatóság kedvéért).



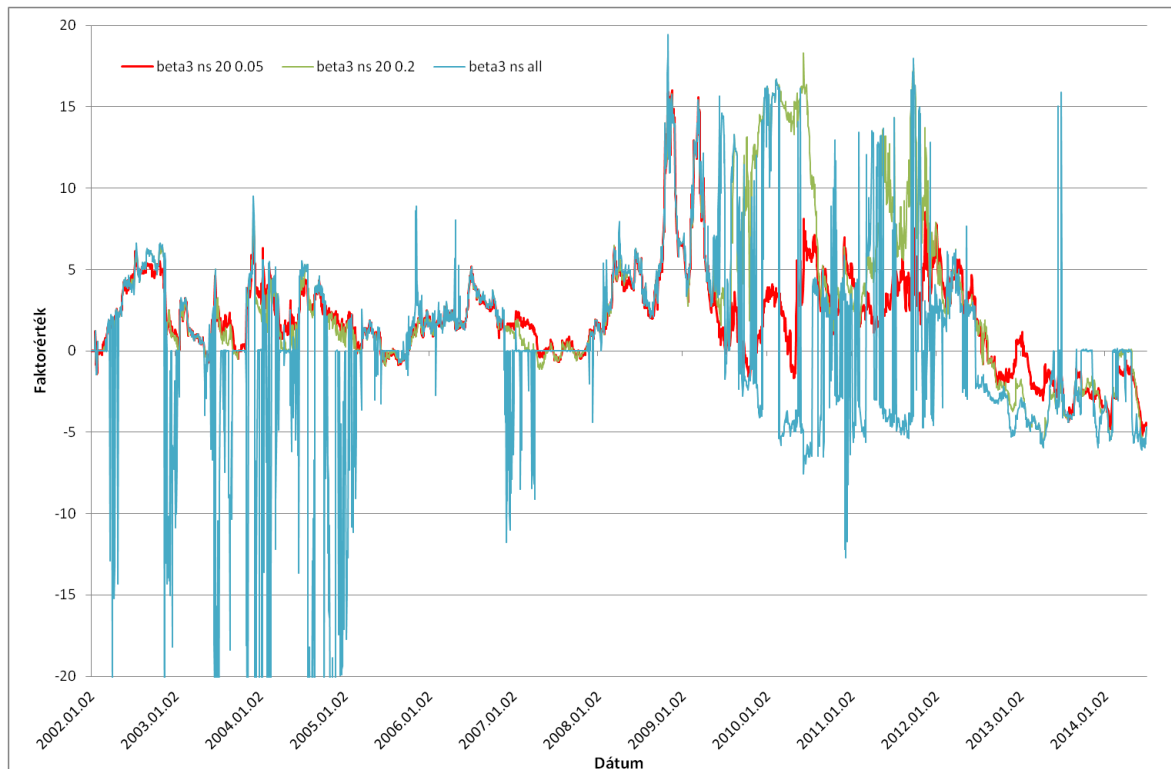
90. ábra Az első faktor alakulása különböző tűréshatárok (5%, 20%) mellett

A 90. ábra alapján az első faktor alakulása a tűréshatár növelésével egyre volatilisabbé válik. 2009 végétől pedig egy ideig 0 körüli szintre esik az 5%-nál nagyobb tűréshatároknál, ami nem realisztikus a hosszú távú hozam esetén (főleg, hogy csak azért nem lesz negatív, mert az optimalizálásnál szerepel a faktor pozitivitása). A 20 nap és 5% korlátozású modell visszaadja az empirikus tapasztalatokat és elvárásokat, például a 2008-as válság során történt hosszú oldali hozamemelkedést.



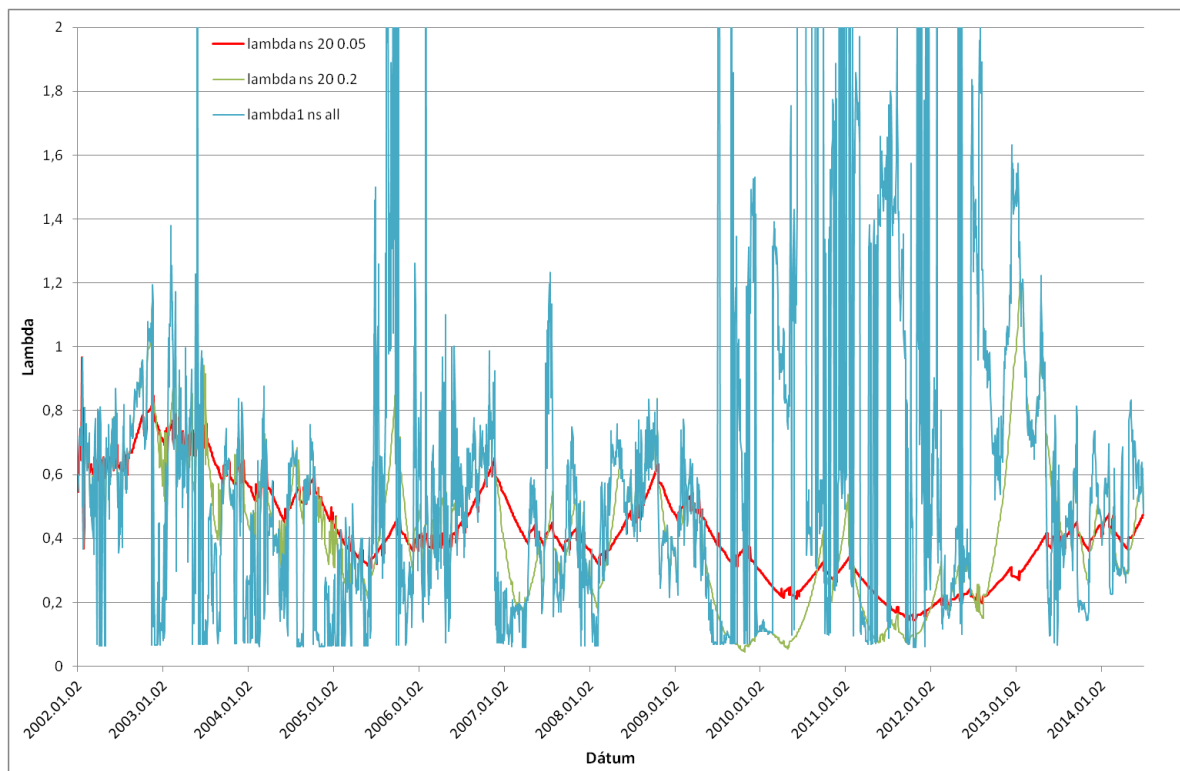
91. ábra A második faktor alakulása különböző tűréshatárok (5%, 20%) mellett

A második faktor alakulása is az 5%-os tűréshatár alkalmazásának szükségességét mutatja (91. ábra), ugyanis szélesebb sávok esetén kiugrások tapasztalhatók a faktor fejlődésében. 5%-os tűréshatár mellett szépen megfigyelhetők a hozamgörbe meredekségének változásai is, amikor emelkedőből csökkenőbe vált.



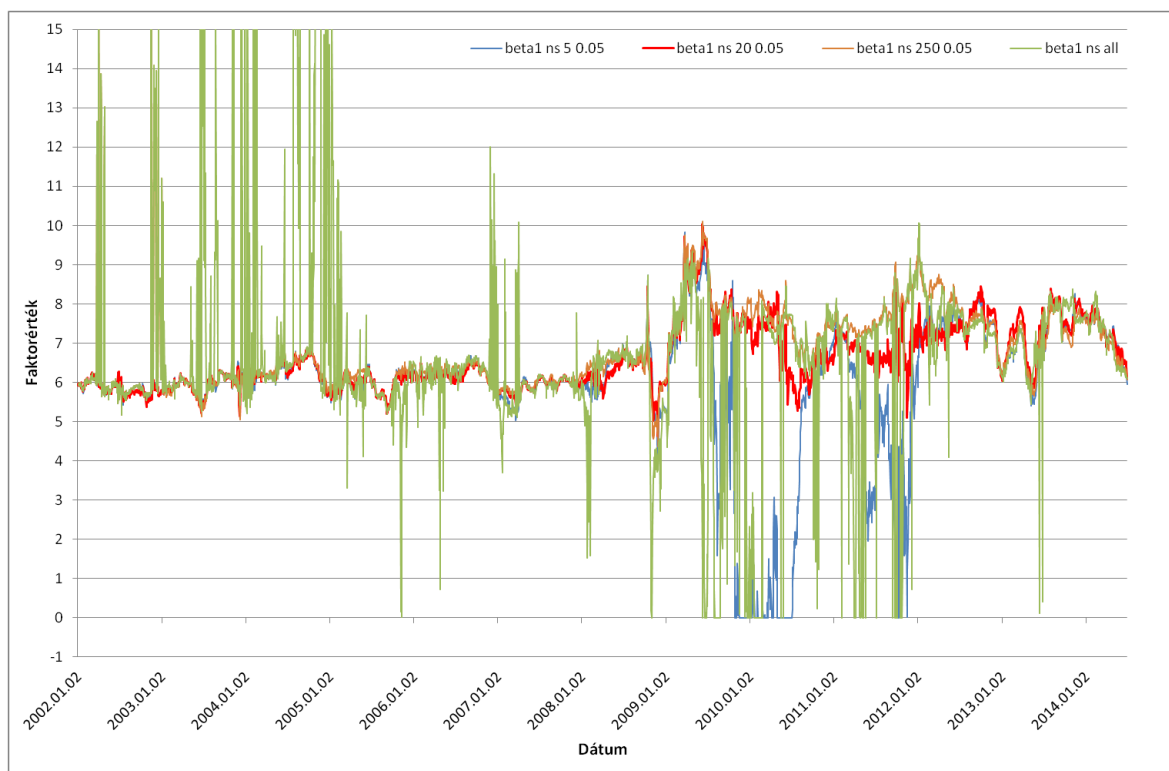
92. ábra A harmadik faktor alakulása különböző tűréshatárok (5%, 20%) mellett

A 92. ábra is az eddigi eredményeket támasztja alá. Megfigyelhető továbbá, hogy nagyobb tűréshatár esetén a faktor egyes napokon a globális, korlát nélküli optimum (kiugrások az általános modellhez hasonlóan), ezután azonban ott ragad, míg az általános modell alapján az újabb globális optimum máshol van. A 20 nap és 5% korlátozású modell esetén pedig látható, hogy a harmadik faktor a nulla körül ingadozik (jellemzően pozitív), így váltogatva a púpos és U-alakú hozamgörbe alakokat.



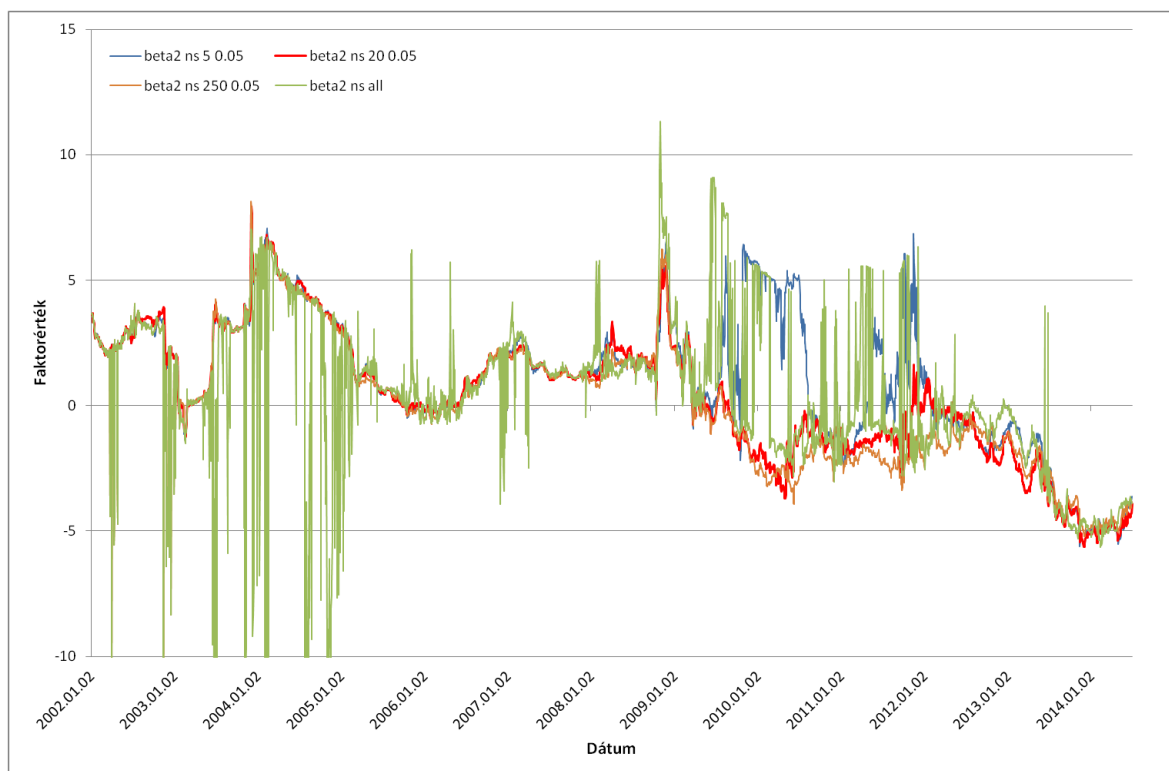
93. ábra A lambda alakulása különböző tűréshatárok (5%, 20%) mellett

Az exponenciális késleltetés alakulását figyelve a 93. ábra alapján is megállapíthatjuk, hogy a mozgóátlagolással simítjuk az általános modell eredményeit. Megfigyelhető a változásokra (magas vagy alacsony lambda) adott válasz sebessége is a tűréshatár függvényében, illetve hogy a sávhatár szélén kapjuk jellemzően az optimális értéket (a trend körüli minimális ingadozásból). A 2013 eleji kilengés a 20%-os tűréshatár esetén (habár nem ábrázoltuk, de 10% esetén is ez tapasztalható) a modell instabilitását mutatja. A különböző tűréshatárok vizsgálata azt mutatja, hogy az 5%-os rugalmasság a megfelelő választás.



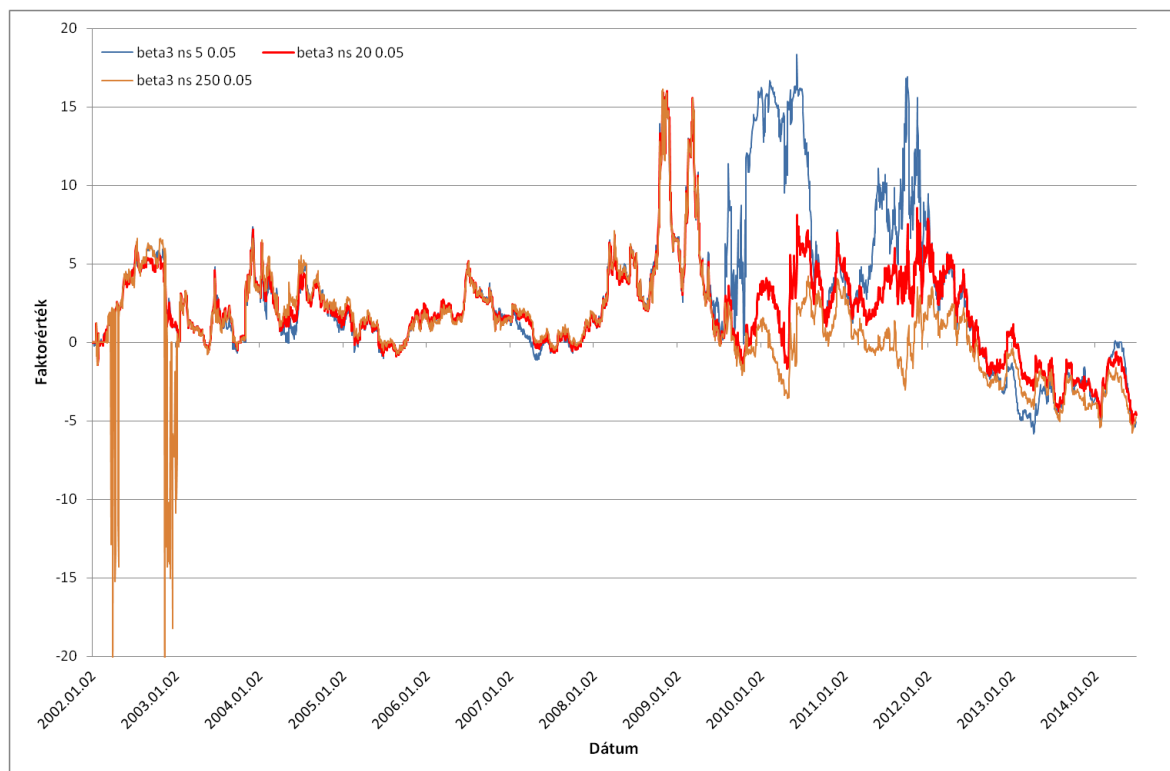
94. ábra Az első faktor alakulása különböző késleltetések (5, 20 és 250 nap) mellett

Különböző késleltetések mellett vizsgálva az első faktor alakulását (94. ábra) azt tapasztaljuk, hogy az 5 nap (nem ábrázoltuk, de 10 napnál is még) esetén a valóságtól eltérő eredményeket kapunk. Ezen irreális eredmények a 0 körüli szintet (elvégezve a regressziót ebben az esetben is helyes a megfeleltetés) jelentik, így az első faktor alapján legalább 20 napos késleltetés szükséges.



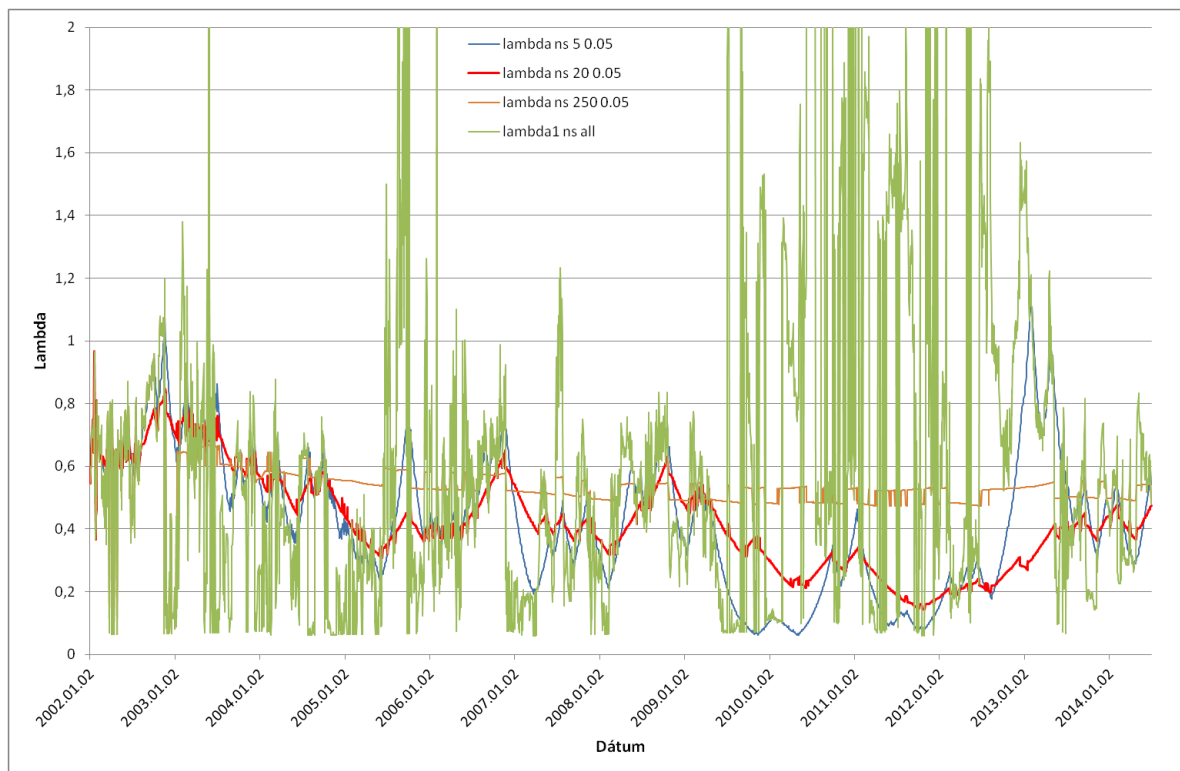
95. ábra A második faktor alakulása különböző késleltetések (5, 20 és 250 nap) mellett

A második faktor alakulása (95. ábra) is az eddigi eredményeket igazolja. Továbbá megfigyelhető, hogy 2012 körül a megfelelő késleltetések (≥ 20 nap) eltérően fejlődnek, illetve a 20 napnál hosszabb mozgóátlagok esetén az időszak elején kiugrás tapasztalható.



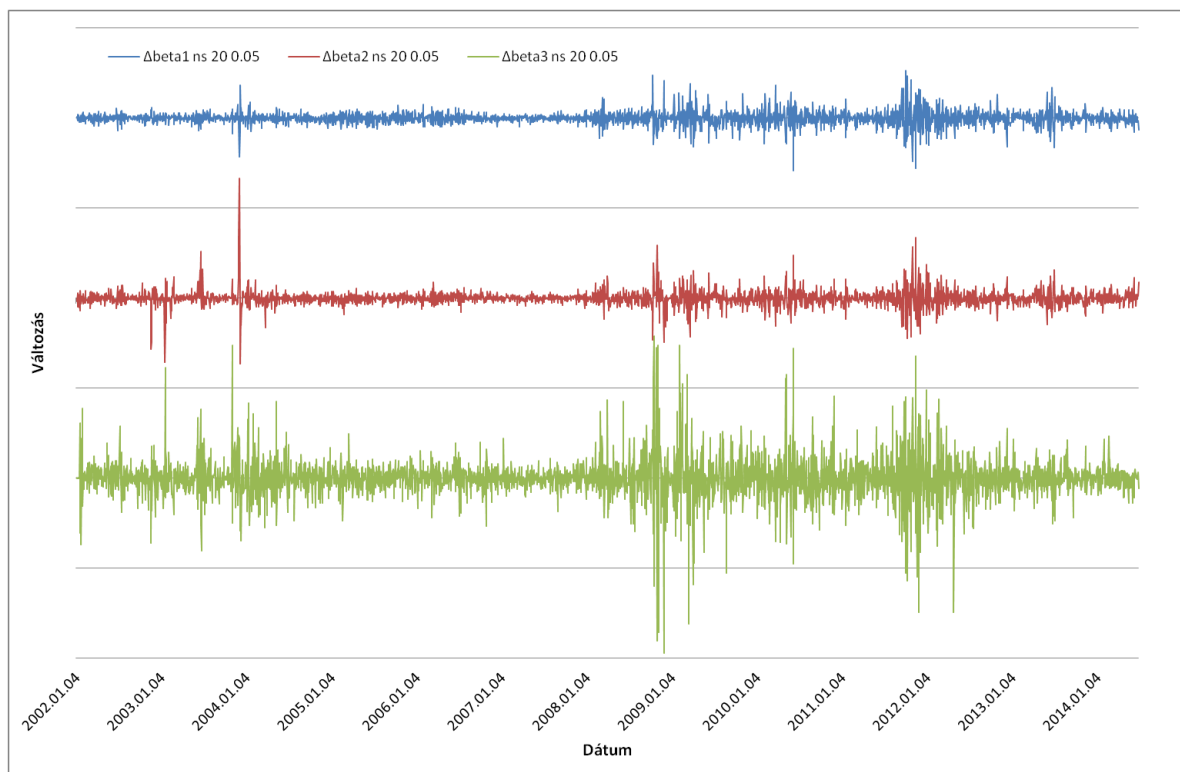
96. ábra A harmadik faktor alakulása különböző késleltetések (5, 20 és 250 nap) mellett

A harmadik faktor alakulását vizsgálva a 96. ábra alapján látható, hogy az első két faktorhoz hasonlóan a 250 napos késleltetés esetén az időszak elején szélsőséges eredmények adódnak. A 60 napos mozgóátlag esetén csak nagyon rövid kiugrás tapasztalható, így az a legnagyobb, amit használhatunk még. Megfigyelhető továbbá, hogy a kilengés után a különböző késleltetésű faktorok együtt fejlődnek, majd 2009 végétől válnak el egymástól (ez az első két faktorra is igaz). Mivel a magyar gazdasági környezet volatilis, így a kisebb válaszidővel rendelkező 20 napos modell a jobb választás.



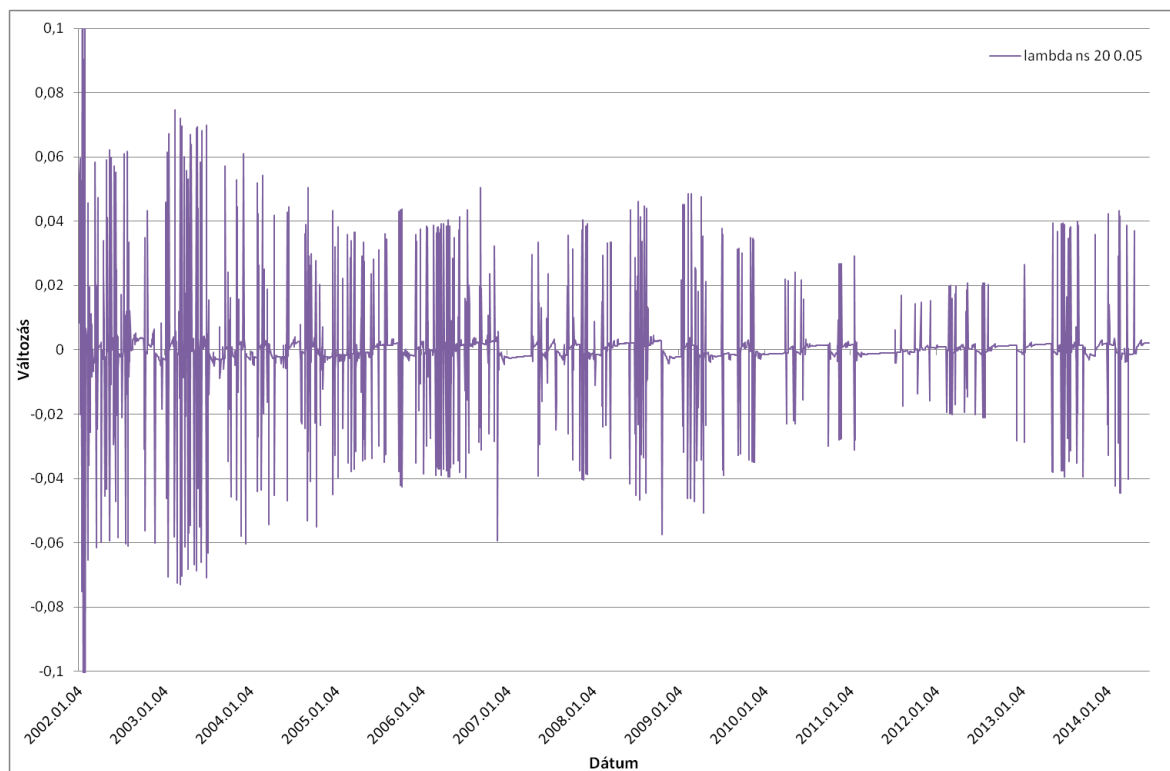
97. ábra A lambda alakulása különböző késleltetések (5, 20 és 250 nap) mellett

Ezt támasztja alá, hogy minél nagyobb a késleltetés, annál inkább jellemzők olyan időszakok, ahol a becsült lambda két szint között ingadozik, ez figyelhető meg a 97. ábra alapján. Ezek a diszkrét ugrások pedig az idősoros előrejelzés pontatlanságát eredményezik.



98. ábra A faktorok megváltozása (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Ezután megvizsgáltuk a 98. ábra (az y tengelyen 3 különböző ábra szerepel, az egyes beosztások a faktor értékében történő 2 nagyságú változást jelent) alapján a faktorok megváltozásait a korlátozott Nelson-Siegel (5%, 20 nap). Látható, hogy mindhárom esetben a változások a grafikus vizsgálat alapján véletlenszerűek időben változó volatilitással, illetve egymással korrelálnak (vagy legalábbis a kiugrások ugyanakkor történnek). Megfigyelhető, hogy abszolút értékben a legnagyobb változások a görbület esetén mutatkoznak



99. ábra A lambda megváltozása (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A 97. ábra diszkrét ugrásait figyelhetjük meg a 99. ábra alapján is. Ezen látható, hogy az ugrások abszolút nagysága csökken, ez az alkalmazott módszertannak köszönhető, ugyanis a lambda értéke annak 5%-áig változhat, és jellemzően a sáv széle lesz az optimális megoldás. Megfigyelhetők továbbá (ha eltekintünk a kiugrásoktól) olyan időszakok, amikor a változás vagy csak negatív, vagy csak pozitív. Ez az ábra alapján is valószínűsíthető, hogy a korlátozással a lambda alakulása kedvezőtlen idősoros tulajdonságokkal fog rendelkezni.

	$\Delta\text{beta1 ns 20 0.05}$	$\Delta\text{beta2 ns 20 0.05}$	$\Delta\text{beta3 ns 20 0.05}$	$\Delta\text{lambda ns 20 0.05}$
$\Delta\text{beta1 ns 20 0.05}$	1,0000			
$\Delta\text{beta2 ns 20 0.05}$	-0,7900	1,0000		
$\Delta\text{beta3 ns 20 0.05}$	-0,4887	0,3816	1,0000	
$\Delta\text{lambda ns 20 0.05}$	0,0744	-0,0511	0,0423	1,0000

100. ábra A megváltozások közti korreláció (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A grafikus vizsgálat erős kapcsolatra utalt a faktorok megváltozása között, azonban a 100. ábra alapján elmondható, hogy egyedül a szint és a meredekség megváltozása között van erőteljes, negatív összefüggés. Ez alapján valószínűsíthető, hogy a faktorok megváltozása esetén jellemzően a kiugrások ideje és a változások iránya között van kapcsolat.

		Δbeta2 ns 20 0.05				Δbeta3 ns 20 0.05				Δbeta3 ns 20 0.05	
		1	-1			1	-1			1	-1
1		258	1322	1		465	1115	1		920	564
-1		1226	306	-1		1066	466	-1		611	1017
Δbeta1 ns 20 0.05			Δbeta1 ns 20 0.05			Δbeta2 ns 20 0.05					

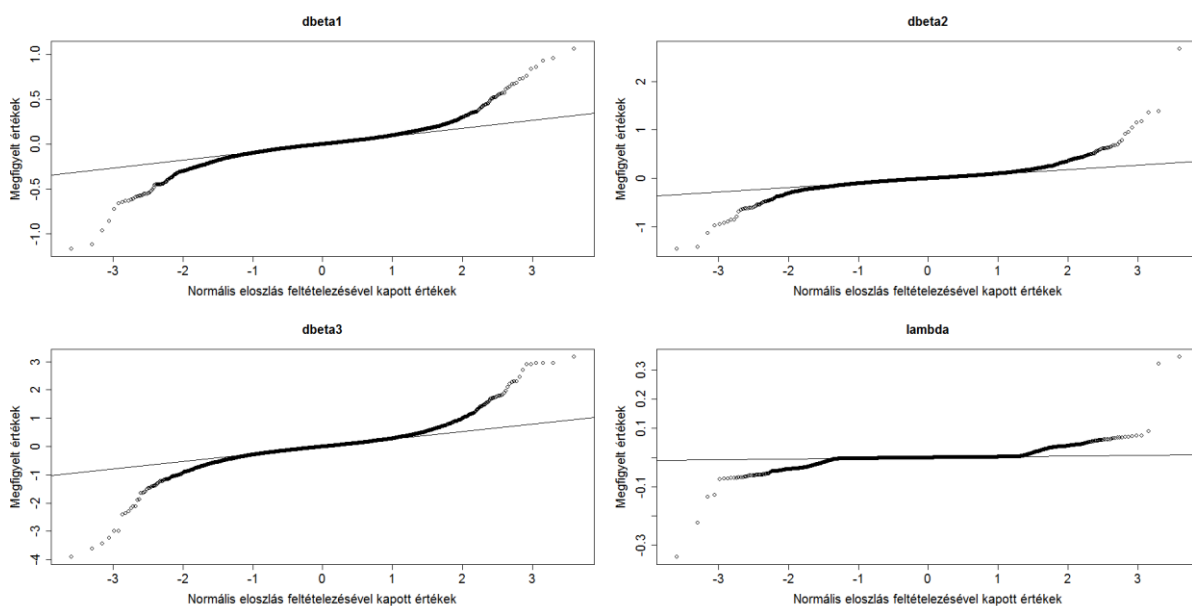
101. ábra A megváltozások iránya a faktorok esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A változások irányát vizsgálva (101. ábra) alátámaszthatjuk az előző megállapítást, ugyanis látható, hogy a három vizsgált esetben (első-második, első-harmadik és második-harmadik faktor megváltozása) is az átlók mentén szerepel az időszak jelentős része. Az első két faktor esetén ellentétes a megváltozás iránya, azaz a szint és a meredekség együtt csökken vagy nő (ugyanis a meredekség a második faktor ellentettje). Ezzel ellentétesen a görbület akkor nő/csökken, ha a szint nő/csökken vagy a meredekség csökken/nő.

	$\Delta\text{beta1 ns 20 0.05}$	$\Delta\text{beta2 ns 20 0.05}$	$\Delta\text{beta3 ns 20 0.05}$	$\Delta\text{lambd ns 20 0.05}$
ÁTLAG	6,14E-05	-2,44E-03	-1,49E-03	-2,33E-05
SZÓRÁS	0,1454	0,1692	0,4632	0,0188
MINIMUM	-1,1662	-1,4537	-3,8946	-0,3393
MAXIMUM	1,0625	2,6688	3,1577	0,3441
TERJEDELEM	2,2286	4,1225	7,0523	0,6833
5%-OS PERCENTILIS	-0,2163	-0,2151	-0,6346	-0,0271
95%-OS PERCENTILIS	0,1965	0,2200	0,6579	0,0267
KORRELÁCIÓ (1 nap)	-0,1191	0,0626	-0,0711	-0,3492
KORRELÁCIÓ (1 hét)	-0,0490	-0,0382	-0,0080	-0,0308
KORRELÁCIÓ (1 hónap)	0,0059	0,0345	0,0524	0,0801
KORRELÁCIÓ (1 év)	-0,0149	0,0010	-0,0327	0,0098

102. ábra A megváltozások statisztikai mutatói (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A faktor megváltozások leíró statisztikai tulajdonságai (102. ábra) alapján elmondható, hogy a harmadik faktor a legvolatilisabb (a szórásbeli eltérést a nagyobb terjedelem sem magyarázza). A megváltozások a táblázat alapján autokorrelálatlanok a vizsgált késleltetéseket tekintve. A percentiliseket és a szélsőértékeket tekintve elmondható, hogy ha nem szűrjük ki a kilógó értékeket, akkor az jelentősen torzíthatja a becslést.



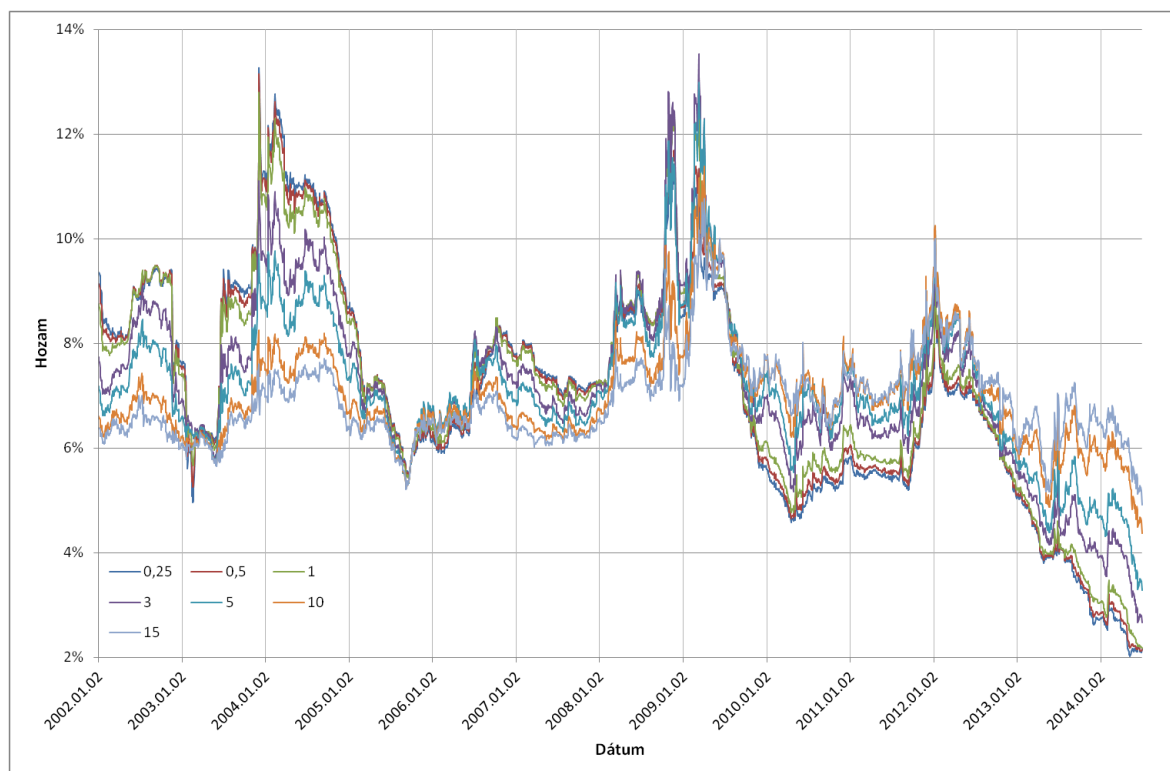
103. ábra QQ ábrák a becsült faktorok megváltozása esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A megváltozások eloszlását vizsgálva elmondható, hogy azok nem normális eloszlásból származnak, ezt mutatja a 103. ábra. Ezen az egyenestől való jelentős eltérés támasztja alá a normális eloszlás elvetését. Azzal azonban jelen tanulmányban nem foglalkozunk, hogy milyen eloszlást követnek a megváltozások.

Összefoglalva elmondható, hogy túl kicsi késleltetés, vagy túl nagy tűréshatár esetén túlzottan rugalmas modellt kapunk. Ebből adódóan a becsült eredmények az általános modellnél tapasztalt negatív tulajdonságokkal rendelkeznek, amik miatt előrejelzéshez nem lehet azokat használni. **A vizsgálat eredményeként elmondható, hogy a 20 napos késleltetésű és 5%-os tűréshatárú a legrugalmasabb olyan Nelson-Siegel modell, ami a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik.**

3.2.2.2.3 A kapott hozamgörbék

A benchmark lejáratokhoz tartozó hozamok idősorait bemutató 104. ábra alapján következtethetünk a hozamgörbe alakjára. Amikor közel azonos szinten vannak a különböző lejáratú hozamok, akkor lapos a görbe (2003 eleje és 2005 közepe). A görbék szétválása esetén a hozamgörbe meredeksége nagy, ilyen volt például 2004 elején és 2013 közepétől kezdődően. Az, hogy csökkenő vagy emelkedő a hozamgörbe attól függ, hogy a hosszú vagy alacsony hozamok-e a kisebbek. Ez alapján 2004 elején csökkenő, míg 2011-ben emelkedő volt a zérókupon görbe. A görbületet az határozza meg, hogy a középtávú hozamok-e a legmagasabbak vagy a legalacsonyabbak. Ez alapján például a 2008-as válság során a legmagasabbak voltak, így ott púpos volt a görbe. Mindezen állításokat alátámasztja a 108. ábra is. Látható továbbá az ábrán, hogy a rövid, közép és hosszú távú hozamok jellemzően együtt mozognak.



104. ábra A benchmark lejáratú hozamok alakulása (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A grafikus tapasztalat után elvégeztük a numerikus vizsgálatát is a benchmark lejáratú hozamok kapcsolatának. Ez alapján a hozamok szintjére megállapítható (105. ábra), hogy csoportonként (3, 6 hónapos és 1 éves; 3 és 5 éves; 10 és 15 éves) együtt mozognak, de erősebb kapcsolat figyelhető meg az 1 és 3 éves papír között is. A megváltozásokat tekintve

is ezen megállapítások tehetőek, a lejáratok közti differencia növekedésével csökken köztük a kapcsolat. Érdekes megfigyelni továbbá, hogy az 1 és 3 éves papírok megváltozásai közti kapcsolat gyengébb, mint a többi egymás melletti lejáratok esetén.

	0,25	0,5	1	3	5	10	15		$\Delta 0,25$	$\Delta 0,5$	$\Delta 1$	$\Delta 3$	$\Delta 5$	$\Delta 10$	$\Delta 15$
0,25	1,0000							$\Delta 0,25$	1,0000						
0,5	0,9985	1,0000						$\Delta 0,5$	0,9803	1,0000					
1	0,9894	0,9958	1,0000					$\Delta 1$	0,8802	0,9564	1,0000				
3	0,9213	0,9401	0,9666	1,0000				$\Delta 3$	0,5872	0,7285	0,8904	1,0000			
5	0,8335	0,8590	0,8987	0,9794	1,0000			$\Delta 5$	0,4780	0,6215	0,7993	0,9771	1,0000		
10	0,5736	0,6055	0,6603	0,8126	0,9108	1,0000		$\Delta 10$	0,3748	0,4902	0,6413	0,8467	0,9308	1,0000	
15	0,3499	0,3817	0,4388	0,6171	0,7541	0,9559	1,000	$\Delta 15$	0,3213	0,4074	0,5213	0,7005	0,8045	0,9600	1,0000

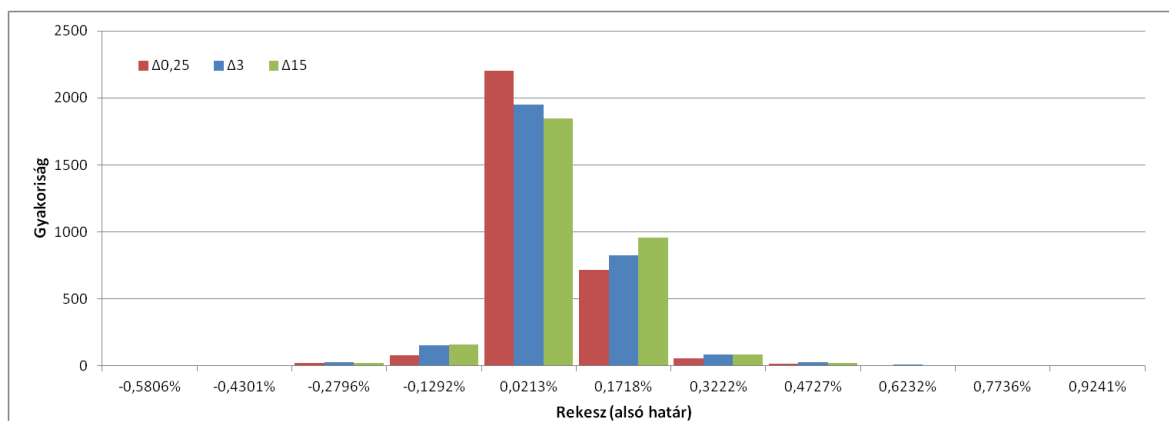
105. ábra A benchmark lejáratú hozamok (bal) és azok megváltozásainak (jobb) korrelációja (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A 106. ábra alapján elmondható, hogy a rövid oldalon többször volt hozamcsökkenés, mint a hosszún (azonban az eltérés nem szignifikáns). A rövid lejáratú hozamok változékonyabbak, erre utal, hogy a változások átlaga ezeknél abszolút értékben nagyobb (és a kisebb hozamszintek esetén arányában nagyobb ez a változás). A szórás azonban már azt mutatja, hogy a középtávú hozamok ingadoznak jobban a többi lejáratához képest. A percentilisek alapján a változások terjedelme közel szimmetrikus az origóra, így nem figyelhető meg, hogy valamilyen irányú változás a nagyságára hatással lenne. A korrelációk alapján láthatjuk, hogy nagyon gyenge kapcsolat van a hozamváltozások között mind 1 nap, mind 1 hét esetén.

	$\Delta 0,25$	$\Delta 0,5$	$\Delta 1$	$\Delta 3$	$\Delta 5$	$\Delta 10$	$\Delta 15$
HOZAMEMELKEDÉS	1412	1365	1345	1435	1481	1545	1534
HOZAMCSÖKKENÉS	1700	1747	1767	1677	1631	1567	1578
ÁTLAG	-0,0023%	-0,0022%	-0,0021%	-0,0016%	-0,0013%	-0,0007%	-0,0005%
SZÓRÁS	0,0990%	0,0982%	0,1031%	0,1219%	0,1217%	0,1088%	0,1030%
5%-OS PERCENTILIS	-0,1033%	-0,1029%	-0,1140%	-0,1526%	-0,1630%	-0,1534%	-0,1469%
95%-OS PERCENTILIS	0,1053%	0,1062%	0,1153%	0,1603%	0,1714%	0,1559%	0,1442%
KORRELÁCIÓ (1 nap)	0,2341	0,2447	0,2225	0,1358	0,1133	0,0898	0,0613
KORRELÁCIÓ (1 hét)	-0,0007	0,0056	0,0083	-0,0256	-0,0563	-0,0844	-0,0827

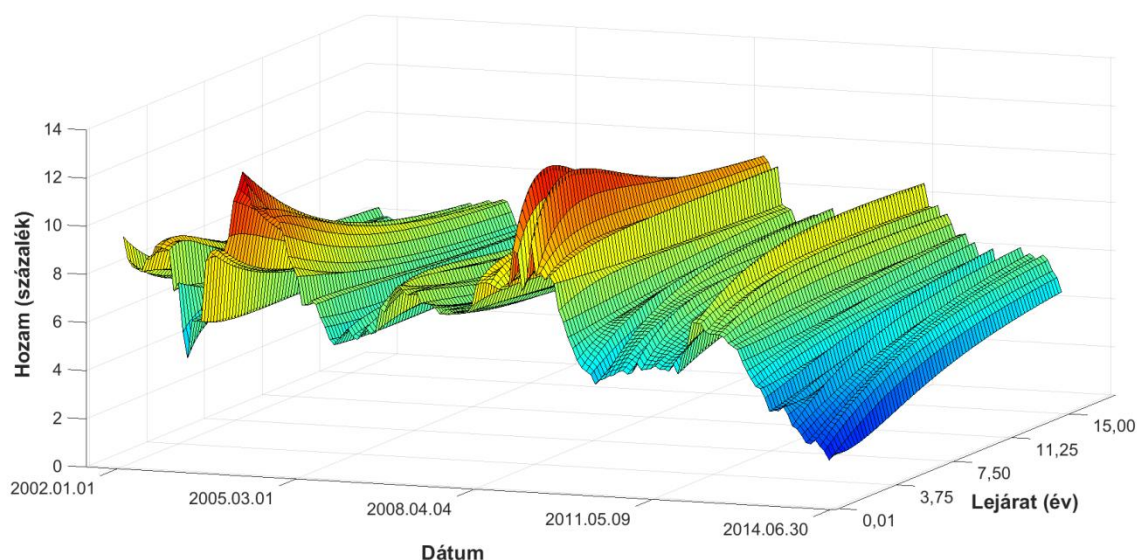
106. ábra A benchmark lejáratú hozamok megváltozásának statisztikai mutatói (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A rövid (3 hónapos), közép (3 éves) és hosszú távú (15 éves) hozamok megváltozásaiból számított gyakoriságokat elemezve (107. ábra, az alsó és felső 5 rekeszt nem ábráztunk, jellemzően néhány megváltozás esik oda) látható, hogy azok eloszlása csúcsos és balra ferde (minél rövidebb a lejárat, annál inkább). A lejáratral csökkenő átlagot és szórást is megfigyelhetjük, ahogy a 106. ábra is mutatta. A hisztogramok alapján egyértelműen látszik, hogy a megváltozások nem normális eloszlásúak.



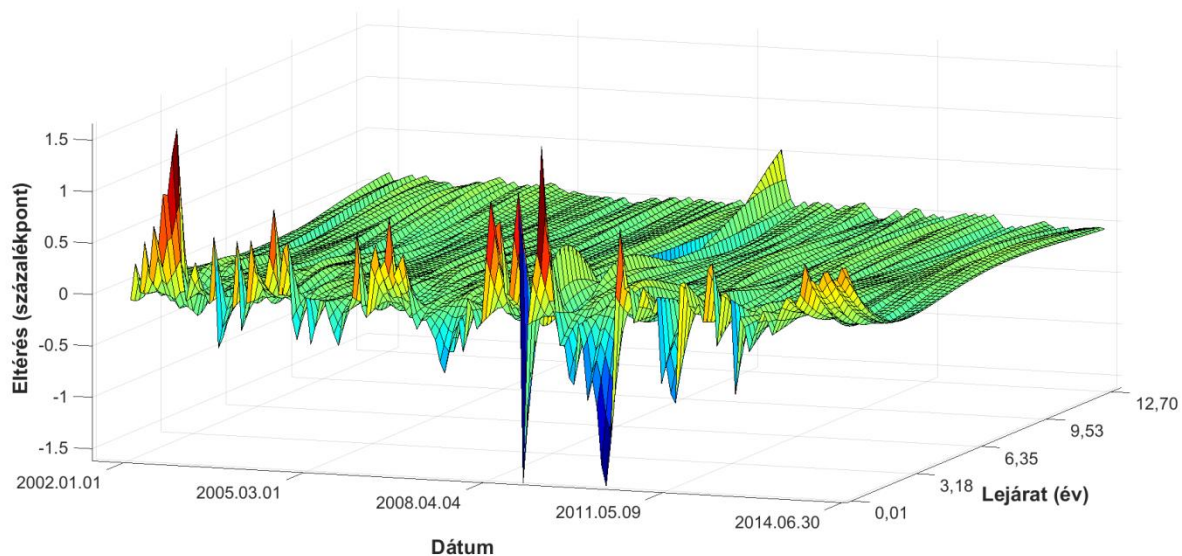
107. ábra A benchmark lejáratú hozamok megváltozásainak hisztogramjai (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A kapott hozamgörbéket ábrázolva (108. ábra) látható, hogy az eddigi tapasztalatokkal megegyező felületet kapunk. Ezután a kapott görbesereget összehasonlítottuk a korábbi eredményekkel.



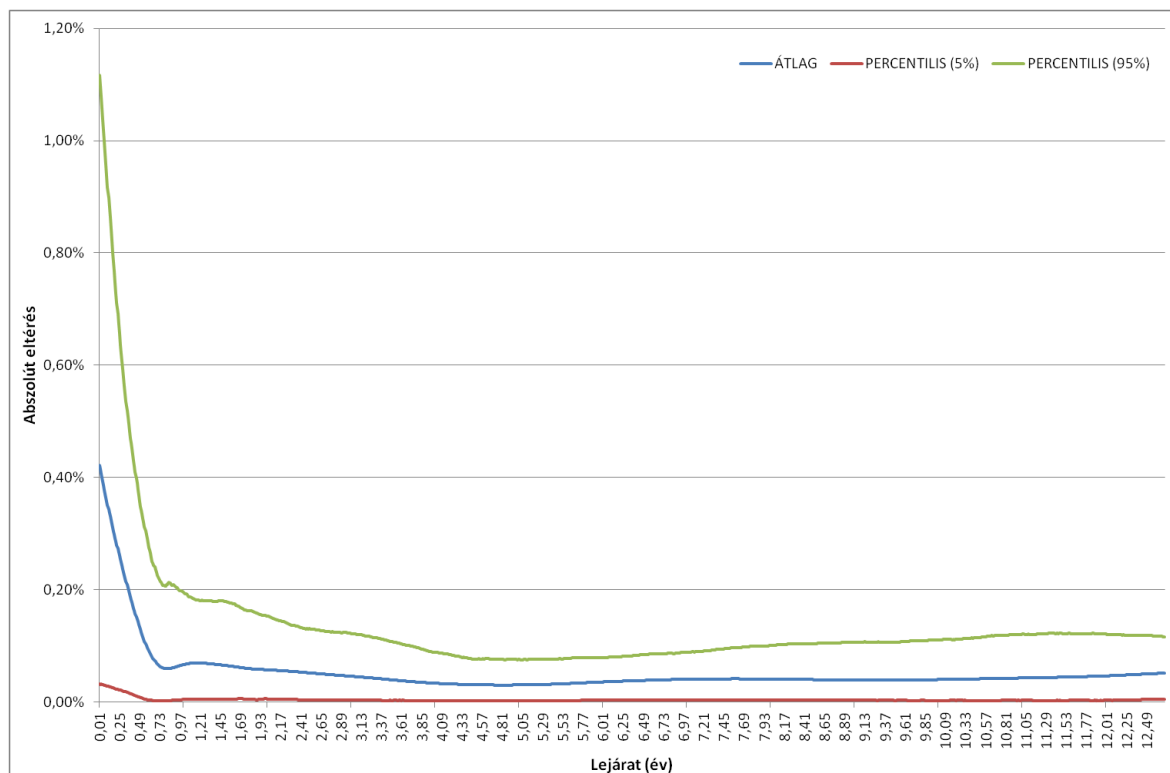
108. ábra A hozamgörbe alakulása 2002.01.01. és 2014.06.30. között (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A harmadfokú spline modelltől vett eltéréseket mutatja a 109. ábra. Ezen látható, hogy a két modell elsősorban rövidtávon tér el egymástól, leginkább a vizsgált időszak elején és a 2008-as válság közelében. Mivel a 0,51-es exponenciális késleltetésű Diebold-Li modellnél is hasonló ábrát kaptunk (53. ábra), így ezen eltérések a harmadfokú spline és a Nelson-Siegel modellek által használt függvények eltéréséből adódik.



109. ábra A hozamgörbe eltérése Nelson-Siegel (20 nap, 0,05%) és a harmadfokú spline modellek között

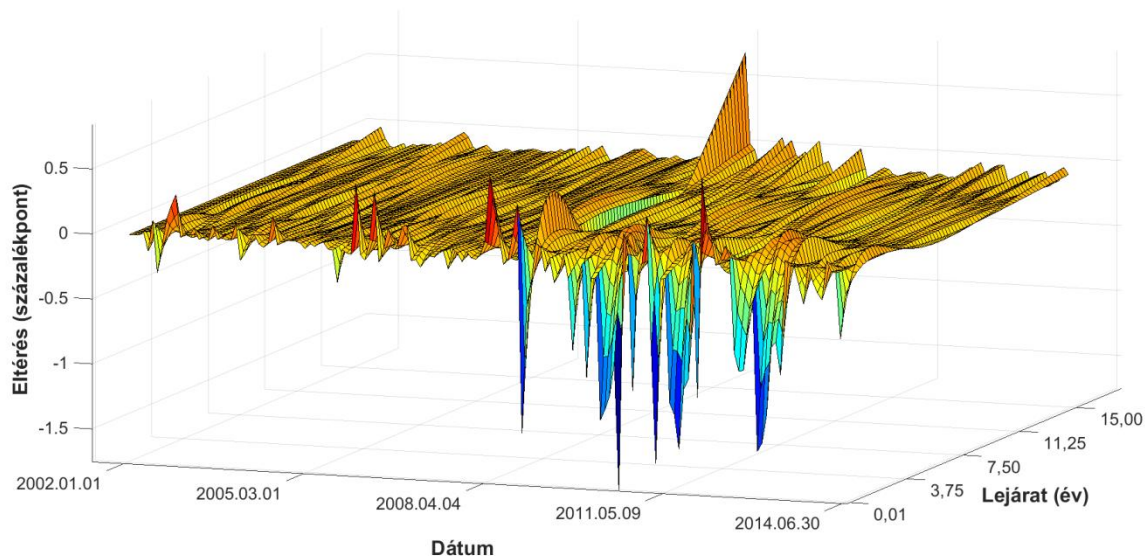
Az abszolút eltérések átlagát, 5 és 95 százalékos percentiliseit (alsó és felső határ) vizsgálva is a rövid oldali eltérés figyelhető meg a 110. ábra alapján. Látható, hogy a percentilisek által meghatározott sáv a lejárat emelkedésével csökken, majd beáll egy közel állandó szintre (a 3 éves lejáratnál kezdve az abszolút eltérés 10 bázispont alatt marad). A három hónapnál közelebbi lejáratok esetén pedig a jelentősebb eltérések az eltérő függvényformának köszönhető, ugyanis ebbe a tartományba már nem esnek megfigyelések.



110. ábra A hozamgörbe abszolút eltérése a Nelson-Siegel (5%, 20 nap) és a harmadfokú spline modellek között

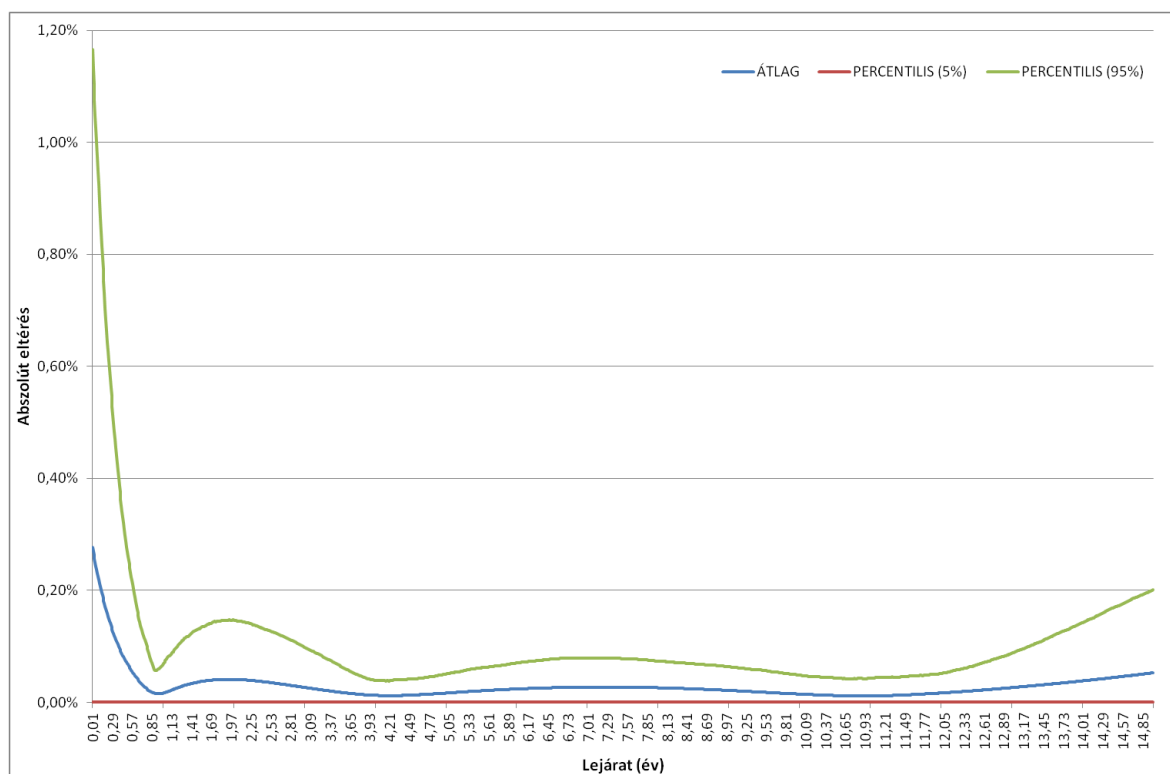
A 111. ábra a korlátozott (5% és 20 nap) és az általános Nelson-Siegel modell eltéréseit ábrázolja. Ezen megfigyelhető, hogy a gazdasági válság előtt kisebb kiugrások jellemzőek, amikor a korlátozott modell esetén a rövid hozamok körülbelül maximum 50 bázisponttal magasabbak. Ezzel szemben a válság után jelentősebb (körülbelül 200 bázispontig) és negatív

eltérések rendszeresen előfordulnak a két modell között. A legnagyobb eltérés itt is a válság időszakában figyelhető meg, ahol a hosszú hozamok is jelentősen eltértek.



111. ábra A hozamgörbe eltérése Nelson-Siegel (20 nap, 0,05% és korlát nélküli) modellek között

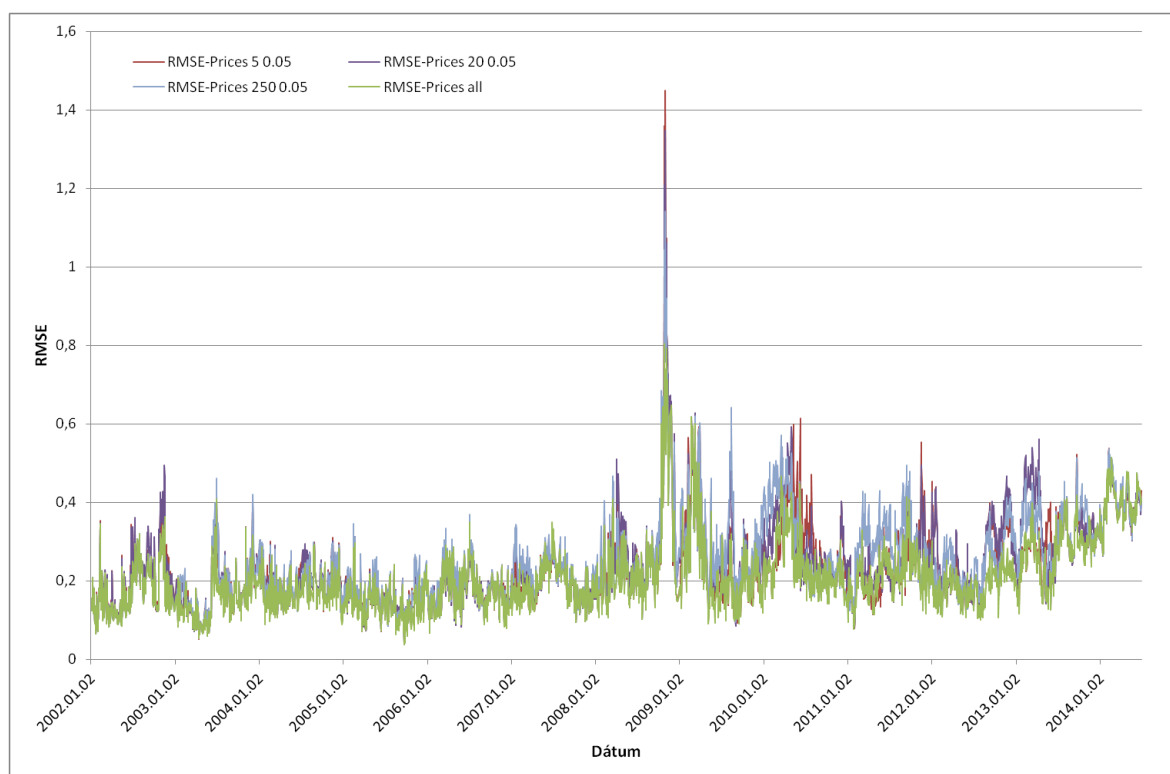
A hozamgörbék közti eltérések statisztikai mutatóit (átlag, 5%-os és 95%-os percentilisek) ábrázolva (112. ábra) hasonló alakulást kapunk, mint a Diebold-Li modellek összehasonlításánál (56. ábra). Ezen is láthatóak az átlag esetén lokális minimumok (0,94, 4,21 és 10,85 évnél, ezek későbbi lejáratok, mint a Diebold-Li modellnél voltak), ahol a sáv is összeszűkül. A hasonló viselkedés alapján egyértelműen látszik, hogy az eltéréseket a lambda okozza.



112. ábra A hozamgörbe abszolút eltérése Nelson-Siegel (20 nap, 0,05% és korlát nélküli) modellek között

3.2.2.2.4 Az átlagos négyzetes eltérések vizsgálata

Az átlagos eltéréseket a 113. ábra alapján vizsgálva látható, hogy az általános modellt használva a 2008-as válság után kisebb hibákat kapunk, mint a korlátozott modellek esetén. Ez annak köszönhető, hogy korlátok nélkül elérhető a jóval változékonyabb globálisan optimális exponenciális késleltetés. Ezen modelleknél is megfigyelhető, hogy a vizsgált időszak végén trendszerűen emelkedik az átlagos négyzetes hiba. A korábbi modelleknél is ez volt megfigyelhető (33. ábra és 57. ábra) így ez nem modell specifikus tulajdonság, hanem a megfigyelések mérési hibájából ered.



113. ábra Az átlagos négyzetes eltérés alakulása különböző késleltetések (5, 20 és 250 nap) mellett

A Nelson-Siegel modellek összehasonlítása során megnéztük, hogy melyik modell hányszor adja a legkisebb RMSE értéket a vizsgált időszak folyamán. A 114. ábra alapján a legtöbbször az általános modell esetén a legpontosabb, körülbelül a napok 14%-ban. Adott tűréshatár mellett a késleltetés emelkedésével csökken a legjobb napok száma (kivéve 5%-os tűréshatár és 20 napos késleltetés mellett), kivéve az 1 éves késleltetést (250 nap), ahol újból emelkedik, és jobb eredményeket ad a 60 naposnál. Fix késleltetés mellett a következő sorrendet állíthatjuk: 50%, 5%, 20% és 10%. Láttuk a túl nagy késleltetés, illetve az általános modell hátrányait, így az ábra is megerősíti a 20 napos, 5%-os modell jogosultságát. A helyes optimalizálási módszer kiválasztásának nehézségét jelzi, hogy az általános modell sem mindig a globális optimumot adja, ezt mutatja, hogy nem minden nap adja a legkisebb RMSE értéket.

	0.05	0.1	0.2	0.5	all
5	158	117	156	291	440
10	129	96	119	190	
20	152	79	97	208	
60	114	86	60	136	
120	76	76	91	116	
250	119	92	105	170	

114. ábra A legkisebb átlagos négyzetes eltérésű napok száma a vizsgált időszakban a késleltetés és a túréshatár függvényében

A következőkben részletesebben elemeztük a modellek közti sorrendet. Először különböző késleltetések mellett, ezt szemlélteti a 115. ábra. Az alapján, hogy hányadik helyezés a leggyakoribb látható, hogy a globális modell a legjobb, majd a modellek a késleltetéseknek megfelelően romlanak.

	RMSE-Prices all	RMSE-Prices 5 0.05	RMSE-Prices 10 0.05	RMSE-Prices 20 0.05	RMSE-Prices 60 0.05	RMSE-Prices 120 0.05	RMSE-Prices 250 0.05
1	1678	422	268	299	253	196	299
2	392	821	467	409	285	218	441
3	317	429	838	393	300	539	223
4	250	406	296	760	654	341	343
5	141	342	304	522	1012	449	307
6	100	301	525	352	325	1198	287
7	235	392	415	378	284	172	1213

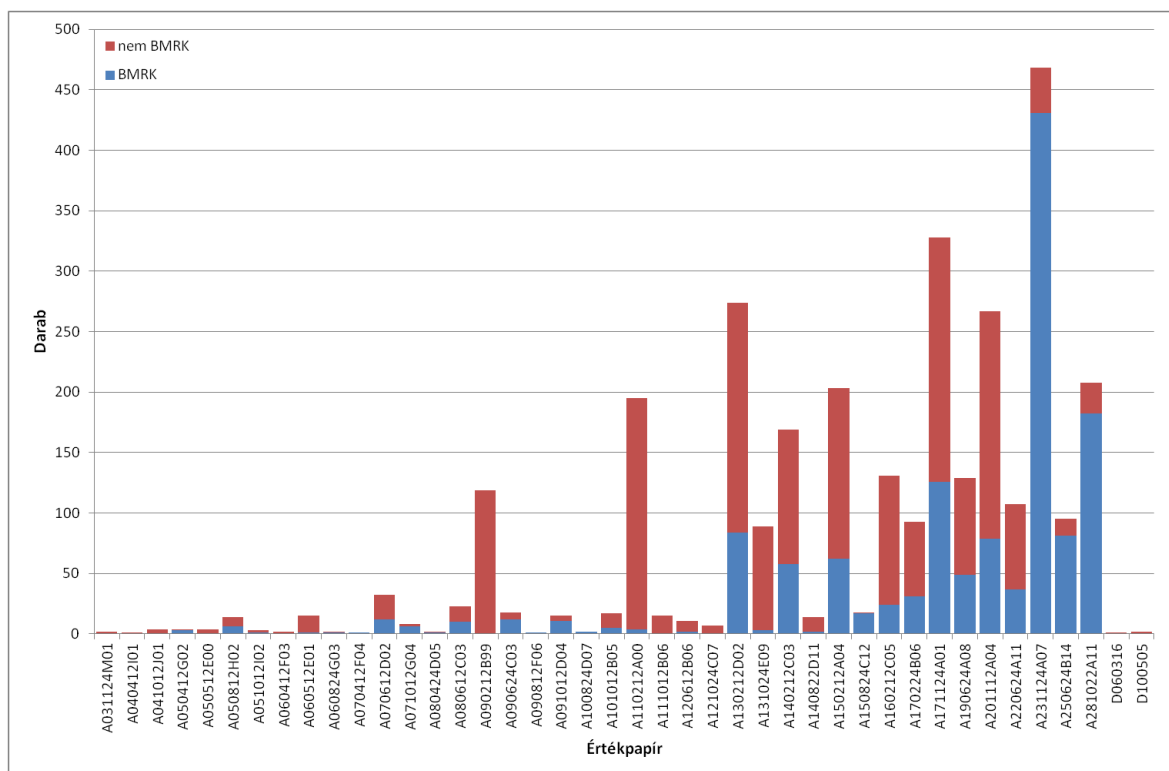
115. ábra Az átlagos négyzetes eltérés szerinti helyezések darabszáma a vizsgált időszakban (késleltetés)

A túréshatár szerinti eredményeket tartalmazza a 116. ábra. Ezen látható, hogy az általános modell után a túréshatár csökkenésével együtt romlik a modell teljesítménye. Megfigyelhető továbbá, hogy az 50%-os rugalmasság is közel olyan sorrendiséget ad, mint az általános modell, azonban az eltérésekből extrém változásokra (tehát, hogy ez a rugalmasság sem elegendő még) következtethetünk. Habár az 5%-os késleltetés a többihez képest összességében rosszabb illeszkedést jelent, de többször adja a legkisebb RMSE-t, mint a 10%-os modell, illetve közel annyit, mint a 20%-os modell (pedig a rugalmasság csökkenése miatt nem ezt várnánk).

	RMSE-Prices all	RMSE-Prices 20 0.05	RMSE-Prices 20 0.1	RMSE-Prices 20 0.2	RMSE-Prices 20 0.5
1	1163	433	349	466	782
2	810	263	447	562	1011
3	454	436	415	1275	513
4	366	474	1297	515	441
5	320	1507	605	295	366

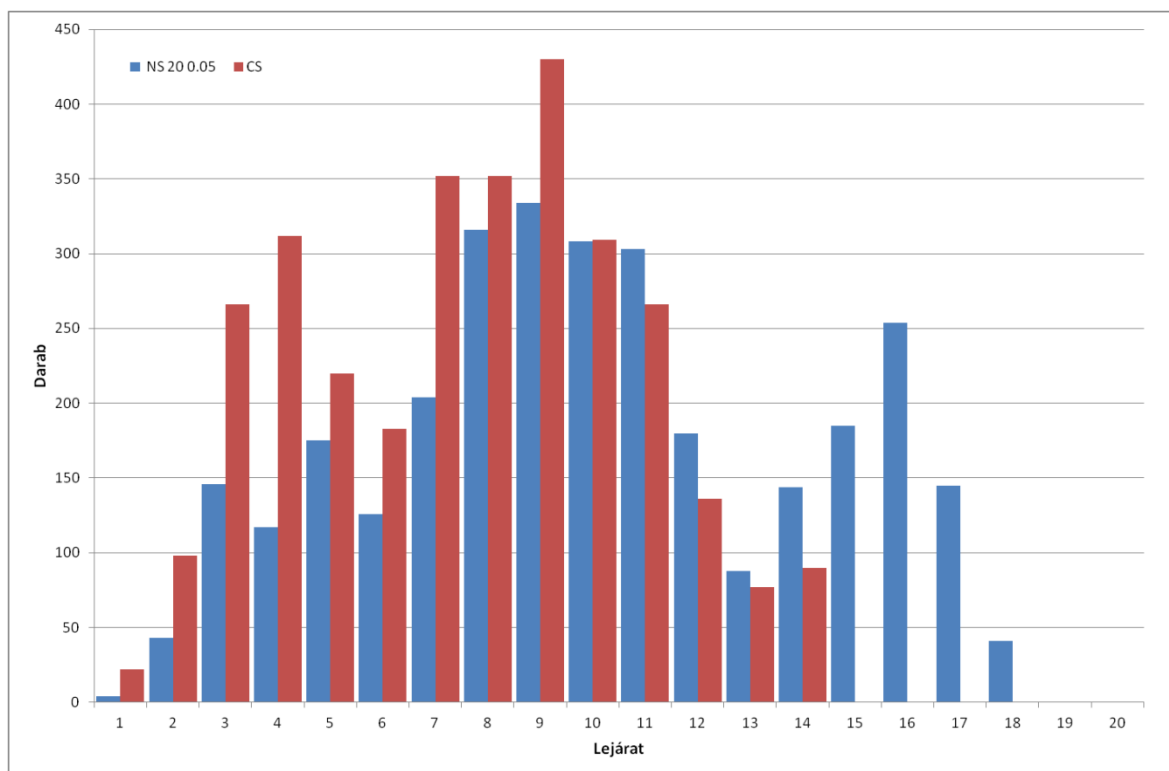
116. ábra Az átlagos négyzetes eltérés szerinti helyezések darabszáma a vizsgált időszakban (túréshatár)

A harmadfokú spline modellhez (31. ábra) hasonlóan megvizsgáltuk, hogy az egyes papírok hányszor adják adott napon a legrosszabb illeszkedést (ezek arányára a teljes négyzetes hibához képest hasonló eredményeket kaptunk, így azokat nem ismételjük meg). A korlátozott (5%, 20 nap) Nelson-Siegel modellnél problémás papír a 2023/A, ugyanis amellett, hogy ez adja legtöbbször a legnagyobb négyzetes hibát, általában benchmark kötvény is, így nem zárhatjuk ki az elemzésből. Amiket kiszűrhetünk az a 2009/B, 2011/A és 2013/D, melyből az első kettőt a spline módszernél is megkaptuk, így ezen papírok megfigyeléseit kihagyhatjuk az elemzésből.



117. ábra A maximális négyzetes hibák darabszáma különböző papírok esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Ha a legnagyobb hibákat nem papírok, hanem lejáratok szerint tekintjük, akkor a 118. ábra alapján a következőket figyelhetjük meg. Látható, hogy legtöbbször mindkét modellnél (korlátozott Nelson-Siegel és harmadfokú spline) középtávú (8-10 év) a legnagyobb négyzetes eltérésű hibához tartozó állampapír. Megfigyelhető továbbá, hogy míg a harmadfokú spline esetén rövid távon (3-4 év) van több ilyen papír, addig a 20 nap, 5%-os modellnél hosszútávon (14-17 év, ekkor a spline módszernél egyáltalán nincs papír). Látható, hogy a Nelson-Siegel modell esetén egyenletesebb a lejáratok eloszlása, ez a módszerekhez tartozó függvényformákból adódik. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy a Nelson-Siegel modell inkább rövidtávon (ez következhet abból is, hogy most az RMSE értékeket vizsgáljuk, de az optimalizálás súlyozott hibafüggvénnyel történt), míg a spline modell inkább hosszútávon ad pontosabb illeszkedést.



118. ábra A maximális négyzetes hibákhoz tartozó állampapírok lejáratú megoszlása (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap és harmadfokú spline)

A következő részben a benchmark kötvényeket elemezzük az eddigi módszerekkel, azaz például hogy a vizsgált módszerek általi kötvényárazási hibák tekinthetők-e a véletlen zajnak.

3.2.2.2.5 A benchmark kötvények vizsgálata különböző hibafüggvények mellett

A 20 nap és 5% tűréshatárú Nelson-Siegel modell esetén is megvizsgáltuk az alul- és felülbecslések feltétel nélküli és feltételes valószínűségeit.

$\text{Prob}(X_t=x)$	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1	18,05%	21,91%	59,62%	38,90%	45,69%	45,98%	53,73%
1	81,95%	78,09%	40,38%	61,10%	54,31%	54,02%	46,27%

119. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

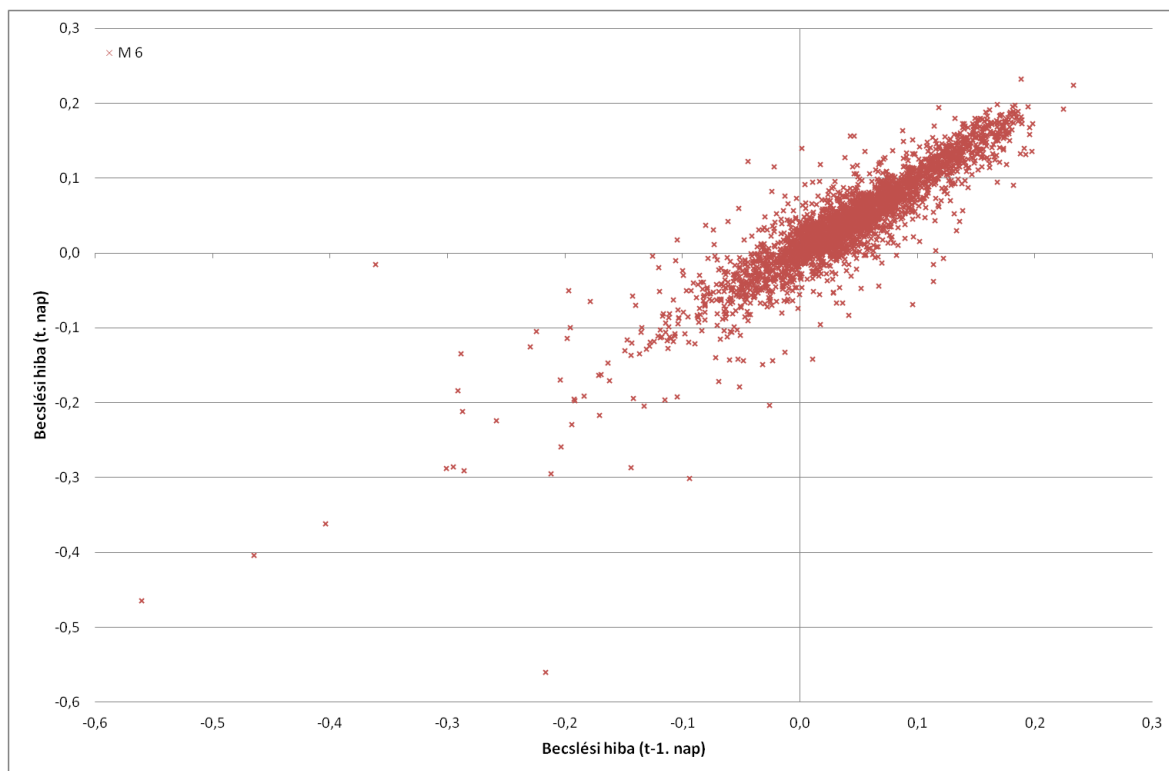
A 119. ábra is az eddigi eredményeket mutatja, azaz a kincstárjegyek esetén 3 és 6 hónapos lejáratra a modell az esetek körülbelül négy ötödében felülbecsli az árfolyamokat, míg az 1 éves papírnál alulbecsli. Látható továbbá, hogy a legalább 1 éves benchmark papírok esetén a valószínűségek 50% közelébe esnek, így azok esetén nem zárható ki az illesztési hiba véletlenszerűsége.

$\text{Prob}(X_{t+1}=y \mid X_t=x)$	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1-1	85,38%	79,00%	90,29%	77,67%	78,24%	83,55%	85,63%
-11	14,62%	21,00%	9,71%	22,33%	21,76%	16,45%	14,37%
1-1	3,22%	5,89%	14,26%	14,22%	18,36%	14,06%	16,62%
11	96,78%	94,11%	85,74%	85,78%	81,64%	85,94%	83,38%

120. ábra Az egymást követő hibák feltételes valószínűsége (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

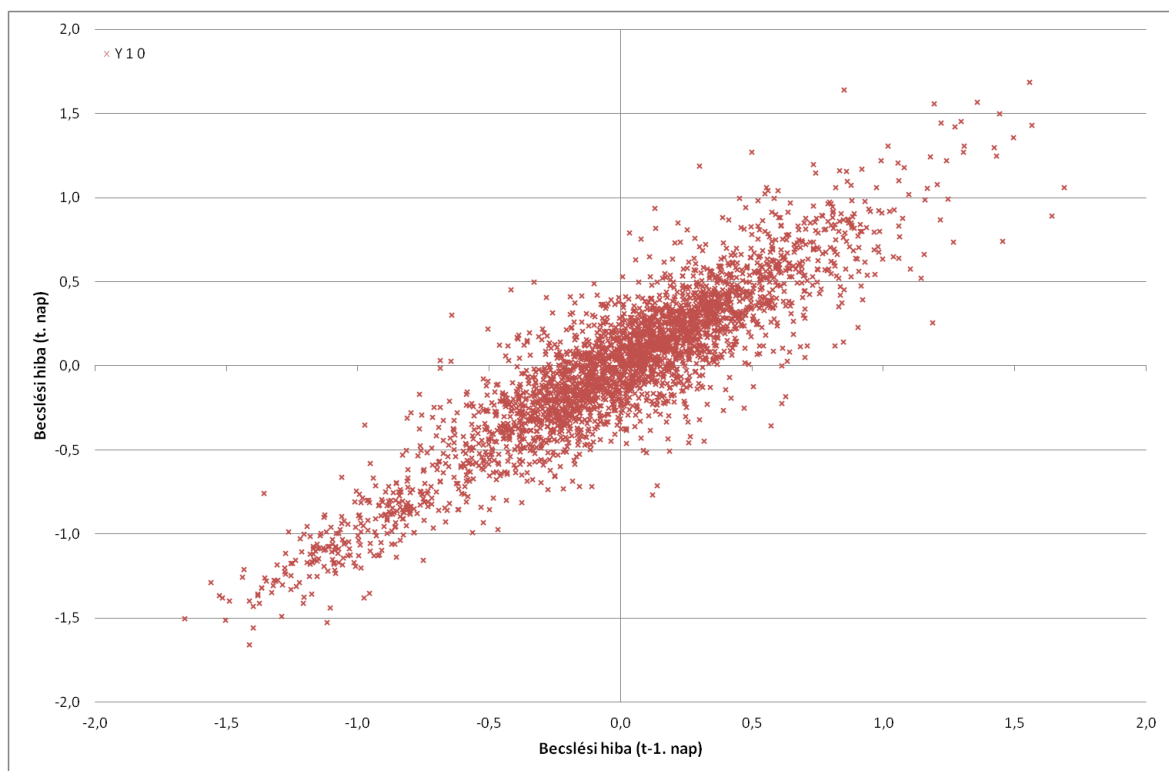
A feltételes valószínűségeket vizsgálva is hasonló megállapításokat tehetünk, mint korábban. A 120. ábra mutatja, hogy alul/felülbecslést magas százalékban alul/felülbecslés

követ, mind a kincstárjegyek, mind a kötvények esetén. Véletlen hibák esetén a feltételes és feltétel nélküli valószínűségeknek meg kéne egyezniük, ami láthatóan nem teljesül (például a 85,38% és 3,22% jelentősen eltér a 18,05%-tól).



121. ábra A becslési hibák autokorrelációja a 6 hónapos kincstárjegy esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Az előző ábra a benchmark állampapírok esetén a hibák nagyfokú autokorrelációjára utal. Grafikusan ábrázolva az egymást követő hibákat is lineáris kapcsolat figyelhető meg a 6 hónapos papírok esetén (121. ábra). Megfigyelhető továbbá, hogy a legtöbb pont az első síknegyedbe esik, azaz a legnagyobb valószínűséggel egymás után két felülbecslést figyelhetünk meg (ez annak a következménye, hogy jellemzően felülbecsüljük a megfigyelt középárfolyamot a 119. ábra alapján). Az ábráról leolvasható az a korábbi megállapítás is, hogy felül/alulbecslést jellemzően felül/alulbecslés követ (például felülbecslésnél a 120. ábra alapján az első és negyedik síknegyed pontjainak 94,11%-a esik az elsőbe).



122. ábra A becslési hibák autokorrelációja a 10 éves kötvény esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A 122. ábra is a lineáris kapcsolatot mutatja a 10 éves benchmark kötvénynél. Itt a szimmetria annak a következménye, hogy az alul- és felülbecslés feltétel nélküli valószínűsége közel megegyezik (119. ábra). Összehasonlítva az előző ábrával azt láthatjuk, hogy a hibák ebben az esetben eltérő nagyságrendűek (ez is azt mutatja, hogy a modell rövid távon jobb becslést ad), illetve a kötvény esetén inkább az első síknegyedbe esnek az extrém értékek, míg a kincstárjegy esetén a harmadikba.

	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
t-1	0,9339	0,9074	0,8915	0,8768	0,7653	0,9038	0,9126
t-2	0,8892	0,8525	0,8286	0,8341	0,6929	0,8679	0,8693
t-3	0,8497	0,8030	0,7773	0,7943	0,6291	0,8446	0,8320
t-4	0,8106	0,7612	0,7409	0,7626	0,5833	0,8237	0,7952
t-5	0,7855	0,7321	0,7123	0,7298	0,5487	0,8103	0,7529

123. ábra A hibák autokorrelációja a benchmark papírok esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A becslési hibák autokorrelációit numerikusan vizsgálva a benchmark papírok esetén (123. ábra) elmondható, hogy a kincstárjegyek esetén a lejárat növekedésével csökken a kapcsolat szorossága (de még 1 hetes késleltetés esetén is erős). Érdeemes megfigyelni, hogy az 5 éves papír esetén a legkisebbek a korrelációk, így annak árfolyamára hatnak leginkább az eddig fel nem tárt további faktorok (ez, habár nem ábrázoltuk, a harmadfokú spline esetén is igaz).

	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
M 3	1,0000						
M 6	0,7603	1,0000					
M 12	0,1432	0,4286	1,0000				
Y 3	-0,3331	-0,2810	-0,0906	1,0000			
Y 5	0,3127	0,2719	0,0914	-0,1239	1,0000		
Y 10	0,0687	0,0812	0,0528	-0,1507	0,0216	1,0000	
Y 15	-0,2981	-0,3014	-0,1504	0,5493	-0,0746	-0,6295	1,0000

124. ábra A hibák korrelációja a benchmark papírok esetén (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Ha a hibáknak nem az autokorrelációját, hanem egymás közti viszonyát vizsgáljuk, akkor azt látjuk, hogy a két legrövidebb (0,7603) és a két leghosszabb (-0,6295) papír közti kapcsolat a legerősebb (a harmadfokú spline-nál, habár nem ábrázoltuk külön, de csak a rövid oldali megállapítás igaz), míg a kincstárjegyek esetén ez egyirányú, addig a kötvényeknél ellentétes. A többi papír között maximum közepes kapcsolat figyelhető meg, így elmondható, hogy a különböző lejáratok közti hibák jellemzően korrelálatlanok.

Prob($X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1	6,72%	4,05%	13,90%	34,65%	39,12%	33,56%	36,45%
0	46,78%	65,06%	75,19%	6,11%	10,23%	19,11%	24,52%
1	46,49%	30,89%	10,91%	59,23%	50,64%	47,33%	39,03%

125. ábra Az alul- vagy felülbecslés esélye a benchmark papírok esetén (bid-ask sáv, Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

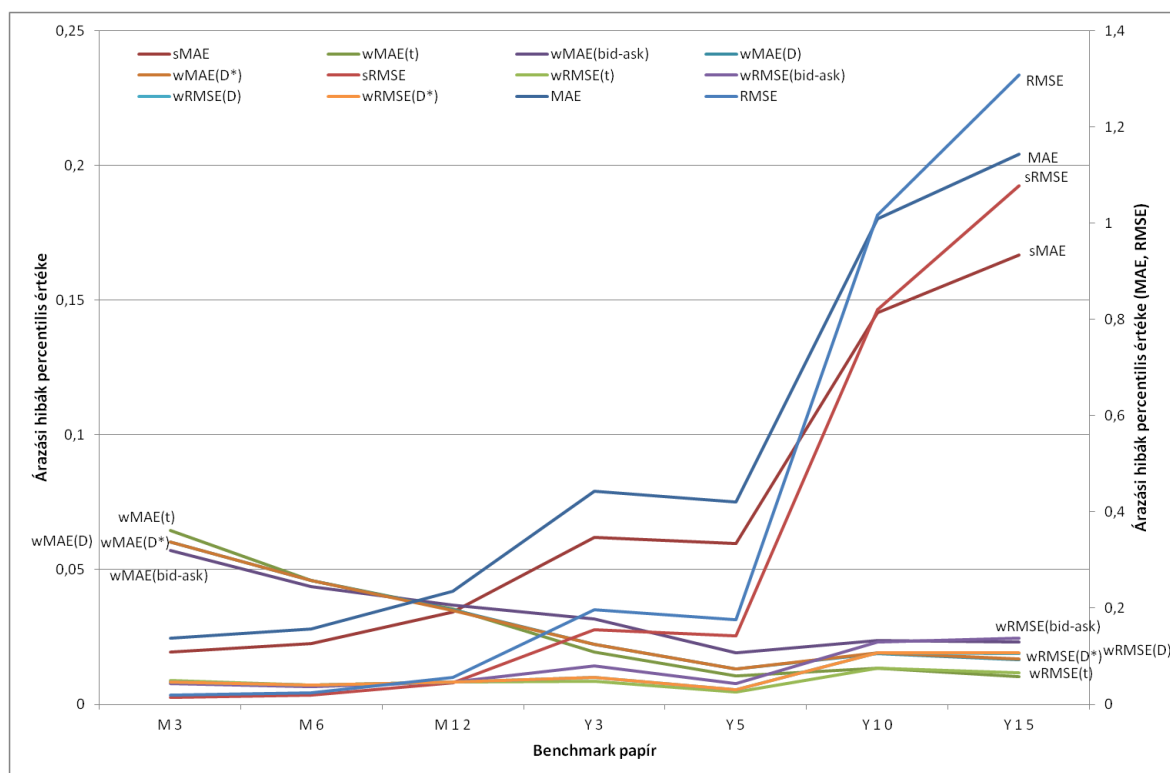
Ha a vételi és eladási árfolyam közé esést vizsgáljuk, akkor látható (125. ábra), hogy az 1 éves benchmark papírt leszámítva mindegyik esetben inkább felül-, mint alulbecsüljük a bid-ask sávot. A korábbi megállapítást is alátámasztja az ábra, miszerint a Nelson-Siegel modell rövidtávon ad jobb illeszkedést (a '0' sor alapján, ami a bid-ask sávba esés valószínűségét jelzi). Itt is megfigyelhető strukturális eltérés a kincstárjegyek és kötvények között a korábbi modellekhez hasonlóan.

Prob($X_{t+1}=y \mid X_t=x$)	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1-1	82,30%	69,05%	72,92%	75,21%	77,55%	78,62%	80,94%
-10	16,27%	30,95%	27,08%	2,14%	1,73%	3,55%	4,41%
-11	1,44%	0,00%	0,00%	22,66%	20,72%	17,83%	14,65%
0-1	2,48%	1,93%	5,01%	11,05%	6,29%	6,40%	6,43%
00	87,62%	90,75%	91,83%	73,68%	80,19%	85,86%	88,32%
01	9,90%	7,32%	3,17%	15,26%	13,52%	7,74%	5,25%
1-1	0,07%	0,00%	0,00%	13,36%	16,07%	12,64%	13,77%
10	10,03%	15,31%	21,83%	1,47%	2,73%	3,20%	3,13%
11	89,90%	84,69%	78,17%	85,17%	81,19%	84,16%	83,10%

126. ábra Az egymást követő hibák feltételes valószínűsége (bid-ask sáv, Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

A 126. ábra mutatja, hogy itt sem egyeznek meg a valószínűségek, például a 3 éves kötvény esetén a felülbecslés feltételes valószínűségei 22,66% (előző nap alulbecslés), 15,26% (előző nap beleesett a sávba) és 85,17% (előző nap is felülbecslés), míg feltétel nélküli a 125. ábra alapján 59,23%. Látható továbbá, hogy a kincstárjegyek és kötvények jellemző vonásai eltérnek egymástól a váltások esetén (mindig magasan a legnagyobb esélye annak van, hogy nem történik váltás), például alulbecslést jellemzően sávba esés követ az előbbieknél, míg

felülbecslés az utóbbiaknál (ez a 121. ábra és a 122. ábra közti nagyságrendbeli különbség eredménye is).



127. ábra A benchmark állampapírok árazási hibájának percentilisei (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Az árazási hibák 95%-os percentiliseit vizsgálva (127. ábra) hasonló ábrát kapunk, mint a Diebold-Li modell esetén (69. ábra), azonban itt jobban elkülönülnek a súlyozatlan és árfolyammal súlyozott MAE és RMSE mutatók. Megfigyelhető továbbá, hogy a súlyozott átlagos abszolút eltérések csökkenő tendenciát mutatnak a lejárat emelkedésével, míg a súlyozott RMSE mutatók inkább emelkedőt. A súlyozás miatt közel megegyező súlyozott négyzetes abszolút eltérések adódnak a benchmark papíroknál, így ebben az esetben az extrém hibák a megfigyelés mérési hibáját vagy modellezési problémára utalnak. Az RMSE értékek emelkedő tendenciát mutatnak, aminek részben következménye a 118. ábra alapján tett megjegyzés, miszerint a Nelson-Siegel modell esetén a maximális hiba inkább magas lejáratú (ezért talán célszerűbb volna a kiugró hibájú papírok szűréséhez az optimalizálásnál használt hibafüggvényt használni).

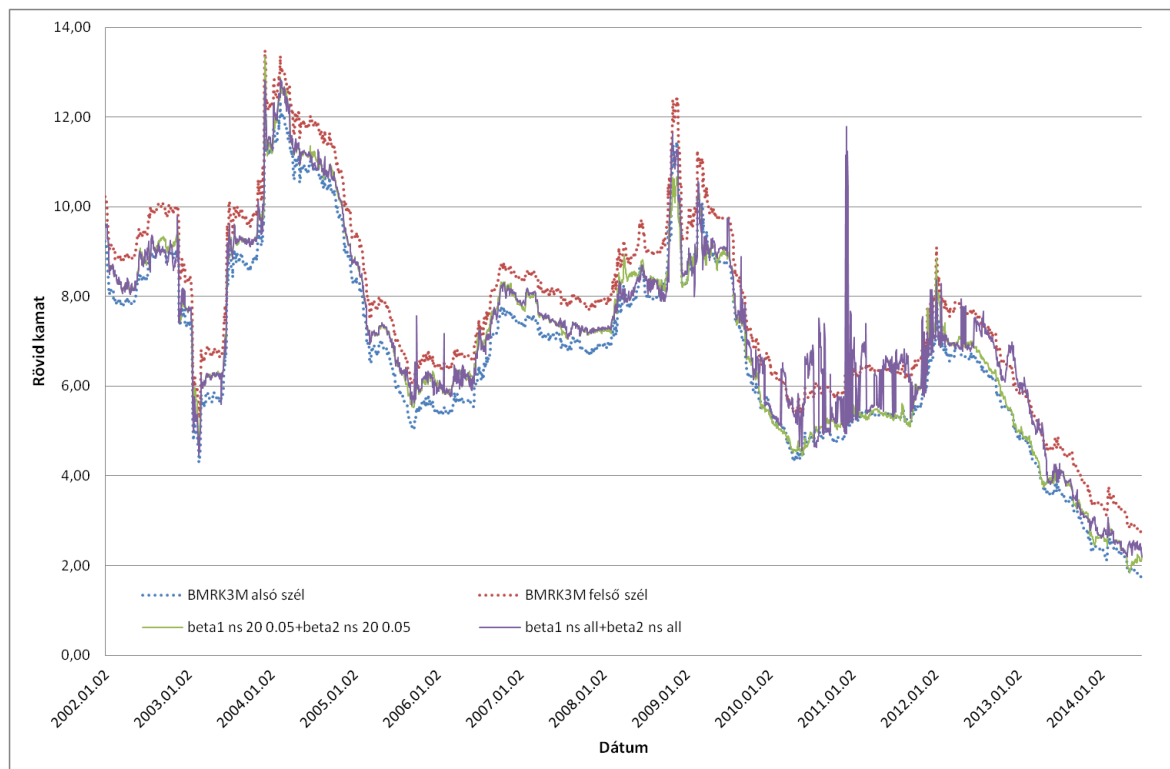
	MAE	sMAE	wMAE (t)	wMAE (bid-ask)	wMAE (D)	wMAE (D*)	RMSE	sRMSE	wRMSE(t)	wRMSE (bid-ask)	wRMSE (D)	wRMSE (D*)
MAE	1,0000											
sMAE	0,9967	1,0000										
wMAE(t)	0,6557	0,6631	1,0000									
wMAE(bid-ask)	0,7360	0,7471	0,9593	1,0000								
wMAE(D)	0,7120	0,7192	0,9930	0,9732	1,0000							
wMAE(D*)	0,7132	0,7203	0,9929	0,9732	1,0000	1,0000						
RMSE	0,9762	0,9729	0,5490	0,6370	0,6102	0,6116	1,0000					
sRMSE	0,9749	0,9764	0,5556	0,6462	0,6167	0,6181	0,9983	1,0000				
wRMSE(t)	0,9058	0,9084	0,8638	0,9029	0,8936	0,8945	0,8515	0,8545	1,0000			
wRMSE(bid-ask)	0,9216	0,9296	0,7613	0,8726	0,8093	0,8102	0,8900	0,8967	0,9553	1,0000		
wRMSE(D)	0,9430	0,9455	0,8106	0,8709	0,8553	0,8562	0,9058	0,9085	0,9885	0,9719	1,0000	
wRMSE(D*)	0,9433	0,9457	0,8095	0,8696	0,8541	0,8551	0,9065	0,9092	0,9884	0,9718	0,9999	1,0000

128. ábra Korreláció az benchmark állampapírok árazási hibái (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Az egyes hibafüggvények közti korrelációk (128. ábra) ugyanolyan struktúrát mutatnak, mint a Diebold-Li modell 0,51-es exponenciális késleltetés mellett, így az ott tett észrevételek ebben az esetben is igazak.

3.2.2.2.6 A rövid kamat vizsgálata

Ebben a részben, a Diebold-Li modellnél szereplő elméleti és empirikus megfontolások alapján, csak a 3 hónapos benchmark hozamhoz tartozó sávba esések alakulását és számát vizsgáltuk a különböző korlátozott Nelson-Siegel modellek esetén.



129. ábra A rövid kamat és a 3 hónapos benchmark hozamhoz tartozó sáv alakulása (Nelson-Siegel, 5%, 20 nap)

Az általános és a 20 nap, 5% korlátozású Nelson-Siegel modelleknel kapott első két faktor összegének alakulását mutatja a 129. ábra. Látható, hogy az időszak elején jellemzően mindkettő a sáv (3 hónapos benchmark hozam $\pm$ 50 bázispont) közepén halad, majd főleg 2011 során gyakran megsérti a sávhatárokat a megnövekedett volatilitásának köszönhetően. A korlátozott modellnél pedig megfigyelhető, hogy a 2008-as gazdasági válság után az alsó sávhatár közelében halad a modellből számított rövid kamat.

	0.05	0.1	0.2	0.5	all
5	2868	2788	2763	2677	2594
10	2886	2861	2788	2746	
20	2789	2890	2854	2760	
60	2775	2753	2876	2865	
120	2757	2775	2756	2898	
250	2703	2723	2727	2777	

130. ábra A 3 hónapos benchmarkpapír által meghatározott sávba esések száma a vizsgált időtáv alatt (Nelson-Siegel)

Ha a sávba esések számát vizsgáljuk (130. ábra), látható, hogy ez az általános modellnél a legkisebb. Megfigyelhető ezen kívül a táblázat alapján, hogy a mellékátló mellett kapjuk a

legnagyobb értékeket, ettől távolodva folyamatosan csökken a sávba esések száma, azonban nem szignifikáns az eltérés (az általános modellt kivéve).

Összességében a 20 napos késleltetésű, 5% tűréshatárú Nelson-Siegel modell felel meg legjobban az elvárásainknak, így az eddig vizsgálatok ennek a modellnek az alkalmazhatóságát támasztják alá.

4 Összefoglalás

Jelen tanulmányban az optimális portfólió modellben használható hozamgörbe becslési technikák egy csoportját, a harmadfokú spline, Diebold-Li és Nelson-Siegel modelleket tekintettük át mind elméleti, mind gyakorlati szemszögből. Az eddigi elemzés eredményeként a korlátozott Nelson-Siegel (késleltetés: 20 nap, tűréshatár 5%) modell a legjobb választás az optimális portfólió modellhez.

Vizsgálatunk középpontjában a következők álltak:

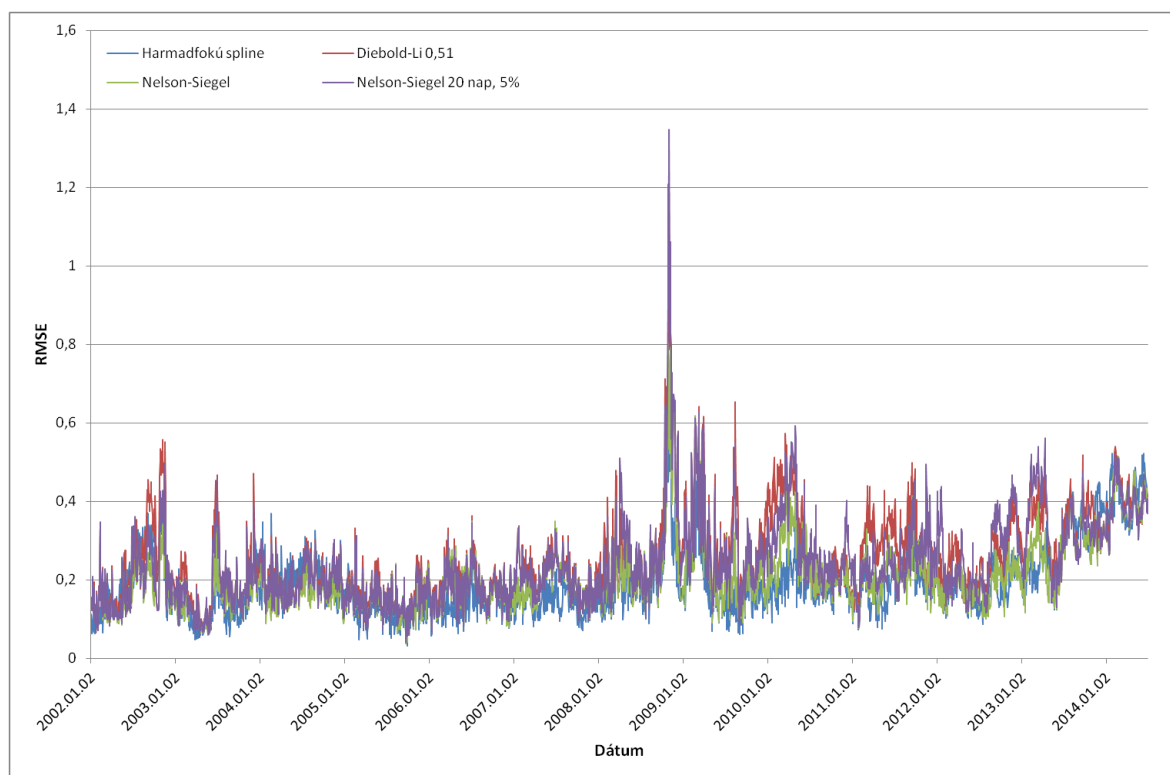
- a modelleket leíró paraméterek (súlyok és faktorok)
 - becslése
 - kezdőparaméterek meghatározása (a Diebold-Li modellnél firstglobal vagy allglobal)
 - értelmezhetősége
 - a harmadfokú spline bázisfüggvény súlyainak közgazdasági értelmezésének lehetősége
 - a Diebold-Li és Nelson-Siegel modellek esetén a hozamgörbe szintjeként, meredekségeként és görbületeként
 - korlátozása
 - a Diebold-Li modellnél a megfelelő fix exponenciális késleltetés megválasztása
 - a Nelson-Siegel modellnél az exponenciális késleltetésre vonatkozóan
 - statisztikai jellemzőik
 - időbeli alakulása
- a kapott hozamgörbék
 - alakja az időtáv alatt
 - átlagos alakja és szórása
 - eltérése a modellek között
- az illeszkedési hibák
 - az átlagos négyzetes eltérés
 - időbeli alakulása a teljes időtáv alatt
 - állampapíronként
 - az alul- és felülbecslés feltétel nélküli és feltételes valószínűsége
 - különböző hibafüggvények vizsgálata a benchmark állampapírok esetén
 - abszolút és négyzetes
 - súlyozatlan és súlyozott
- a modellből kapott rövid kamatok együttmozgása piaci rövid hozamokkal
 - alapkamat
 - O/N BUBOR
 - 3 hónapos benchmark hozam

Az eddigiek folyamán a modelleket alapvetően külön vizsgáltuk, a mostani összefoglalás néhány kiemelt területet fed le, összehasonlítva a legjobb modelleket. A következőkben először az illeszkedési hibákat tekintjük át.

4.1 Az illeszkedés pontossága

Az illeszkedési hibák (RMSE) alakulását tekintve látható, hogy jellemzően a harmadfokú spline és (általános) Nelson-Siegel modelleké a legkisebb érték, illetve a modellek közti

különbségek a gazdasági válságot követően megemelkedtek (131. ábra). Az görbék időbeli fejlődése alapján az összes modellnél megfigyelhető a 2008-as válságkori kiugrás, illetve a vizsgált időszak végi trendszerű emelkedés. Utóbbi mindegyikre egyaránt jellemző, így adatspecifikus, és nem modellbeli hibára utal.



131. ábra A négyzetes hibák alakulása a vizsgált modellek esetén

A harmadfokú spline és (általános) Nelson-Siegel modellek adják a legjobb illeszkedést a 132. ábra alapján. Ez nem meglepő eredmény annak fényében, hogy a másik két modell több korlátozást feltételez a paraméterekre vonatkozóan. Látható, hogy előbbi két modell esetén az RMSE átlaga és szórása egyaránt kisebb, mint a másik kettő esetén. A vizsgált időszaki magasabb maximumok a 2008-as strukturális törésre való lassabb reagálásnak (Nelson-Siegel 20 nap, 5%) vagy pedig annak hiányának (Diebold-Li) következményei. Ha a hirtelen változásokat nem tekintjük, azaz kizárjuk az összes nap legrosszabb öt százalékát, akkor a 95%-os percentilis alapján is látszik, hogy a spline és általános Nelson-Siegel modell adja a legjobb illeszkedést. A maximumok és a 95%-os percentilisek eltérése, illetve a 131. ábra alapján elmondható, hogy a legrosszabb illeszkedések egy rövid időszak extrém piaci körülményeire utalnak (2008-as válság).

	Harmadfokú spline	Diebold-Li 0,51	Nelson-Siegel	Nelson-Siegel 20 nap, 5%
ÁTLAG	0,19334	0,25073	0,20743	0,24008
SZÓRÁS	0,08894	0,11070	0,08822	0,11081
MINIMUM	0,03185	0,03928	0,03715	0,04137
MAXIMUM	0,70573	1,18578	0,80312	1,34685
5%-OS PERCENTILIS	0,08854	0,11513	0,10294	0,11147
95%-OS PERCENTILIS	0,37855	0,44835	0,37903	0,43718

132. ábra A négyzetes hibák (RMSE) statisztikai mutatói a vizsgált modellek esetén

Ha a naponkénti sorrendeket tekintjük, akkor is az eddigi megállapítások adódnak a 133. ábra alapján. Az első helyek és a leggyakoribb helyezés alapján a modellek közti sorrend az illeszkedés alapján a következő:

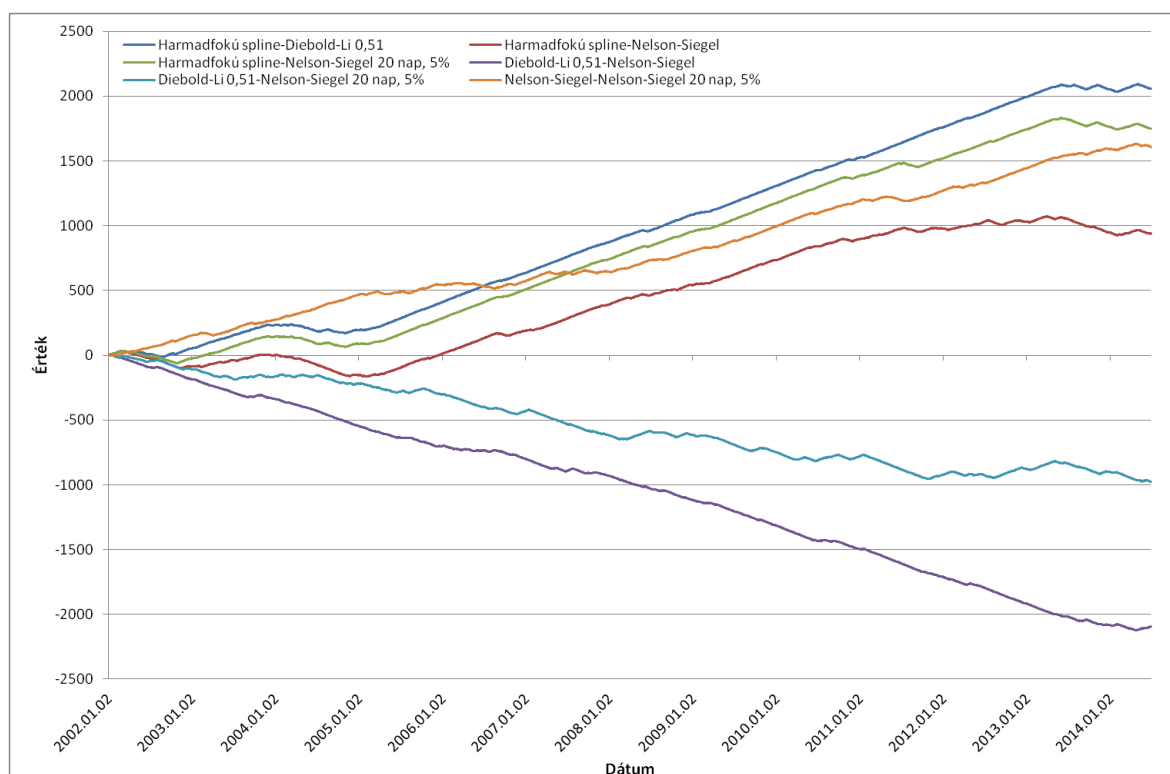
- harmadfokú spline
- Nelson-Siegel (általános)
- Nelson-Siegel (késleltetés: 20 nap, tűréshatár 5%)
- Diebold-Li (exponenciális késleltetés: 0,51).

A harmadfokú spline körülbelül a napok kétharmadában adja a legjobb illeszkedést, így az tekinthető benchmark modellnek, aminek tulajdonságait célszerű a kiválasztandó modellnek reprodukálnia.

	Harmadfokú spline	Diebold-Li 0,51	Nelson-Siegel	Nelson-Siegel 20 nap, 5%
1	1986	110	830	190
2	426	383	1532	780
3	231	1009	508	1360
4	470	1611	243	783

133. ábra Az átlagos négyzetes eltérés szerinti helyezések száma a vizsgált időszakban

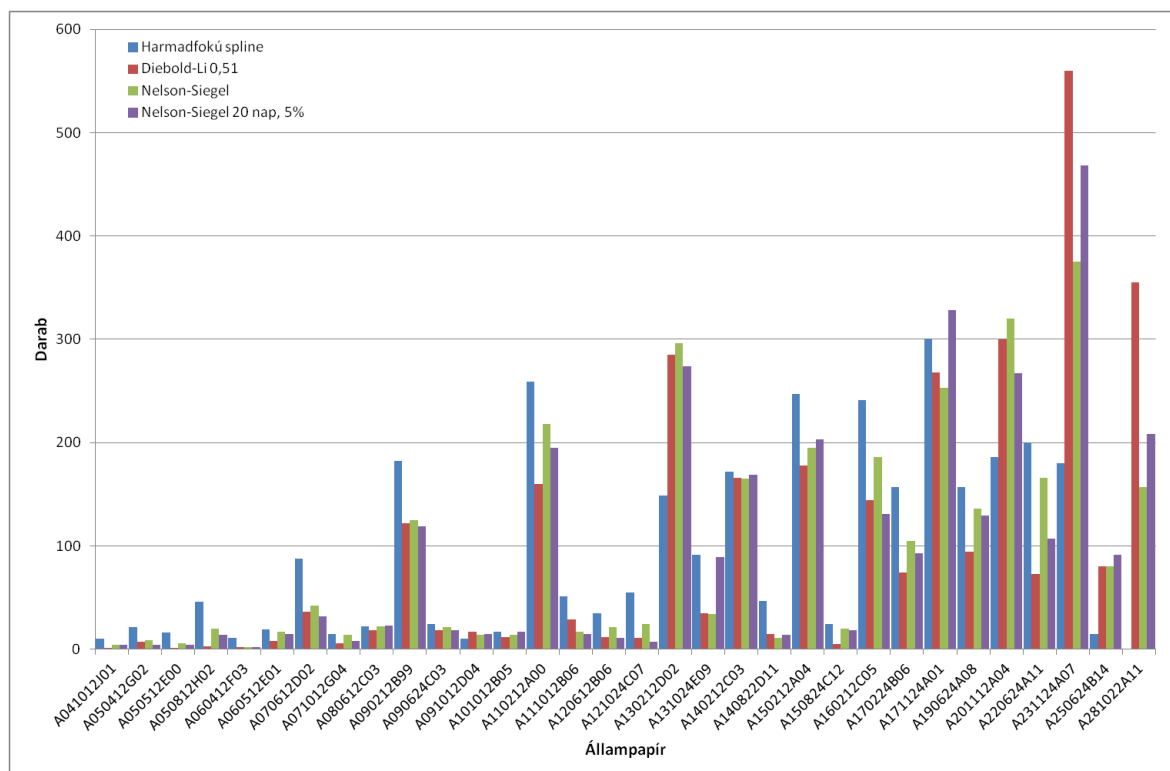
Az előző összehasonlítás nem mutatja még a modellek egymás közti teljesítményét, ezért a 134. ábra alapján megvizsgáltuk, hogy az egyes modelleket összevetve melyik eredményez jobb illeszkedést. Az ábrán például a Harmadfokú spline – Nelson-Siegel görbe azt mutatja be, hogy addig a napig hány napon adott jobb illeszkedést az elől szereplő modell (azaz +1-et jelent, ha a spline módszer hibája kisebb, míg -1-et, ha a Nelson-Siegel modellé). Ez alapján látható, hogy a harmadfokú spline 2004-ben rosszabb illeszkedést adott, mint a Diebold-Li és Nelson-Siegel modellek. Ez annak fényében meglepő, hogy a Diebold-Li modell a teljes időszakot tekintve (rövid intervallumokat leszámítva) mindig magasabb RMSE értékeket adott. Az általános és korlátozott Nelson-Siegel modellek összehasonlítása azt mutatja, hogy az esetek három negyedében az általános modell ad jobb eredményt és nincs olyan időszak, amikor a korlátozott modell teljesítene jobban (egyedül az időszak közepén csökken a görbe emelkedésének üteme).



134. ábra A vizsgált modellek egymás közti RMSE szerinti teljesítménye

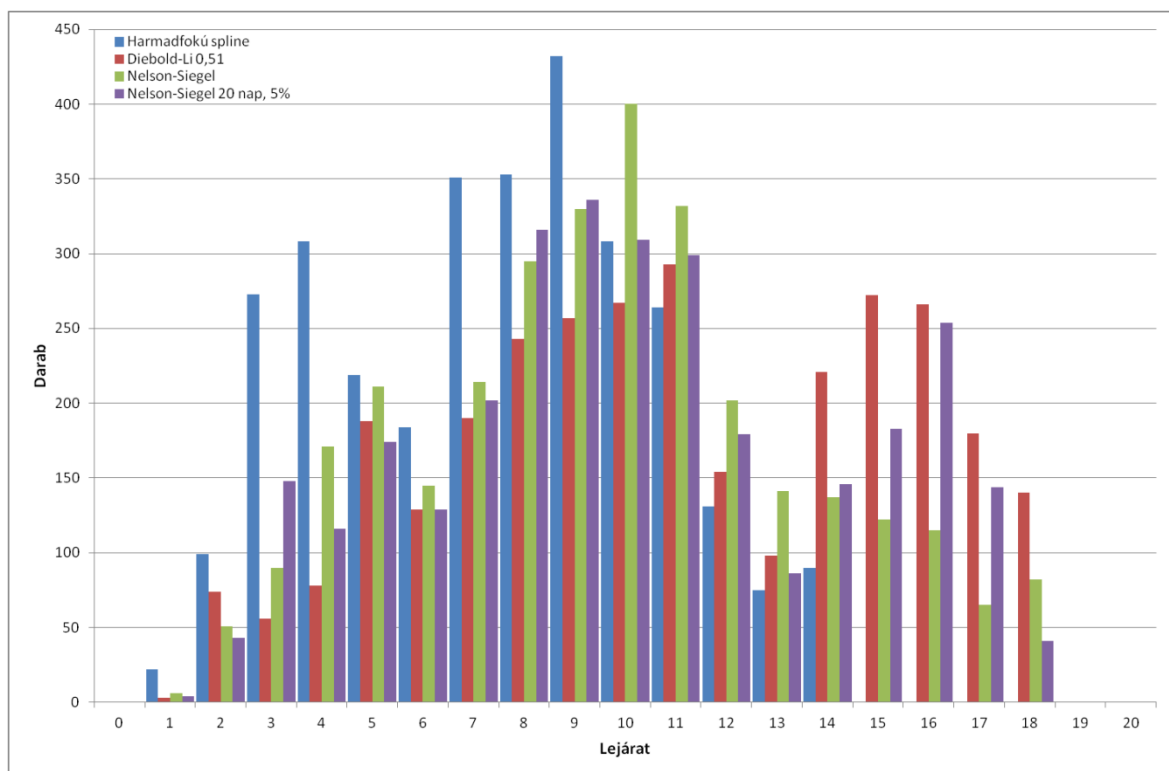
Az általános Nelson-Siegel és a harmadfokú spline modellek összehasonlítása azt mutatja, hogy a 2004-es évet és az időszak végét leszámítva a spline módszer folyamatosan jobb eredményt ad. Mivel valamelyik modell szignifikánsan jobb az összevetésekben, így nem szükséges részletesen megvizsgálni, hogy az egyes napokon mekkora az eltérés az illeszkedések teljesítménye között.

A naponkénti illeszkedések javíthatók, ha elhagyjuk a legnagyobb hibát eredményező megfigyelést, vagy a teljes időszakra kizárunk egyes állampapírokat. A következőkben az utóbbi lehetőséget vizsgáljuk, a korábbiakban láttuk, hogy nincsenek olyan hosszabb időszakok, ahol ugyanaz a papír lenne felelős a nagyobb illeszkedési hibáért (például a 32. ábra kapcsán).



135. ábra A maximális négyzetes hibák darabszáma különböző papírok esetén

A legnagyobb négyzetes hibákat adó papírokat tartalmazza a 135. ábra. Ezen látható, hogy a 2009/B, 2011/A, 2013/D, 2014/C, 2015/A, 2016/C, 2017/A, 2020/A és 2023/A mindegyik modellnél problémás papír. Egyes papírok kizárásával javítható a modell illeszkedése, azonban olyan papírokat nem érdemes kizárni, amik általában benchmarkok állampapírok. A távoli lejáratú kötvények jellemzően a Diebold-Li és Nelson-Siegel modelleknél problémásak (ilyen például a 2023/A vagy főként a 2028/A), míg a közeli lejáratúak inkább a spline modell esetén (például 2016/C). A korábbi elemzések alapján a 2009/B és a 2011/A jellemzően nem benchmarkok azokban az időszakokban, amikor a nagy hibákat okozzák, így azok becslésből való kiszűrésével javítható a modellek eredménye.



136. ábra A maximális négyzetes hibákhoz tartozó állampapírok lejáratí megoszlása

A papírok lejáratí megoszlása alapján a spline módszernél inkább rövid, míg a többi modell esetén inkább hosszú lejáratú papírok adják a legnagyobb négyzetes eltérést (136. ábra). Ez egyrészt a modelleket leíró matematikai függvénynek, másrészt annak a következménye, hogy a Diebold-Li és Nelson-Siegel modelleknél súlyozott hibafüggvényt minimalizálunk, így kevesebb súlyt helyezünk a hosszú kötvényekre. Az ábra alapján következtethetünk azonban arra, hogy a spline módszer hosszú távon, a Diebold-Li és Nelson-Siegel modellek rövidtávon adnak jobb illeszkedést. Ezután a hibák természetét hasonlítjuk össze különböző papírok esetén.

		M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
Harmadfokú spline	-1	18,05%	18,08%	58,08%	32,30%	46,59%	49,10%	47,39%
	1	81,95%	81,92%	41,92%	67,70%	53,41%	50,90%	52,61%
Diebold-Li 0,51	-1	18,56%	21,01%	60,84%	36,49%	41,54%	42,15%	62,19%
	1	81,44%	78,99%	39,16%	63,51%	58,46%	57,85%	37,81%
Nelson-Siegel	-1	31,08%	24,71%	59,30%	31,15%	47,10%	47,36%	54,02%
	1	68,92%	75,29%	40,70%	68,85%	52,90%	52,64%	45,98%
Nelson-Siegel 20 nap, 5%	-1	18,05%	21,91%	59,62%	38,90%	45,69%	45,98%	53,73%
	1	81,95%	78,09%	40,38%	61,10%	54,31%	54,02%	46,27%

137. ábra A benchmark papírok alul- és felülbecslésének esélye a vizsgált modellek esetén

Az alul-és felülbecsléseket tekintve ugyanazok figyelhetők meg a 137. ábra alapján, azaz

- a 3 és 6 hónapos állampapírok esetén körülbelül 80%-ban felülbecsüljük a megfigyelt árfolyamot
- az 1 éves kincstárjegy esetén az esetek körülbelül 60%-ban alulbecsüljük a piaci árjegyzést
- a 3 éves kötvények esetén kétharmad-egyharmad a felül- és alulbecslés aránya
- az 5, 10 és 15 éves benchmark kötvények esetén körülbelül ugyanolyan arányban becsüljük alul és felül a piaci középárfolyamokat.

Ezekből arra következtethetünk, hogy vagy a modellek nem elég rugalmasak rövidtávon, vagy nem vesszük figyelembe a hozamgörbére ható összes faktort (például lejárat és likviditási prémium, jegybanki alapkamat, infláció) és így a becslési hiba nem véletlen, vagy pedig a megfigyelések tartalmaznak mérési hibát.

A korábbiakban adott modellek és benchmark papírok esetén vizsgáltuk az egymást követő hibák előjelét (alul- vagy felülbecslés). Az így kapott feltételes valószínűségek alapján a vizsgált modellek esetén nem függetlenek az egymást követő hibák.

Harmadfokú spline	Nelson-Siegel 20 nap, 5%	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1	-1	4,63%	7,72%	52,72%	24,86%	36,31%	35,09%	22,00%
-1	1	13,41%	10,36%	5,34%	7,46%	10,29%	14,02%	25,38%
1	-1	13,41%	14,18%	6,88%	14,02%	9,39%	10,90%	31,71%
1	1	68,54%	67,74%	35,06%	53,65%	44,00%	39,98%	20,91%

138. ábra A benchmark papírok alul- és felülbecslésének együttes valószínűsége a vizsgált időszak alatt

Vizsgálhatjuk különböző modellek között is, hogy egy adott napon a benchmark papírt alul- vagy felülbecsüljük-e. A 138. ábra azt mutatja, hogy az egyes papírok esetén a harmadfokú spline (mint a legjobb illeszkedést adó, viszonyító) és a korlátozott Nelson-Siegel (mint az optimális portfólió modellhez az eddigi eredmények alapján választott) modell az esetek hány százalékában ad azonos, vagy ellentétes előjelű hibát. Az ábra alapján látható, hogy jellemzően az esetek 25%-ában ellentétes a két modell esetén, hogy alul- vagy felülbecsül-e az adott állampapírt, ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az egyes modellek nem függetlenek a többi modelltől (azaz a becslési hibák nem véletlenek). Két papír viselkedése eltérő: egyrészt az 1 éves kincstárjegy esetén jellemzően megegyezik a becslési hiba iránya (87,78%, azaz itt a hiba adatspecifikus), másrészt a 15 éves kötvény esetén pedig inkább ellentétes (a hiba modellspecifikus). Ha a Diebold-Li és a Nelson-Siegel modelleket hasonlítjuk össze, ott nagyobb százalékban egyezik meg az alul- vagy felülbecslés köszönhetően az azonos matematikai alaknak.

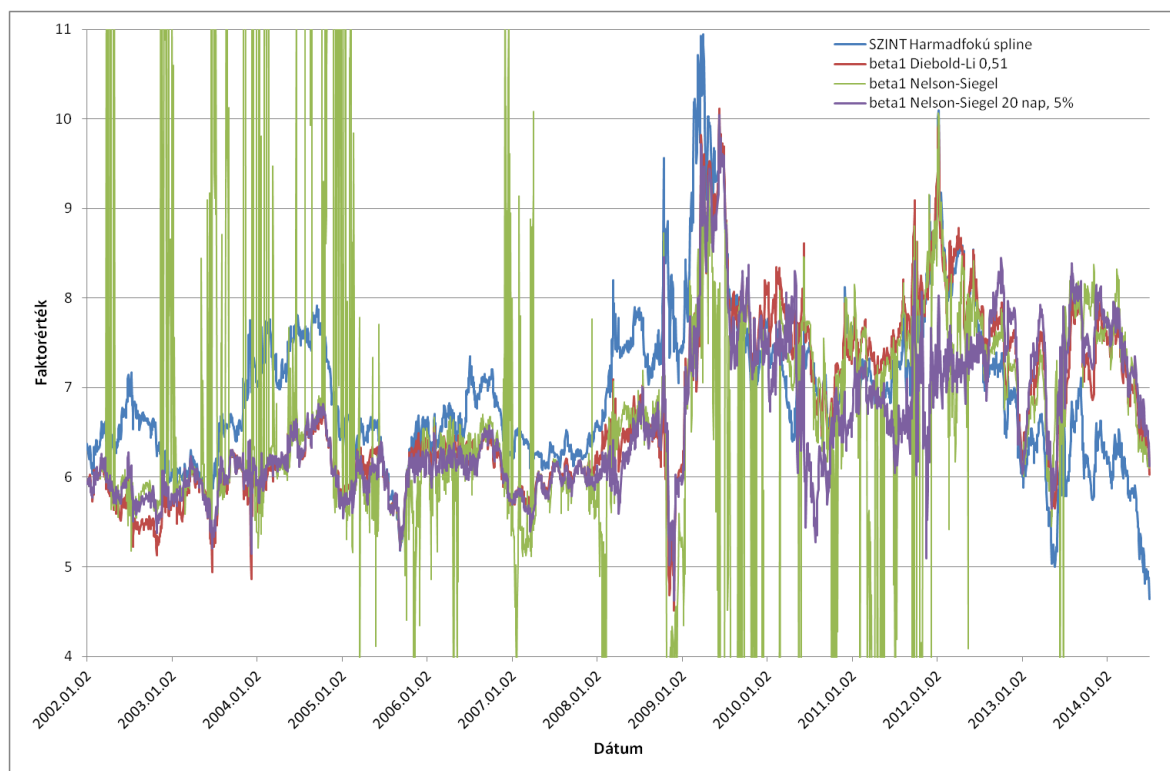
Harmadfokú spline	Nelson-Siegel 20 nap, 5%	M 3	M 6	M 12	Y 3	Y 5	Y 10	Y 15
-1	-1	25,67%	42,70%	90,80%	76,92%	77,92%	71,45%	46,44%
-1	1	74,33%	57,30%	9,20%	23,08%	22,08%	28,55%	53,56%
1	-1	16,37%	17,31%	16,41%	20,72%	17,59%	21,43%	60,27%
1	1	83,63%	82,69%	83,59%	79,28%	82,41%	78,57%	39,73%

139. ábra A benchmark papírok alul- és felülbecslésének feltételes valószínűsége a vizsgált időszak alatt

A 139. ábra a korlátozott Nelson-Siegel modell becslési hibájának előjel- valószínűségét tartalmazza, annak függvényében, hogy a harmadfokú spline módszer esetén alul- vagy felülbecsülünk-e. Például, ha a spline módszerrel alulbecsüljük a 3 éves benchmark kötvény árfolyamát, akkor 23,08% az esélye, hogy a korlátozott Nelson-Siegel esetén pedig felül. Az ábra alapján az 1, 3,5 és 10 éves benchmark papírok esetén a hibák inkább adatspecifikusak, a 15 éves kötvény esetén modellspecifikusak, míg a 3 és 6 hónapos kincstárjegyek esetén nem egyértelmű.

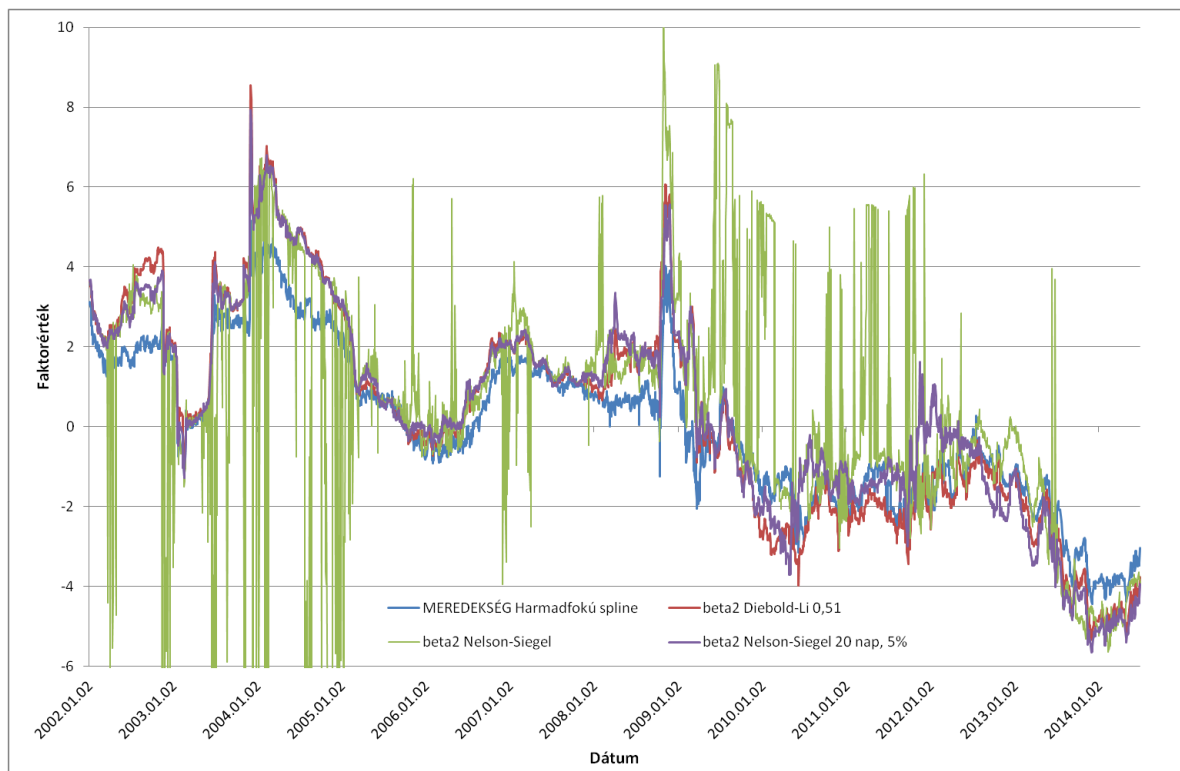
4.2 Idősoros vizsgálhatóság

Ahhoz, hogy a későbbiekben megfelelő előrejelzést tudjunk adni, szükséges, hogy a kapott paraméterek (súlyok és faktorok) időbeli fejlődése idősorosan elemezhető legyen. Ebben a részben ebből a szemszögből hasonlítjuk össze a modelleket (az egymást követő hibák függetlensége is idetartozik).



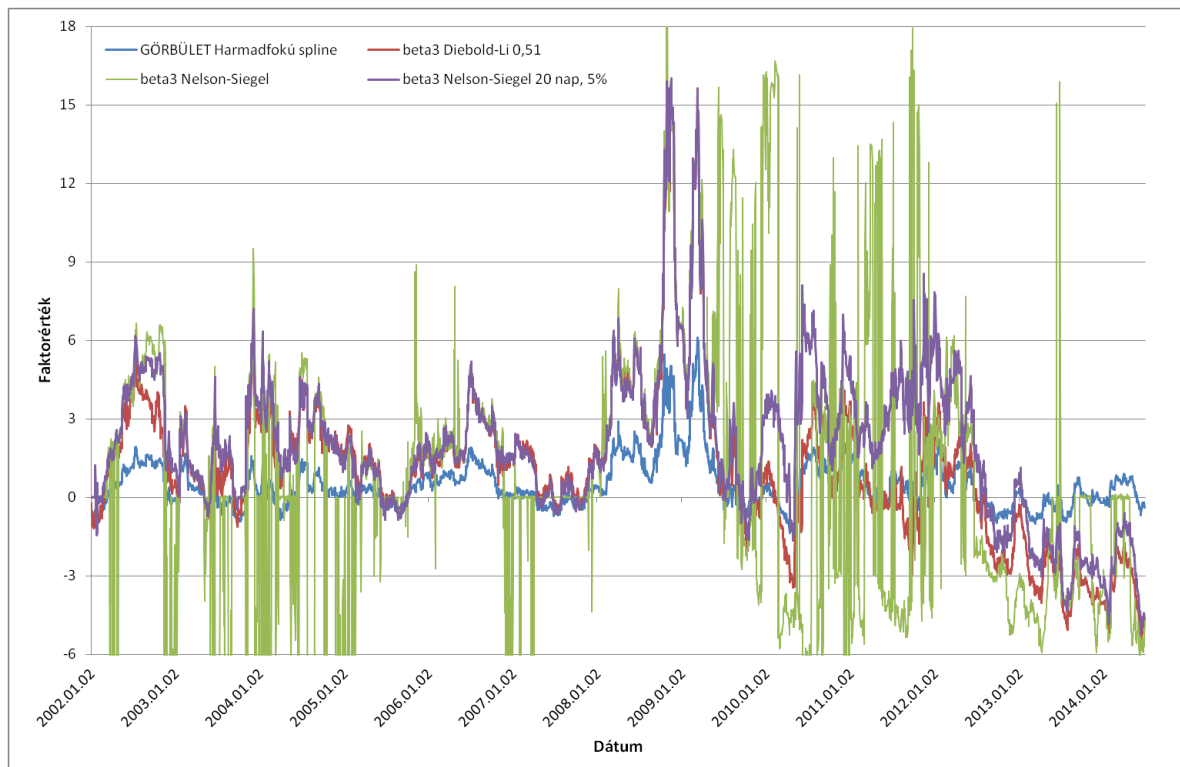
140. ábra Az első faktor alakulása a Nelson-Siegel típusú modellek esetén

A harmadfokú spline módszer esetén a bázisfüggvények súlyai nem azonosíthatók a hozamgörbéből származtatható mutatókkal. További probléma, hogy a súlyok nem függetlenek a csomópontok számától és helyétől, így azok idősoros elemzésre sem használhatók (mivel nem ugyanazok a folyamatok). Ezzel ellentétben a Diebold-Li és Nelson-Siegel modelleknél közgazdaságilag értelmezhetők a faktorok, ezért fontos vizsgálnunk időbeli fejlődésüket. A korábbiak során az egyes modell típusoknál külön-külön végeztük a faktorok dinamikájának grafikus elemzését, ezért most együttesen tesszük meg a spline módszerből származó $R(t, 12 \text{ év})$ empirikus szintet is ábrázolva. A 140. ábra alapján a Diebold-Li és korlátozott Nelson-Siegel modellek jellemzően együtt mozognak a 2008-as válság előtt (kivéve egy 2002 végi rövid időszakot), majd előbbi esetén az első faktor alacsonyabb, mint utóbbinál. Ez az jelenti, hogy 2010 és 2012 között a korlátozott Nelson-Siegel modell esetén a szint (azaz a hosszútávú hozam) körülbelül 100 bázisponttal alacsonyabb. Ez is azt mutatja, hogy a gazdasági válság strukturális törést jelentett a paraméterek alakulásában. Az általános Nelson-Siegel modell a kiugró értékek miatt idősoros elemzéshez biztosan nem használható, azonban meghatározhatók a nyugodtabb, illetve volatilisabb időszakok. Továbbá a kiugrások iránya és gyakorisága alapján rezsimváltásokra is következtethetünk, ezek az ábrából 2004, 2008 és 2011 végén történtek (ez csupán grafikus vizsgálat, ökonometria eszközökkel is érdemes a továbbiakban vizsgálni).



141. ábra A második faktor alakulása a Nelson-Siegel típusú modellek esetén

A második faktor alakulását vizsgálva is hasonló következtetéseket vonhatunk le. A 141. ábra azt mutatja, hogy az időszak elején a modellek felülbecslik a spline módszerből származó $R(t, 12 \text{ év}) - R(t, 3 \text{ hónap})$ empirikus meredekség ellentettjét, majd a 2008-as válság után ez megváltozik. Ez azt jelenti, hogy a Diebold-Li és Nelson-Siegel modellek meredekebb hozamgörbét adnak, mint a harmadfokú spline módszer. A rezsimváltások és strukturális törés ezen az ábrán is megfigyelhetők.

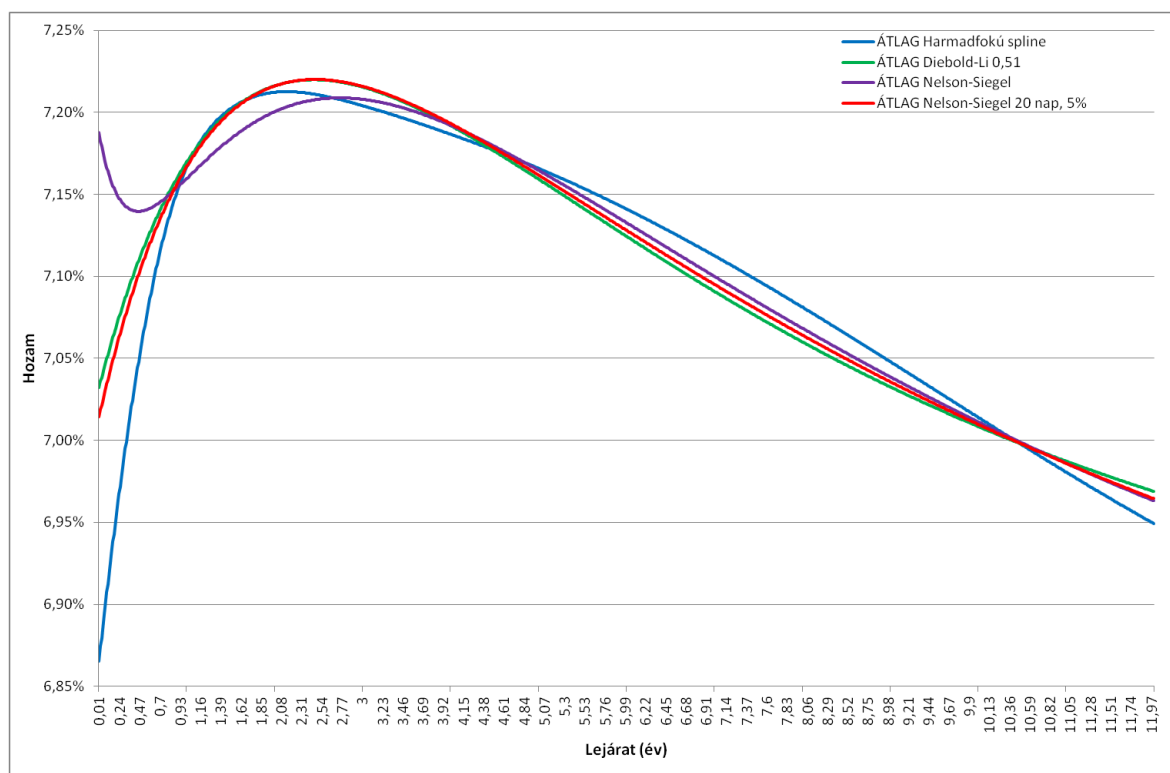


A harmadik faktor alakulását a 142. ábra szemlélteti, ami ugyanazokat a jellegzetességeket mutatja, mint az előző két grafikon. Látható, hogy a $2R(t, 3,51 \text{ év}) - R(t, 3 \text{ hónap}) - R(t, 12 \text{ év})$ empirikus görbület körül jobban ingadoznak a faktor értékek, mint a szint és a meredekség esetén. Megfigyelhető továbbá, hogy a Diebold-Li modell esetén az időszak folyamán végig nagyobb a faktor értéke, mint a korlátozott Nelson-Siegel modellnél, illetve az általános Nelson-Siegel modell esetén nem állandó a kiugrások iránya a 2008-as válságot követően, mint ahogy az első két faktornál volt.

Összefoglalóan, a korlátok nélküli Nelson-Siegel modell nem alkalmazható idősoros elemzésre, míg a másik két modell esetén is figyelembe kell vennünk rezsimváltásokat és strukturális töréseket egyaránt.

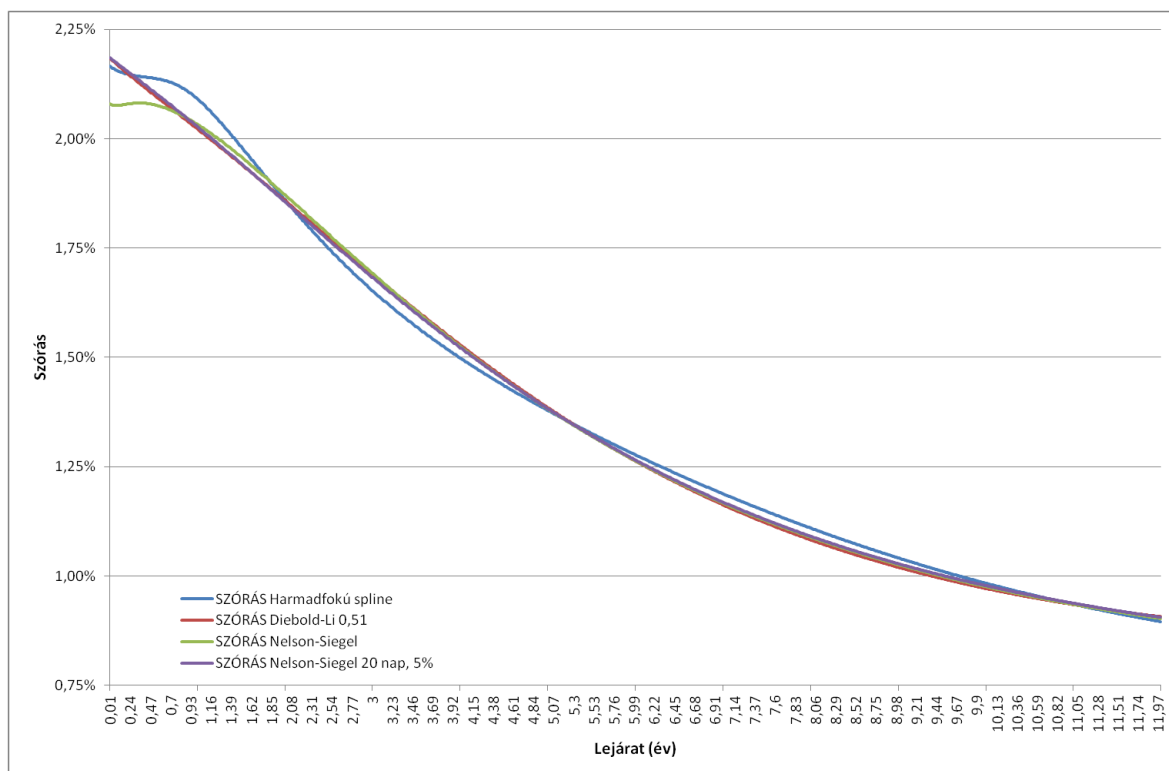
4.3 A kapott hozamgörbék

A korábbiakban részletesen bemutattuk a súlyok és faktorok alapján felépülő hozamgörbéket, így azokat nem ismételnénk meg. Az alábbiakban így az átlagos görbét mutatjuk be a teljes időszakra, a válság előtt és után.



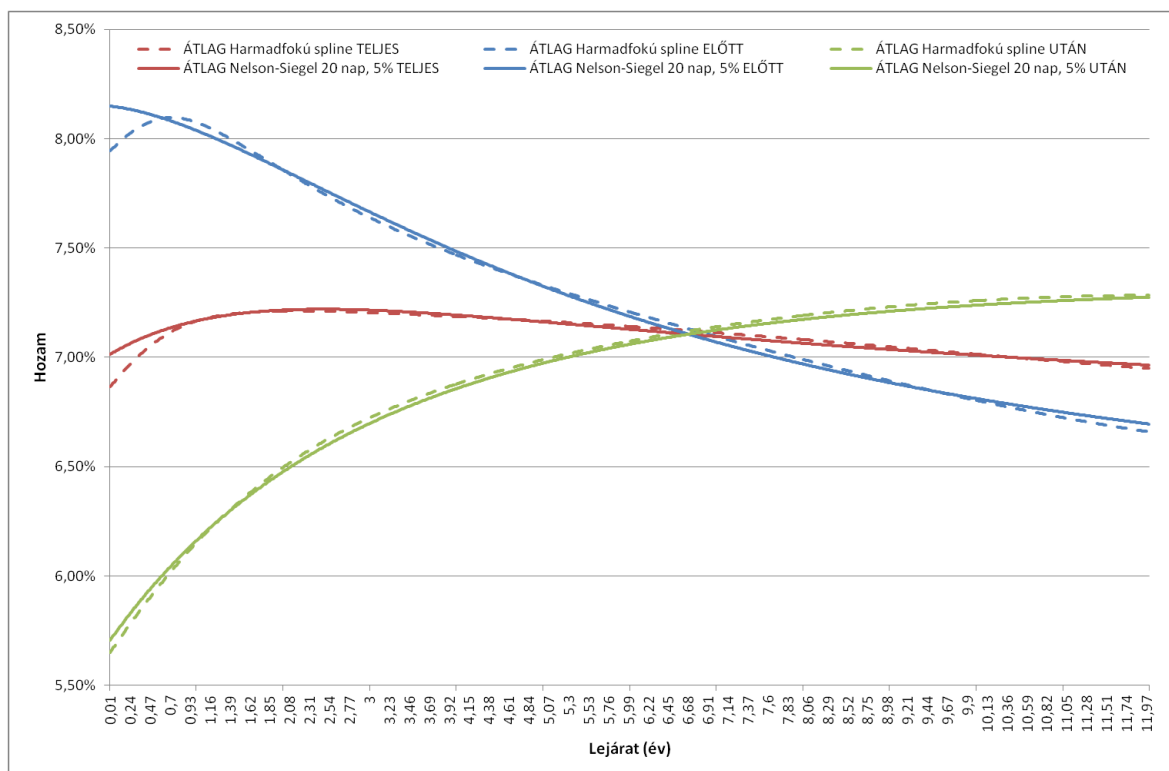
143. ábra Az átlagos hozamgörbe a vizsgált modellek esetén

A 143. ábra alapján a forint állampapír-hozamgörbe enyhén púpos és inverz, a terjedelem alapján (körülbelül 40 bázispont a spline módszer esetén, a többinél 20) pedig elmondható, hogy szinte vízszintes. A Diebold-Li és korlátozott Nelson-Siegel modell esetén az átlagos görbe szinte megegyezik, ez annak köszönhető, hogy mindkettő esetén az exponenciális késleltetést korlátozzuk (habár így is érdekes, ugyanis a Diebold-Li modell rugalmatlanabb). A harmadfokú spline módszer esetén az átlagos rövid hozamok alacsonyabbak, mint az előző kettőnél, és utána is kismértékben eltér azoktól. Az általános Nelson-Siegel modell esetén a rövid oldalon a görbe alakja is eltér a többitől, ez sem meglepő annak fényében, hogy ez a modell teljesített legrosszabbul a rövid kamattal kapcsolatos elemzéseknél (130. ábra).



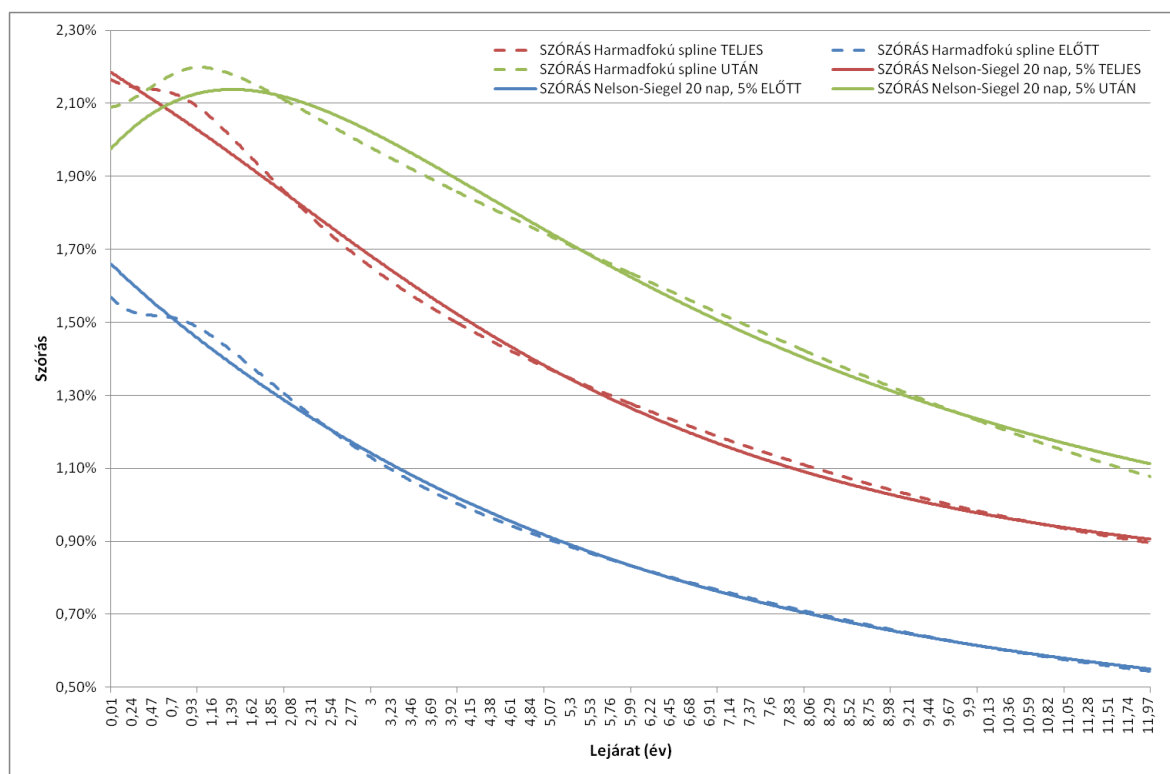
144. ábra Az átlagos hozamgörbe szórása a vizsgált modellek esetén

A különböző lejáratú hozamok szórásának vizsgálatánál hasonló következtetéseket tehetünk, mint az átlagos hozamgörbénél. Így a 144. ábra azt mutatja, hogy a szórás a Diebold-Li és korlátozott Nelson-Siegel modell esetén ugyanúgy alakul, az általános Nelson-Siegel modellnél csak rövid távon, míg a harmadfokú spline-nál az összes lejáraton kis eltérés tapasztalható.



145. ábra Az átlagos hozamgörbe a 2008-as válság előtt és után a harmadfokú spline és a korlátozott Nelson-Siegel modell esetén

Ha részletesebben megvizsgáljuk az átlagos hozamgörbét a harmadfokú spline és a korlátozott Nelson-Siegel modell esetén, akkor láthatjuk a 145. ábra alapján, hogy a 2008-as válság valóban strukturális törést jelentett. Ezt abból látjuk, hogy a válság előtt (2008.09.14-ig) az átlagos görbe normál (emelkedő) volt, míg a válság után inverz (csökkenő). A teljes időszakra pedig ezek átlagaként kaptuk a szinte vízszintes görbét. Mindkettő időszak esetén látható, hogy az átlagos görbe rövid távon tér el, utána közel megegyeznek, illetve hogy a görbék enyhén púposak.



146. ábra A hozamgörbe szórása a 2008-as válság előtt és után a harmadfokú spline és a korlátozott Nelson-Siegel modell esetén

A volatilitásokat vizsgálva az időtáv hasonló megbontásával azt tapasztaljuk, hogy a 6 hónapon belüli lejáratokon kívül a válság után magasabb volt a hozamok szórása, mint a válság előtt (146. ábra). A rövid lejáratokon való viselkedés a többihez képesti szignifikánsabb átlagos hozamszint változás eredménye, illetve a modellek következménye is azáltal, hogy nagyon rövid lejáratra nincs állampapír-piaci megfigyelés. A két modell eltérése mindhárom időszak esetén rövid távon jelentősebb, azután közel együtt mozognak. Az utóbbi két ábra is azt mutatja, hogy a 2008-as gazdasági válság valóban strukturális törést jelent az adatsorban.